ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

ΤΟΥ ΣΥΡΑΚΟΥΣΙΟΥ, ΤΑ ΜΕΧΡΙ
νῦν σωζόμενα, ἅπαντα.

ARCHIMEDIS SYRACVSANI

*PHILOSOPHI AC GEOMETRAE EX*cellentissimi Opera, quæ quidem extant, omnia, multis iam seculis desiderata, atque à quàm paucissimis hactenus uisa, nuncque primùm & Græcè & Latinè in lucem edita.

Quorum Catalogum uersa pagina reperies.

Adiecta quoque sunt

EVTOCII ASCALONITAE

IN EOSDEM ARCHIMEDIS LIbros Commentaria, item Græcè & Latinè, nunquam antea excusa.

Cum Cæs. Maiest. gratia & priuilegio ad quinquennium.

BASILEAE

Ioan. [illegible]

An. MDXLIIII.

ARCHIMEDIS OPERVM
HOC LIBRO CONTENTORUM Catalogus.

Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου	βιβ. β'.	De sphæra & cylindro libri	II.
Κύκλου μέτρησις	α'.	Circuli dimensio	I.
Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων	α'.	De conoidibus & sphæroidibus	I.
Περὶ ἑλίκων	α'.	De lineis spiralibus	I.
Ἐπιπέδων ἰσορροπικῶν, ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων	β'.	Planorum æqueponderantium inuenta, uel centra grauitatis planorũ.	II.
Ψαμμίτης	α'.	De harenæ numero	I.
Τετραγωνισμὸς παραβολῆς	α'.	Quadratura parabolæ	I.
ΕΥΤΟΚΙΟΥ ἀσκαλωνίτου ὑπόμνημα εἰς τὸ πρῶτον καὶ δεύτερον τῶν ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου		EVTOCII Ascalonitæ Commentarius in primum & secundum Archimedis de sphæra & cylindro	
Εἰς τὴν τοῦ κύκλου μέτρησιν		In circuli dimensionem	
Εἰς τὸ α' καὶ β' τῶν ἰσορροπικῶν.		In primũ & secundũ æquepõderantiũ.	

AMPLISSIMO SENATORVM ORDINI REIPVBLICAE NORIMBERGENSIS, *Dominis suis incomparabiliter obseruandis, Thomas Gecbauff, cognomento Venatorius, seipsum commendat.*

HOMINEM ab ipsomet Opifice rerum, imperium in ipsam terram, adeoq; in ipsas passim uniuersas creaturas accepisse: concessa etiam, quæ homini, pro modulo sui status satis esset, cognitione rerum, Moses in ipso statim libri Geneseos uestibulo, scriptum reliquit. Homo autem simul atq; mandatum Opificis minus, quàm par erat, sanctè colere cœpisset, præbuissetq; iam aures aduersario lucis, protinus & accepto in rerum creaturas imperio exuitur, & summæ felicitatis, ad quam utiq; formatus fuerat, fruitione priuatur: adeò ut iam non tantum longissimè à uera felicitate exularet, sed etiam in ipsa rerum cognitione equidem miserè cæcutiret. Et meritò quidem. Qui enim supremæ contemptor est maiestatis, suprema quur non plecteretur pœna? Atqui ne penitus ab ea, ad quam semel fabricatus fuerat homo, excideret felicitate: præterquam quod Deus omnipotens bonitatis suæ uerbum, ut carnem indueret, misit, cuius deinde morte, labes illa contractæ impuritatis ablueretur: rursus etiam hominem, ad præclarissimarum rerum cognitionem, ceu per gradus quosdam artium ascendere uoluit, ut iam constanter nobis polliceri possimus, habere quãdam cum uirtute ipsa coniunctionem honestas artes omnes. Et si enim hodie inuentam ueritatem, sola sibi iure uendicat Theologia: inuentam una secure possidet pietas Christiana: nõ tamen & alias liberales disciplinas cõtemnere debemus, ob eam duntaxat causam, quòd per ipsas adhuc quæritur Veritas: sed potius & ipsæ in consuetudinem humanæ uitæ admittendæ, ne quæ usu adhuc rerum carent ingenia iuuentutis nostræ, penitus syluescant, dum perpetuò cultura bonarum artium destituuntur. Quod enim præstat cibus hominibus ut uiuant, id præstant honestæ disciplinæ, ut bene uiuant. Alimenta corporibus si subduxeris, ipsa protinus uiuere desinent: & communi mortalium uitæ honestas artes, mox ut subducere cœperis, ipsa uita nostra, quid nisi quàm proximè ad brutorum uitam accedere uidebitur? Quare mea quidem sententia, hoc iuuentuti sunt artes honestę uniuersæ, quod himber est pratis arescẽtibus, quod riui hortis, quod agris cultus, & ipsis quod est uineis putatio. Cultura artium ut rebus humanis non parum adijcit splendoris & ornamẽti, ita contemptus earum & morum & uitæ sinceritatem non infrequen-

ter eneruare uisus est. Literis literatis non exculta uita nostra, quid aliud quàm barbara quædam censenda est barbaries? Certe bonarum artium studijs, homini præsertim ad immortalitatem contendenti, nulla est possessio uel certior, uel securior: cum quod hæc una possessio, animū ad solidæ uirtutis amorem inflammat: tum quod ea ab initio qui usi sunt, ut uerè inquit Sapiens, participarunt amicitiæ Dei. Vos uerò P.C. quàm rectissimè consultum esse optetis Reipub. literariæ, abunde testantur tot passim illa uestræ liberalitatis collata in studiosos subsidia. Et est alioqui apud uos in magno precio philosophiæ studium: tum præcipuè in maiore honore haberi à uobis eos autores, qui Mathemata conscripserunt, uel hoc nomine, quod Mathematicarū rerum cognitionem, numerare soletis inter pulcherrimas atq; utilissimas philosophiæ partes: ut inde uobis non solum multam utilitatem percipiatis priuatim, sed apud exteros quoq; & doctos harum rerum, summam non rarò inire uisi sitis gratiam publicè. Habuit ordo uester Senatorius semper tales uiros, qui uel pulcherrimarum artiū fuerint studiosi, uel saltem qui à rectis studijs non essent prorsus abhorrente animo. Quæ laus cum ipsam secum ferat honestatem, non potest non esse pulcherrima. De uobis, qui hodie gubernacula Reipub. tenetis, ut paucis absoluere, quod dicere uolo, non possum: ita à me dedicatum uobis Archimedem Siculum illum, Mathematicarum disciplinarum facile, iudicio doctorum omniū, principem, benignè equidem accipere debetis. Hoc enim uno renato, uniuersa Mathesis renata uideri queat. Fuit hactenus in Mathematicis scriptionibus Archimedis nomine celebrius nihil, at qui uerè oculis suis tanti autoris monimenta uiderit, quem mihi conspiciendū dabitis: Bilibaldus Pirckheymerus, quem uos, dum uiueret, inter doctos doctissimum nominari haud grauatim passi estis: ille inquam, ut erat uir excellentis ingenij, cum Rhoma græcè scriptum Archimedis nostri exemplar, opera amici cuiusdam, tandem post longam expectationem accepisset, non tantum quasi uilem aliquem in ædibus suis passus est habitare hospitem, sed illū quotidianæ studiorum suorum consuetudini uoluit essem consortem. Quippe qui nō ignoraret, hoc studiorum genus olim semper religiosissimè ab ipsis summis regnorum moderatoribus, illisq; sapientissimis, & cultum fuisse, & celebratum. Hinc Plato philosophorū lumen, in libris de Legib. scribens, suo more præcipere audet, Geometriam (ut alia prætercam) discēdam esse à liberis hominibus. Quem sequutus M. Fabius Quintilianus, hanc ipsam disciplinam futuro Oratori, non tam utilem quàm necessariam etiam esse putauit. Itaq; rem gratam facturum me ratus sum, si eum autorem uestris potissimum auspicijs in diem protruderem, qui unus adhuc ad Mathematicas perfectiones absoluendas deesse uidebatur. Cæterum, quæ animis uestris insita est modestia, nō egrè laturi estis, si extremos huius editionis fructus, ad uniuersos bono

Lib. 7.

rum stu-

rum studiorum cultores cupiam peruēturos, laudem uerò ad uos unos commigraturam. Hac enim laude cum primis digni estis, quod primi ac penè soli fins hodie in Germania (absit inuidia dicto) quorum patrocinio rectorum studiorum causa sustentatur, fouetur ꝗ. Quod exemplum utinam sequerentur etiam alij, quos habet Germania Principes plures, titulis alioqui non inhonestarum rerum inclytos & illustres. Certe ab eis res praeclarè gestae, ad posteros ut cum laude extendantur, sine literarum praeclarissimarum adminiculo, rectè sperare non possunt. Sic enim usu comperimus, neq; nomen sibi quenquam parare posse, neq; locum laudis ullum apud posteros habiturum, qui hisce disciplinis animum suum parum bona fide studuit obfirmare. Quare contemptores artium praeterquam quòd uitam inglorij transigunt, in ipsum etiā conditorē rerum ingrati esse conuincuntur. Sunt enim artes honestae omnes, non sine numinis summi certa dispensatione ad homines allatae: ut iam neq; uita dignus censeri debeat, qui contemptor est eorum bonorum, sine quibus nec ipse homo rectè ualere queat. Animus quo est corpori praestantior, hoc diligentiori studio curandus uenit. Curatur autem recta ratione potissimum, & uirtute, qua cum cognationem quandam habent omnes simul honestae artes. Quas non enim (ut de alijs taceam) illa nobis contulit in uita utilitates, quae à mensuratione terrae Geometria, Graeco nomine est uocata? Quid illius disciplinae studiosi, ad uitae humanae conseruationem, intentatum reliquerunt? Quid non ausi sunt in lucem producere illi? An non illorum inuenta sunt machinae illae bellicae, arietes, testudo & propugnacula, passimq; uniuersa alia quae in numero, pondere & mēsura creasse Deum ipsum fides Christiana recepit? Corporum coelestiū ordines, interualla, magnitudines, ad nostram notitiam, non'ne Geometrae attulerunt? Scripsit huiusmodi de rebus Archimedes Siculus ille multa iucunda, utilia & necessaria uitae: in quibus sunt de Sphaera & cylindro libri duo, copiosè equidem & felicissimè scripti. De circuli commensuratione, nihil aeque doctū tradiderunt ueteres, atq; apud hunc nostrum legere est autorem. Si enim circulus in Geometricis figuris est linea infinita, in qua nō est terminus à quo, (ut uocant:) nec terminus item ad quem, nēpe cuius principiū & finis est in quolibet puncto: quis, quaeso, ueterum ea de re Archimede nostro apertius uel scripsit, uel docuit? Quis terminos illos quatuor, quibus uniuersa Mathemata constant, pūctum, lineam, planiciem, & profundum, clarius oculis humanis unquam subiecit? De planis uero corporibus, solidisq;, de rotundis, conicis quoque, & his quae more pyramidum assurgunt: item de linea, superficie, & corpore, quibus tribus rebus omnis continetur magnitudo: & quia omne corpus tribus constat interuallis, longitudine, latitudine, crassitudine: deniq; de quadrata figura, quae in architectura principem locum, & iure sibi congruentem uendicat, cuiq; quasi proprium est, quòd est cu-

bus solidus & stabilis, firmiter insistens quaquauersum ceciderit, quia longitudinem latitudinem & profunditatem habeat. Atque de his omnibus, quis obsecro uel doctius, uel accuratius, uel diligentius nostro hoc Archimede tradidit? Sunt hodie non pauci, qui haec studia magno cum honore sequuntur, digniq; habentur, quibus uel statuae, ad immortalem studiorum suorum memoriam erigantur. quales potissimum nostra etiam secula uiderunt, Ioannem Stoffierum Sueuū, Ioannem Schoenerum Carolostadium amicum, & in Mathematis studijs praeceptorem unicè mihi dilectum: Bilibaldum quoq; Pyrkheymerum, uirum praeclaris rebus obeundis consultissimum: ac paulo ante haec tempora humanis exutum curis, Simonē Grynaeum, uirum ex aequo & doctum & pium, cuiq; hoc unum deerat, quòd in tanta diuinarū humanarūq; rerū cognitione minimè esset inflatus. Christianum quoq; Herlinum, Argentinensem Mathematicum, uirum longè doctissimum, hoc loco uel in primis ac iure celebrandum puto, quippe cui non solum bonarum artium studiosi, sed & ipsi Archimedis nostri manes plurimū debent, quòd in hosce libros, quo cùm emendatiores, tum elegantib. typis illustriores prodirent, studium haud leue impendit. Philippus Melanchthon uero hodie purioris literaturae, ac seuerioris philosophiae uindex, cum Ioachimo Camerario Franco, ac altero item ciue meo Ioachimo Rhetico, quid non salutaris operae insumit, ut quàm latissimè odorem suum diffundāt recta studia? De affine nostro Achille P. reconditarum artium studioso, in primis uero Astrologiae ac Medicinae suprà quàm dici queat perito, hoc parcius hic sum dicturus, quo scio illum esse modestiorem, quàm ut laudes nostras in se agnoscere uelit ullas, cum sit alioqui maximis laudibus dignus. Ioannem à Regiomonte olim ut extra communem mortalium aleam posuit natura, ita mundus hic, in Mathematicis disciplinis, maiorem an habuerit in aliquot retro saeculis, dubitare ausis. Is Rhomae agens, paulo post captā, ac crudelissimè direptam à Turcis Constantinopolitanā ciuitatem: cum iam literatae literae, bonis auspicijs, tanquā ex fuga & tempestate seruatae, in Italiam essent illatae: is, inquam ego, primae uocationi suae in Italiam ultro obsequens, ut amplissimam nominis sui famam est consequutus, ita ex Constantinopolitana clade ereptos Graecos libros & uidit plurimos, & descripsit non paucos articulis proprijs. Inter alia autem Archimedis libros, de sphaera & cylindro, de circuli dimensione, deq; alijs rebus non tam utilibus quàm necessarijs mortalium generi, ueluti palàm est legere in istis libris, quos Iacobus Cremonensis ùir ea tempestate duplici honore dignus, cum quòd Graecè doctus esset, tum quod linguarum commercio adiutus, hanc operam solus uideretur absoluere posse, in gratiam Nicolai v. Rom. Pont. iam pridem latinos fecerat: oblatos sibi ab amicis diligentissimè descripsit, adiectis non rarò in marginibus, Graecis (quod etiam Graecorum codicum facta fuisset fi-

bi copia) si quæ uisa fuissent uel uersa duriusculè, uel non admodum intelligenter descripta. Altera deinde suscepta in Italiam profectio, ut nõ fuit felix, ita nihil bonorum autorũ ad nos reportare potuit. Hominem enim exuens (non sine datuieneni suspicione) ad nos, ciues suos, quid referret exanimis? Sed hæc missa. Cæterum de quibus diximus, omnes haud illibenter Archimedi nostro sunt concessuri. Etenim quæ scripsit ille, in eo eminentiæ posita sunt loco, ut qui palmam artis præripere ei contendere ausit, facile inuenias neminem. Claruit autem Archimedes Syracusis ciuitate Siciliæ, Mathematicus & Geometra inter primos nobilis: à quo metiendi moles quascunq; & facilis & expedita inuenta est ratio. Quinetiam terræ globum huiusmodi inuenisse, memoriæ proditum est, ut dicere non dubitarit: Si alter foret terræ globus, se illum ad hunc suum pertracturum: uel hunc suum, ad illum alterum impulsurũ. Et uerè quidem. Nam ipse artis suæ fiducia, haud paruo tempore obsidionem M. Marcelli remoratus, & patriæ simul tutatus est muros. Placet etiam, in gratiã studiosorum, C. Plinij calculum hic subijcere, ita scribentis: Grande & Archimedi Geometricæ & machinalis scientiæ testimonium, M. Marcelli contigit interdicto, cum Syracusæ caperentur, ne uiolaretur unus, nisi fefellisset imperium militaris imprudentia. Et hæc quidem ad hunc modum dicta sint satis, dum illud quoq; ceu auctarij uice adiecerim: Secretiorem esse causam & uim liberalium studiorum, quàm ut à prophanis ingenijs percipi queat. Nam illa ex studijs nostris proueniens cùm laus, tum fructus & gloria, ad unam illam summam, & rerum omnium causam primam dirigenda ueniunt, cuius præuia bonitate fit ut interim dulces sint omnes illæ, in recta studia collocatæ curæ, labores, uigiliæ, dum mens nostra quàm fieri poterit perfectissimè ad cognitionem honestarum artium penetrare & possit & ualeat. Quibus uerò spreta sunt honesta illa studia nostra, illos neq; Numinis curam, neq; propriæ felicitatis rationem habere, iam ante meritò diximus. Nos autem qui æquiore iudicio quàm uulgus stolidum, expendimus omnia, finem nostrorum studiorum dicimus esse: primum ut Opificem rerũ, quàm fieri queat plenissimè cognoscamus: deinde ut donis illius eruditi, per hanc naturalium rerum cognitionem, animis quoque euadamus meliores ac puriores, dum ipsis tandem summis spiritibus reddamur quàm simillimi, gratia & misericordia Dei & Seruatoris nostri: qui & uos & unà uobiscum Rempub. uestram tueatur perpetuò. Amen. Ex Urbe uestra, ad Calend. Decembres. Anno MDXLIII.

Lib. 7. cap. 37.

ARCHIMEDES
de ſeipſo.

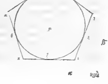
Ipſe Syracuſio ſurgens de ſanguine ciuis,
Corripior patriæ dulcis amore meæ.
Clarus eram ingenio, Siculis cantatus in oris,
Clara ſimul per me Siculis ora fuit.
Quin rerum domina ut patriam circundaret urbem,
Ars eſt Romanum noſtra morata ducem.
Sed bene quæ uetuit uictor, male corripit arma
Miles, & è multis me tulit auſa manus.
Ni reſpexiſſet miſeram Germania ſortem,
Me ſimul atq; meas commiſerata uices:
Abfuit inde parum mecum monumenta perirent,
Plurima, in extenſos uiuere digna dies.
Quòd ſupero tenebras, cœlo fruiturus aperto
Poſthac, Germanis debeo, non Siculis.

καλῶς ἔχειν μεταδιδόναι τοῖς οἰκείοις τῶν μαθημάτων, ἀποστέλλομέν σοι τὰς ἀποδείξεις ἀναγράψαντες, ὑπὲρ ὧν ἐξέσται τοῖς περὶ τὰ μαθήματα ἀναστρεφομένοις ἐπισκέψασθαι. ἔρρωσο.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ ΚΑΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ, ΒΙΒΛΙΟΝ Α.

ΓΡΑΦΟΝΤΑΙ πρῶτον τὰ ἀξιώματα, καὶ τὰ λαμβανόμενα εἰς τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν. εἰσί τινες ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλαι γραμμαὶ πεπερασμέναι, αἳ τῶν τὰ πέρατα ἐπιζευγνυουσῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἤτοι ὅλαι ἐπὶ τὰ αὐτά εἰσιν, ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα. ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὴ κοίλην καλῶ τὴν τοιαύτην γραμμὴν, ἐν ᾗ ἐὰν δύο σημείων λαμβανομένων ὁποιωνοῦν, αἱ μεταξὺ τῶν σημείων εὐθεῖαι, ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσι τῆς γραμμῆς, ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ, τινὲς δὲ κατ' αὐτῆς, ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μηδεμία. ὁμοίως δὴ καὶ ἐπιφάνειαι τινές εἰσι πεπερασμέναι, αὗται μὲν οὐκ ἐν ἐπιπέδῳ, τὰ δὲ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἐπιπέδῳ. τοῦ ἐπιπέδου ἐν ᾧ τὰ πέρατα ἔχουσιν, ἤτοι ὅλαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἔσονται, ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα. ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὴ κοίλας καλῶ τὰς τοιαύτας ἐπιφανείας, ἐν αἷς ἂν δύο σημείων λαμβανομένων, αἱ μεταξὺ τῶν σημείων εὐθεῖαι, ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσι τῆς ἐπιφανείας, ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ, τινὲς δὲ κατ' αὐτῶν, ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μηδεμία. τομέα δὲ στερεὸν καλῶ, ἐπειδὰν σφαῖραν κῶνος τέμνῃ, κορυφὴν ἔχων πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας, τὸ ἐμπεριεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἐντὸς τοῦ κώνου. ῥόμβον δὲ καλῶ στερεὸν, ἐπειδὰν δύο κῶνοι τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντες, τὰς κορυφὰς ἔχωσιν ἐφ' ἑκάτερα τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως, ὅπως οἱ ἄξονες αὐτῶν ἐπ' εὐθείας ὦσι κείμενοι, τὸ ἐξ ἀμφοῖν τοῖν κώνοιν συγκείμενον στερεὸν σχῆμα. λαμβάνω δὲ ταῦτα, τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν. τῶν δὲ ἄλλων γραμμῶν ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ οὖσαι τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχωσιν ἀνίσους εἶναι τὰς τοιαύτας. ἐπειδὰν ὦσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ ἤτοι ὅλη περιλαμβάνηται ἡ ἑτέρα αὐτῶν ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἐπιφανείας, καὶ τῆς εὐθείας τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐτῇ, ἢ τινὰ μὲν περιλαμβάνηται, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχῃ, καὶ ἐλάσσονα εἶναι τὴν περιλαμβανομένην. ὁμοίως καὶ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν, ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ τὰ πέρατα ἔχωσιν, ἐλάσσονα εἶναι τὴν ἐπίπεδον. τῶν δὲ ἄλλων ἐπιφανειῶν, καὶ τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν, ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ τὰ πέρατα ᾖ, ἀνίσους εἶναι τὰς τοιαύτας. ἐπειδὰν ὦσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ ἤτοι ὅλη περιλαμβάνηται ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἡ ἑτέρα ἐπιφάνεια, καὶ τῆς ἐπιπέδου τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐτῇ, ἢ τινὰ μὲν περιλαμβάνηται, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχῃ, καὶ ἐλάσσονα εἶναι τὴν περιλαμβανομένην. ἔτι δὲ τῶν ἀνίσων γραμμῶν, καὶ τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν, καὶ τῶν ἀνίσων στερεῶν, τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος ὑπερέχειν τοιούτῳ, ὃ συντιθέμενον ἑαυτῷ ἑαυτῷ δυνατόν ἐστιν ὑπερέχειν παντὸς τοῦ προτεθέντος τῶν πρὸς ἄλληλα λεγομένων. τούτων δὲ ὑποκειμένων, ἐὰν εἰς κύκλον πολύγωνον ἐγγραφῇ, φανερὸν ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ ἐγγραφέντος πολυγώνου ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. ἑκάστη γὰρ τῶν τοῦ πολυγώνου πλευρῶν ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, τῆς ὑπὸ τῆς αὐτῆς ἀποτεμνομένης.

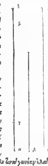
ΕΑΝ περὶ κύκλον πολύγωνον περιγραφῇ, ἡ τοῦ περιγραφέντος πολυγώνου περίμετρος, μείζων ἐστὶ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου. περὶ γὰρ κύκλον πολύγωνον περιγεγράφθω τὸ ὑποκείμενον. λέγω, ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου μείζων ἐστὶ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου. ἐπεὶ γὰρ συναμφότερος ἡ βαλ μείζων ἐστὶ τῆς βλ περιφερείας, διὰ τὸ τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαν περιλαμβάνειν τὴν περιφέρειαν, ὁμοίως καὶ συναμφότερος μὲν ἡ δγ, γβ, τῆς δβ. συναμφότερος δὲ ἡ λκ, κθ, τῆς λθ. συναμφότερος δὲ ἡ ζηθ, τῆς ζθ. ἔτι δὲ συναμφότερος ἡ δε, εζ, τῆς δζ. ὅλη ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου μείζων ἐστὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.



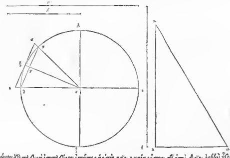
ΔΥο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων, δυνατόν ἐστιν εὑρεῖν δύο εὐθείας ἀνίσους, ὥστε τὴν μείζονα εὐθεῖαν πρὸς τὴν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἐλάσσονα, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. ἔστω δύο μεγέθη ἄνισα, τὰ αβ, δ.

α β

καὶ ἔστω μεῖζον τὸ α β. λέγω, ὅτι δυνατόν ἐστι δύο εὐθείας ἀνίσους εὑρεῖν, τὸ εἰρημένον ἐπίταγμα ποιούσας. κείσθω δὴ τὸ δεύτερον τοῦ πρώτου τῶν Εὐκλείδου, τῷ δ ἴσον τὸ β γ, καὶ κείσθω τις εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ζ η. τὸ δὴ γ α ἑαυτῷ ἐπισυντιθέμενον ὑπερέξει τοῦ δ. πεπολλαπλασιάσθω οὖν, καὶ ἔστω τὸ α θ. καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ α θ τοῦ α γ, τοσαπλάσιος ἔστω ἡ ζ η τῆς η ε. ἔστιν ἄρα ὡς θ α πρὸς α γ, οὕτως ἡ ζ η πρὸς η ε. καὶ ἀνάπαλίν ἐστιν ὡς ἡ ε η πρὸς η ζ, οὕτως τὸ α γ πρὸς α θ. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ α θ τοῦ δ, τουτέστι τοῦ γ β, τὸ ἄρα γ α πρὸς τὸ α θ λόγον ἐλάσσονα ἔχει, ἤπερ τὸ γ α πρὸς γ β. καὶ συνθέντι ἡ ε ζ ἄρα πρὸς ζ η ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ α β πρὸς β γ (διάλημμα) ἴσον δὲ τὸ β γ τῷ δ. ἡ ε ζ ἄρα πρὸς ζ η ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ α β πρὸς τὸ δ. εὑρημέναι εἰσὶν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, ποιοῦσαι τὸ (ἴσον) ἐπίταγμα, τουτέστι τὴν μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἐλάσσονα, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον.



γ Δύο μεγέθων ἀνίσων δοθέντων, καὶ κύκλου, δυνατόν ἐστιν εἰς τὸν κύκλον πολύγωνον ἐγγράψαι, καὶ ἄλλο περιγράψαι, ὅπως ἡ τοῦ περιγραφομένου πολυγώνου πλευρὰ, πρὸς τὴν τοῦ ἐγγραφομένου πολυγώνου πλευρὰν, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. ἔστω τὰ δοθέντα δύο μεγέθη τὰ α β, ὁ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ ὑποκείμενος. λέγω οὖν, ὅτι δυνατόν ἐστι ποιεῖν τὸ ἐπίταγμα. εὑρήσθωσαν δὲ δύο εὐθεῖαι αἱ θ, κ λ, ὧν μείζων ἔστω ἡ θ. ὥστε τὴν θ πρὸς τὴν κ λ, ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλαττον. καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ λ τῇ κ λ πρὸς ὀρθὰς ἡ λ μ, καὶ ἀπὸ τοῦ κ τῇ θ ἴση κατήχθω ἡ κ μ, δυνατὸν γὰρ τοῦτο. καὶ ἤχθωσαν τοῦ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ γ ε, δ ζ, τέμνοντες οὖν τὴν ὑπὸ τῶν δ η γ γωνίαν δίχα, καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα, καὶ ἀεὶ τοῦτο ποιοῦντες λείψομεν τινὰ γωνίαν ἐλάσσονα ἢ διπλασίαν τῆς ὑπὸ λ κ μ. λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ ὑπὸ ν η γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ν γ. ἡ ἄρα ν γ πο-

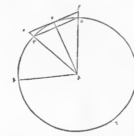


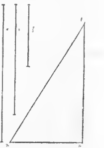
λυγώνου ἐστὶ πλευρὰ ἰσοπλεύρου. ἐπείπερ ἡ ὑπὸ ν η γ γωνία μετρεῖ τὴν ὑπὸ δ η γ ὀρθὴν οὖσαν, καὶ ἡ ν γ ἄρα περιφέρεια μετρεῖ τὴν γ δ, τέταρτον οὖσαν κύκλου· ὥστε καὶ τὸν κύκλον μετρεῖ. πολυγώνου ἄρα ἐστὶ πλευρὰ ἰσοπλεύρου ἡ γ ν. φανερὸν γάρ ἐστι τοῦτο. καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ γ η ν γωνία δίχα τῇ η ξ εὐθείᾳ. καὶ ἀπὸ τοῦ ξ ἐφαπτέσθω τοῦ κύκλου ἡ ο ξ π. καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ η ν π, η γ ο. ὥστε καὶ ἡ π ο πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον, καὶ ἰσοπλεύρου, φανερὸν ὅτι καὶ ὁμοίου τῷ ἐγγραφομένῳ, οὗ πλευρὰ ἡ ν γ. ἐπεὶ δὲ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασία ἡ ὑπὸ ν η γ τῆς ὑπὸ λ κ μ, διπλασία δὲ τῆς ὑπὸ τ η γ, ἐλάσσων ἐστὶν ἄρα ἡ ὑπὸ τ η γ τῆς ὑπὸ λ κ μ. καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς λ τ. ἡ ἄρα μ κ πρὸς λ κ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ η πρὸς η τ. ἴση δὲ ἡ γ η τῇ η ξ.

τῆς ν ξ. ὥστε ἡ ν ξ πρὸς ν τ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τουτέστιν ἡ π ο πρὸς ν γ. ἢ ἡ μ κ πρὸς κ λ. ἔτι δὲ ἡ κ μ πρὸς κ λ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ α πρὸς τὸ β. καὶ ἔστι μὲν π ο πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου πολυγώνου, ἡ δὲ γ ν τοῦ ἐγγραφομένου· ὅπερ προέκειτο εὑρεῖν.

δ

Πάλιν δύο μεγεθῶν ἀνίσων ὄντων, καὶ τομέως, δυνατόν ἐστι περὶ τὸν τομέα πολύγωνον περιγράψαι, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι. ὥστε τὴν τοῦ περιγεγραμμένου πλευρὰν, πρὸς τὴν ἐγγεγραμμένου πλευρὰν, ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. ἔστω γὰρ πάλιν δύο





μεγέθη ἄνισα τὰ ε ζ. ὧν μεῖζον ἔστω τὸ ε, κύκλος δέ τις ὁ α β γ, κέντρον ἔχων τὸ δ. καὶ πρὸς τὸ δ τομεὺς συνεστάτω ὁ α δ β. δεῖ δὴ περιγράψαι, καὶ ἐγγράψαι πολύγωνον περὶ τὸν α β δ τομέα, ἴσας ἔχον τὰς πλευρὰς χωρὶς τῶν β δ α, ὅπως γένηται τὸ ἐπίταγμα. εὑρήσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι αἱ η θ κ ἄνισαι, καὶ μείζων ἡ η. ὥστε τὴν η πρὸς τὴν θ κ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. δυνατὸν γὰρ τοῦτο. καὶ ἀπὸ τοῦ θ ὁμοίως ἀχθείσης πρὸς ὀρθὰς τῇ θ κ τῆς θ λ, προσβεβλήσθω τῇ η ἴση ἡ κ λ. δυνατὸν γάρ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ η τῆς θ κ, τεμνομένης δὴ τῆς ὑπὸ τῶν α δ β γωνίας δίχα, καὶ τῆς ἡμισείας δίχα, καὶ ἀεὶ τούτου γινομένου λειφθήσεταί τις γωνία, ἐλάσσων οὖσα ἢ διπλασία τῆς ὑπὸ λ η θ. λελείφθω οὖν ἡ ὑπὸ α δ μ. ἡ α μ οὖν γὰρ πολυγώνου πλευρὰ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον. καὶ ἐὰν τέμωμεν τὴν ὑπὸ α δ μ γωνίαν δίχα τῇ δ ν, καὶ ἀπὸ τοῦ ν, καὶ ἀγάγωμεν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου τὴν ξ ο, αὕτη πλευρὰ ἔσται τοῦ πολυγώνου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον, ὁμοίως τῷ εἰρημένῳ. καὶ ὁμοίως τοῖς προειρημένοις ἡ ξ ο πρὸς τὴν α μ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ε μέγεθος πρὸς τὸ ζ.

ε

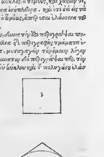
Κύκλου δοθέντος καὶ δύο μεγεθῶν ἀνίσων, περιγράψαι περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι. ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. ἐκκείσθω κύκλος ὁ α, καὶ δύο μεγέθη ἄνισα τὰ ε ζ. καὶ μεῖζον τὸ ε. δεῖ οὖν πολύγωνον ἐγγράψαι εἰς τὸν κύκλον. καὶ ἄλλο περιγράψαι, ἵνα γένηται τὸ ἐπιταχθέν. λαμβάνω γὰρ δύο εὐθείας ἀνίσους τὰς γ δ. ὧν μείζων ἔστω ἡ γ. ὥστε τὴν γ πρὸς τὴν δ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ ε πρὸς τὸ ζ. καὶ τῶν γ δ μέσης ἀνὰ λόγον ληφθείσης τῆς η, μείζων ἄρα καὶ ἡ γ τῆς η. περιγεγράφθω δὴ περὶ κύκλον πολύγωνον, καὶ ἄλλο ἐγγεγράφθω, ὥστε τὴν τοῦ περιγρα-



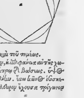
φέντος πολυγώνου πλευρὰν, πρὸς τὴν τοῦ ἐγγραφέντος, ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὴν γ πρὸς τὴν η, καθὼς ἐμάθομεν. διὰ τοῦτο δὴ καὶ ὁ διπλάσιος λόγος τοῦ διπλασίου ἐλάσσων ἐστί. καὶ τῆς μὲν τῆς πλευρᾶς πρὸς τὴν πλευρὰν, διπλάσιός ἐστιν ὁ τοῦ πολυγώνου πρὸς τὸ πολύγωνον· ὅμοια γάρ. τῆς δὲ γ πρὸς τὴν η, ὁ τῆς γ πρὸς τὴν δ. καὶ τὸ περιγραφὲν ἄρα πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ πρὸς τὴν δ, πολλῷ ἄρα καὶ τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ε πρὸς τὸ ζ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων, καὶ τομέως, δυνατόν ἐστι περὶ τὸν τομέα πολύγωνον περιγράψαι, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι ὅμοιον αὐτῷ, ἵνα τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. φανερὸν δὲ καὶ τοῦτο, ὅτι ἐὰν δοθῇ κύκλος, ἢ τομεὺς, καὶ χωρίον τι, δυνατόν ἐστιν ἐγγράφοντα εἰς τὸν κύκλον, ἢ τὸν τομέα πολύγωνα ἰσόπλευρα. καὶ ἔτι ἀεὶ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα, λείπειν τινὰ τμήματα τοῦ κύκλου ἢ τομέως, ἅπερ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ προκειμένου χωρίου ταῦτα γὰρ ἐν τῇ στοιχειώσει παραδίδοται.

ε Δεικτέον δὲ, ὅτι καὶ κύκλου δοθέντος, ἢ τομέως καὶ χωρίου, δυνατόν ἐστι περιγράψαι πολύγωνον περὶ τὸν κύκλον, ἢ τομέα, ὥστε τὰ περιλειπόμενα τῆς περιγραφῆς τμήματα ἐλάσσονα εἶναι τοῦ δοθέντος χωρίου. ἔστω γὰρ ἐπὶ κύκλου δείξαντα, μεταγαγεῖν τὸν ὅμοιον λόγον καὶ ἐπὶ τοῦ τομέως. δεδόσθω κύκλος ὁ α, καὶ χωρίον τι τὸ β. δυνατὸν δὴ περιγράψαι περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον, ὥστε τὰ ἀπολειφθέντα τμήματα μεταξὺ τοῦ κύκλου καὶ τοῦ πολυγώνου ἐλάσσονα εἶναι τοῦ β χωρίου. καὶ γὰρ ὄντων δύο μεγεθῶν ἀνίσων, μείζονος μὲν συναμφοτέρου τοῦ χωρίου καὶ τοῦ κύκλου, ἐλάσσονος δὲ τοῦ κύκλου, περιγεγράφθω περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον, καὶ ἄλλο ἐγγεγράφθω, ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ εἰρημένον μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. τοῦτο δὴ τὸ περιγραφόμενον πολύγωνον ἐστὶν οὗ τὰ περιλείμματα ἔσται ἐλάσσονα τοῦ προτεθέντος χωρίου τοῦ β. εἰ γὰρ τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ συναμφότερον, ὅ τε κύκλος καὶ τὸ β χωρίον πρὸς αὐτὸν τὸν κύκλον· τοῦ δὲ ἐγγραφομένου μείζων ὁ κύκλος, πολλῷ μᾶλλον τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ συναμφότερον, ὅ τε κύκλος καὶ τὸ β χωρίον πρὸς αὐτὸν τὸν κύκλον. καὶ διελόντι ἄρα τὰ ἀπολείμματα τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ β χωρίον πρὸς τὸν κύκλον. ἐλάσσονα ἄρα τὰ ἀπολείμματα τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου τοῦ β χωρίου, ἤ οὕ. ἐπεὶ τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ συναμφότερον, ὅ τε κύκλος καὶ τὸ β χωρίον πρὸς τὸν κύκλον. διὰ τοῦτο δὴ ἔλασσον ἔσται τὸ περιγραφὲν συναμφοτέρου. ὥστε καὶ ἄλλα τὰ περιλείμματα ἐλάσσονα ἔσται τοῦ χωρίου τοῦ β. ὁμοίως δὲ καὶ τοῦ τομέως.





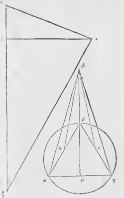
ζ Ἐὰν ἐν ἰσοσκελεῖ κώνῳ πυραμὶς ἐγγραφῇ, ἰσόπλευρον ἔχουσα βάσιν, ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς χωρὶς τῆς βάσεως, ἴση ἐστὶ τριγώνῳ, βάσιν μὲν ἔχοντι ἴσην τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως. ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ μίαν πλευρὰν τῆς βάσεως κάθετον ἀγομένην. ἔστω κῶνος ἰσοσκελὴς, οὗ βάσις ὁ αβγ κύκλος, καὶ εἰς αὐτὸν ἐγγεγράφθω πυραμὶς ἰσόπλευρον ἔχουσα τρίγωνον τὸ αβγ. λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ τριγώνῳ. ἐπεὶ γὰρ ἰσοσκελὴς ὁ κῶνος, καὶ ἰσόπλευρος ἡ βάσις τῆς πυραμίδος, τὰ ὕψη τῶν περιεχόντων τριγώνων τὴν πυραμίδα, ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις. καὶ βάσιν μὲν ἔχει τὰ τρίγωνα, τὰς αβ, βγ, γα. ὕψος δὲ, τὸ εἰρημένον. ὥστε τὰ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην ταῖς αβ, βγ, γα. ὕψος δὲ τὴν εἰρημένην εὐθεῖαν, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος, χωρὶς τοῦ αβγ τριγώνου.



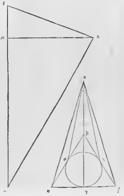
ΣΑΦΕΣΤΕΡΟΝ ΑΛΛΩΣ Η ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστω κῶνος ἰσοσκελὴς, οὗ βάσις μὲν ὁ αβγ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ

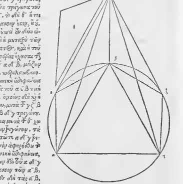
δ σημεῖον. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν κῶνον πυραμίς, βάσιν μὲν ἔχουσα ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ αβγ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δα, δγ, δβ. λέγω ὅτι τὰ αδβ, αδγ, βδγ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τριγώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ περιμέτρῳ τοῦ αβγ τριγώνου, ἡ δὲ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος, ἴση τῇ καθέτῳ τῇ ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὴν βγ ἀγομένῃ. ἤχθωσαν γὰρ κάθετοι αἱ δκ, δλ, δμ. αὗται ἄρα ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ κείσθω τρίγωνον τὸ εζη, ἔχον τὴν μὲν εζ βάσιν τῇ περιμέτρῳ τοῦ αβγ τριγώνου ἴσην. τὴν δὲ ηθ κάθετον τῇ δλ ἴσην. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν βγ, δλ διπλάσιόν ἐστι τοῦ δβγ τριγώνου· ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν αβ, δκ διπλάσιον τοῦ αβδ τριγώνου. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν αγ, δμ διπλάσιον τοῦ αδγ τριγώνου, τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ αδγ τριγώνου· τουτέστι τῆς εζ, καὶ τῆς δλ, τουτέστι τῆς ηθ, διπλάσιον τῶν αδβ, βδγ, αδγ τριγώνων. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ εζ, ηθ διπλάσιον τοῦ εζη τριγώνου, ἴσον ἄρα τὸ εζη τρίγωνον τοῖς αδβ, βδγ, αδγ τριγώνοις.



Ἐὰν περὶ κῶνον ἰσοσκελῆ πυραμὶς περιγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως, ἴση ἐστὶ τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως, ὕψος δὲ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου. ἔστω κῶνος οὗ βάσις ὁ αβγ κύκλος, καὶ πυραμὶς περιγεγράφθω ὥστε τὴν βάσιν αὐτῆς, τουτέστι τὸ δεζ πολύγωνον περιγεγραμμένον περὶ τὸν αβγ κύκλον εἶναι. λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ τριγώνῳ. ἐπεὶ γὰρ ὁ ἄξων τοῦ κώνου ὀρθός ἐστι πρὸς τὴν βάσιν, τουτέστι πρὸς τὸν αβγ κύκλον, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι κάθετοί εἰσιν ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας. ἔσονται ἄρα καὶ αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύμεναι κάθετοι ἐπὶ τὰς δε, ζε, ζδ, αἱ ηα, ηβ, ηγ. ἄρα αἱ εἰρημέναι κάθετοι ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις· πλευραὶ γάρ εἰσι τοῦ κώνου. κείσθω δὴ τὸ τρίγωνον τὸ θκλ, ἴσην ἔχον τὴν μὲν θκ τῇ περιμέτρῳ τοῦ δεζ τριγώνου. τὴν δὲ λμ κάθετον ἴσην τῇ ηα. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὑπὸ δε, αη διπλάσιόν ἐστι τοῦ εδη τριγώνου. τὸ δὲ ὑπὸ δζ, ηβ διπλάσιόν ἐστι τοῦ δζη τριγώνου, τὸ δὲ ὑπὸ εζ, γη διπλάσιον ἐστὶ τοῦ εηζ τριγώνου, ἔστιν ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς θκ καὶ τῆς αη, τουτέστι τῆς μλ, διπλάσιον τῶν εδη, ζδη, εηζ τριγώνων. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν θκ, λμ, διπλάσιον τοῦ λκθ τριγώνου. διὰ ταῦτα δὴ ἴση ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως, τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι ἴσην τῇ περιμέτρῳ τοῦ δεζ. ὕψος δὲ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου.



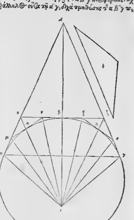
θ Ἐὰν κώνου τινὸς ἰσοσκελοῦς εἰς τὸν κύκλον, ὅς ἐστι βάσις τοῦ κώνου, εὐθεῖα γραμμὴ ἐμπέσῃ, ἀπὸ δὲ τῶν περάτων αὐτῆς εὐθεῖαι γραμμαὶ ἀχθῶσιν ἐπὶ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου, τὸ περιληφθὲν τρίγωνον, ὑπό τε τῆς ἐμπεσούσης καὶ τῶν ἐπιζευχθεισῶν ἐπὶ τὴν κορυφὴν, ἔλασσον ἔσται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, τῆς μεταξὺ τῶν ἐπὶ τὴν κορυφὴν ἐπιζευχθεισῶν. ἔστω κώνου ἰσοσκελοῦς βάσις ὁ αβγ κύκλος. κορυφὴ δὲ τὸ δ. καὶ διήχθω τις εἰς αὐτὸν εὐθεῖα ἡ αγ. καὶ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὰ α γ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, δγ. λέγω ὅτι τὸ αδγ τρίγωνον ἔλασσόν ἐστι τῆς ἐπιφανείας τῆς κωνικῆς, τῆς μεταξὺ τῶν αδγ. τετμήσθω ἡ αβγ περιφέρεια δίχα κατὰ τὸ β. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αβ, γβ, δβ. ἔσται δὴ τὰ αβδ, βγδ, τρίγωνα μείζονα τοῦ αδγ τριγώνου, ᾧ δὴ ὑπερέχει τὰ εἰρημένα τρίγωνα τοῦ αδγ τριγώνου, ἔστω τὸ θ. τὸ δὴ θ ἤτοι τῶν αβ, βγ τμημάτων ἔλασσόν ἐστιν, ἢ οὔ. ἔστω μὴ ἔλασσον πρότερον. ἐπεὶ οὖν δύο εἰσὶν ἐπιφάνειαι, ἥ τε κωνικὴ ἡ μεταξὺ τῶν αδβ, μετὰ τοῦ αεβ τμήματος, καὶ ἡ τοῦ αδβ τριγώνου, τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαι τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου τοῦ αδβ, μείζων ἔσται ἡ περιλαμβάνουσα τῆς περιλαμβανομένης, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν αδβ μετὰ τοῦ αεβ τμήματος, τοῦ αβδ τριγώνου. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ μεταξὺ τοῦ δβγ τριγώνου, μετὰ τοῦ γζβ τμήματος, μείζων ἐστὶ τοῦ βδγ τριγώνου. ὅλη ἄρα ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια μετὰ τοῦ θ χωρίου ἐστὶ μείζων τῶν εἰρημένων τριγώνων. τὰ δὲ εἰρημένα τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε αδγ τριγώνῳ, καὶ τῷ θ χωρίῳ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ θ χωρίον. λοιπὴ ἄρα ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἡ μεταξὺ τῶν αδβ, μείζων ἐστὶ τοῦ αδγ τριγώνου. ἔστω δὴ τὸ θ ἔλασσον τῶν αβ, βγ τμημάτων. τέμνοντες δὴ τὰς αβ, βγ περιφερείας δίχα, καὶ τὰς ἡμισείας αὐτῶν δίχα, λείψομεν τμήματα ἐλάσσονα ὄντα τοῦ θ χωρίου. λελείφθω τὰ ἐπὶ τῶν αε, εβ, βζ, ζγ εὐθειῶν. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δε, δζ. πάλιν τοίνυν κατὰ τὰ αὐτὰ, ἡ μὲν ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἡ μεταξὺ τῶν αδε, μετὰ τοῦ ἐπὶ τῆς αε τμήματος, μείζων ἐστὶ τοῦ αδε τριγώνου. ἡ δὲ μεταξὺ τοῦ εδβ μετὰ τοῦ ἐπὶ τῆς εβ τμήματος, μείζων ἐστὶ τοῦ εδβ τριγώνου. ἡ ἄρα ἐπιφάνεια, ἡ μεταξὺ τῶν αδβ μετὰ τῶν αε, εβ τμημάτων, μείζων ἐστὶ τῶν αδε, εβδ τριγώνων. ἐπεὶ δὲ τὰ αεδ, δεβ τρίγωνα μείζονα ἐστὶ τοῦ αβδ τριγώνου, καθὼς δέδεικται, πολλῷ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου, ἡ μεταξὺ τῶν αδβ, μετὰ τῶν ἐπὶ τῶν αε, εβ τμημάτων, μείζων ἐστὶ τοῦ αδβ τριγώνου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν δβγ, μετὰ τῶν ἐπὶ τῶν βζ, ζγ, μείζων ἐστὶ τοῦ βδγ τριγώνου. ὅλη ἄρα ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν αδγ, μετὰ τῶν εἰρημένων τμημάτων μείζων ἐστὶ τῶν αβδ, δβγ τριγώνων. ταῦτα δέ ἐστιν ἴσα τῷ αδγ τριγώνῳ, καὶ τὸ θ χωρίῳ, ὧν τὰ εἰρημένα τμήματα ἐλάσσονα τοῦ θ χωρίου. λοιπὴ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν αδγ, μείζων ἐστὶ τοῦ αδγ τριγώνου.



ι Ἐὰν ἐπιψαύουσαι ἀχθῶσι τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ κώνου ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι τῷ κύκλῳ, καὶ συμπίπτωσιν ἀλλήλαις, ἀπὸ δὲ τῶν ἁφῶν καὶ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου εὐθεῖαι ἀχθῶσι, τὰ περιεχόμενα τρίγωνα ὑπὸ τῶν ἐπιψαυουσῶν καὶ τῶν ἐπὶ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν μείζονά ἐστι τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας, τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν. ἔστω κώνου οὗ βάσις μὲν ὁ αβγ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ ε σημεῖον. καὶ τοῦ αβγ κύκλου ἐφαπτόμεναι ἤχθωσαν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, αἱ αδ, γδ, καὶ ἀπὸ τοῦ ε σημείου ὅ ἐστι κορυφὴ τοῦ κώνου ἐπὶ τὰ α, δ, γ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εα, εδ, εγ. λέγω δὲ, ὅτι τὰ αδε, δεγ τρίγωνα

μείζονα

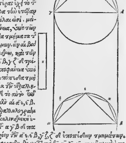
μείζονα ἐστὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν αε, γε εὐθειῶν, καὶ τῆς αβγ περιφερείας. ἤχθω γὰρ ἡ κβζ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, καὶ παράλληλος οὖσα τῇ αγ, δίχα τμηθείσης τῆς αβγ περιφερείας κατὰ τὸ β. καὶ ἀπὸ τῶν κ, ζ ἐπὶ τὸ ε ἐπεζεύχθωσαν αἱ κε, ζε. καὶ ἐπεὶ μείζους εἰσὶν αἱ κδ, δζ τῶν κζ, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ κα, ζγ. ὅλαι ἄρα αἱ αδ, δγ μείζους εἰσὶ τῶν ακ, κζ, ζγ. καὶ ἐπεὶ αἱ αε, εβ, εγ πλευραί εἰσι τοῦ κώνου, ἴσαι εἰσί, διὰ τὸ ἰσοσκελῆ εἶναι τὸν κῶνον. ὁμοίως δὲ καὶ κάθετοί εἰσιν, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ λήμματι, τὰ δὲ ὑπὸ τῶν καθέτων καὶ τῶν βάσεων τῶν ακε, κεζ, ζεγ τριγώνων. εἰσὶ γὰρ αἱ μὲν ακ, κζ, ζγ ἐλάσσους τῶν γδ, δα. τὰ δὲ ὕψη αὐτῶν ἴσα. φανερὸν γὰρ, ὅτι ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ὀρθοῦ κώνου ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν τῆς βάσεως ἐπιζευγνυμένη κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην. ὧ δὴ μείζονα ἐστὶ τὰ αεδ, δεγ τρίγωνα, τῶν αεκ, κεζ, ζεγ τριγώνων. ἔστω τὸ θ χωρίον. τὸ δὴ θ χωρίον, ἤτοι ἔλαττον ἐστὶ τῶν περιλημμάτων τῶν ακβ, βζγ, ἢ οὐκ ἔλαττον. ἔστω πρότερον οὐκ ἔλαττον. ἐπεὶ οὖν εἰσὶν ἐπιφάνειαι σύνθετοι, ἥ τε τῆς πυραμίδος τῆς ἐπὶ βάσεως τοῦ κα, γζ τραπεζίου, κορυφὴν ἔχουσα τὸ ε. καὶ ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἡ μεταξὺ τῶν αε, εγ μετὰ τοῦ αβγ τμήματος. καὶ πέρας ἔχουσι, τὴν αὐτὴν περίμετρον τοῦ αεγ τριγώνου, δῆλον ὡς ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τοῦ αεγ τριγώνου, μείζων ἐστὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας μετὰ τοῦ τμήματος τοῦ αβγ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ αβγ τμῆμα. λοιπὰ ἄρα τὰ τρίγωνα τὰ ακε, κεζ, ζεγ, μετὰ τῶν ακβ, βζγ περιλημμάτων, μείζονα ἐστὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν αε, εγ. τῶν δὲ ακβ, βζγ περιλημμάτων οὐκ ἔλασσόν ἐστι τὸ θ χωρίον, πολλῷ ἄρα τὰ αεκ, κεζ, ζεγ τρίγωνα μετὰ τοῦ θ, μείζονα ἔσται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν αε, εγ. ἀλλὰ τὰ ακε, κεζ, ζεγ τρίγωνα μετὰ τοῦ θ, ἐστὶ τὰ αεδ, δεγ τρίγωνα. τὰ ἄρα αεδ, δεγ τρίγωνα, μείζονα ἔσται τῆς εἰρημένης κωνικῆς ἐπιφανείας. ἔστω δὴ τὸ θ ἔλασσον τῶν περιλημμάτων, ἀεὶ δὴ περιγράφοντες πολύγωνα περὶ τὰ τμήματα, ὁμοίως δίχα τεμνομένων τῶν περιλειπομένων περιφερειῶν, καὶ ἀγομένων ἐφαπτομένων, λείψομεν τινὰ περιλήμματα, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ θ χωρίου. λελείφθω καὶ ἔστω τὰ αμκ, κνβ, βξλ, λογ ἐλάσσονα ὄντα τοῦ θ χωρίου, καὶ ἐπεζεύχθω ἐπὶ τὸ ε. πάλιν φανερὸν, ὅτι τὰ ακε, κεζ, ζεγ τρίγωνα, τῶν αεμ, μεν, νεξ, ξεο, οεγ τριγώνων ἔσται μείζονα. αἵ τε γὰρ βάσεις τῶν βάσεων εἰσὶ μείζους, τὸ δὲ ὕψος ἴσον. ἔτι δὲ πάλιν ὁμοίως μείζονα ἔχει ἐπιφάνειαν ἡ πυραμὶς, ἡ βάσιν μὲν ἔχουσα τὸ αμνξογ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ ε, χωρὶς τοῦ αεγ τριγώνου, τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν αε, εγ, μετὰ τοῦ αβγ τμήματος. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ αβγ τμῆμα, λοιπὰ ἄρα τὰ αεμ, μεν, νεξ, ξεο, οεγ τρίγωνα, μετὰ τῶν αμκ, κνβ, βξλ, λογ περιλημμάτων μείζονα ἔσται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν αε, εγ. ἀλλὰ τῶν μὲν εἰρημένων περιλημμάτων μεῖζόν ἐστι τὸ θ χωρίον. τῶν δὲ αεμ, μεν, νεξ, ξεο, οεγ τριγώνων μείζονα ἐδείχθη τὰ αεκ, κεζ, ζεγ τρίγωνα. πολλῷ ἄρα τὰ αεκ, κεζ, ζεγ τρίγωνα μετὰ τοῦ θ χωρίου, τουτέστι τὰ αδε, δεγ τρίγωνα, μείζονα ἐστὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, τῆς μεταξὺ τῶν αε, εγ εὐθειῶν.



Ἐὰν ἐν ἐπιφανείᾳ ὀρθοῦ κυλίνδρου δύο εὐθεῖαι ὦσιν, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου, ἡ μεταξὺ τῶν εὐθειῶν, μείζων ἐστὶ τοῦ παραλληλογράμμου, τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τῶν ἐν τῇ ἐπιφα- ια

νεί-

νίας τοῦ κυλίνδρου εὐθειῶν, καὶ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰ πέρατα αὐτῶν. ἔστω κύλινδρος ὀρθός, οὗ βάσις μὲν ὁ α β κύκλος ἀπεναντίον δὲ ὁ γ δ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α γ, β δ. λέγω ὅτι ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν, μείζων ἐστὶ τοῦ α γ, β δ παραλληλογράμμου. τετμήσθω γὰρ ἑκατέρα τῶν α β, γ δ περιφερειῶν δίχα κατὰ τὰ ε ζ σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α ε, ε β, γ ζ, ζ δ. καὶ ἐπεὶ αἱ α ε, ε β τῆς α β μείζους εἰσί, καὶ ἐστὶν ἰσοϋψῆ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπ' αὐτῶν, μείζονα οὖν ἐστὶ τὰ παραλληλόγραμμα, ὧν αἱ βάσεις μέν αἱ α ε, ε β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου, τοῦ α β, γ δ παραλληλογράμμου. τίνι ἄρα μείζων ἐστίν, ἔστω τῷ κ χωρίῳ. τὸ δὲ κ χωρίον ἤτοι ἔλασσον τῶν α ε, ε β, γ ζ, ζ δ ἐπιπέδων ἐστὶ τμημάτων. ἢ οὐκ ἔλασσον. ἔστω πρότερον μὴ ἔλασσον. καὶ ἐπεὶ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν, καὶ τὰ α ε β, γ ζ δ τμήματα πέρας ἔχει τὸ τοῦ α γ, β δ παραλληλογράμμου ἐπίπεδον. ἀλλὰ καὶ ἡ συγκειμένη ἐπιφάνεια, ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσις μὲν αἱ α ε, ε β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου. καὶ τὰ α ε β, γ ζ δ τρίγωνα πέρας ἔχει τὸ τοῦ α β γ δ παραλληλογράμμου ἐπίπεδον. καὶ ἑτέρα τὴν ἑτέραν περιλαμβάνει, καὶ ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι εἰσί. μείζων οὖν ἐστὶν ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια, ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν καὶ τὰ α ε β, γ ζ δ ἐπίπεδα τμήματα τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν αἱ βάσεις μὲν αἱ α ε, ε β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου, καὶ τῶν α ε β, γ ζ δ τριγώνων. κοινὰ ἀφῃρήσθω τὰ α ε β, γ ζ δ τρίγωνα. λοιπὴ οὖν ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν, καὶ τὰ α ε, ε β, γ ζ, ζ δ, ἐπίπεδα τμήματα, μείζονά ἐστι τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ α ε, ε β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου. τὰ δὲ παραλληλόγραμμα ὧν βάσις μὲν αἱ α ε, ε β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ κυλίνδρου, ἴσα ἐστὶ τῷ α γ β δ παραλληλογράμμῳ, καὶ τοῦ κ χωρίῳ. λοιπὴ ἄρα ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν, μείζων ἐστὶ τοῦ α γ β δ παραλληλογράμμου.



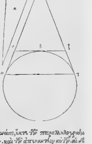
ἀλλὰ δὴ ἔστω ἔλασσον τὸ κ χωρίον τῶν α ε, ε β, γ ζ, ζ δ ἐπιπέδων τμημάτων. καὶ τετμήσθω ἑκάστη τῶν α ε, ε β, γ ζ, ζ δ περιφερειῶν δίχα κατὰ τὰ θ, κ, λ, μ, σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α θ, θ ε, ε κ, κ β, γ λ, λ ζ, ζ μ, μ δ. τῶν δὲ α ε, ε β, γ ζ, ζ δ ἄρα ἐπιπέδων τμημάτων ἀφαιρεῖται οὐκ ἔλασσον ἢ τὸ ἥμισυ, τὰ α θ ε, ε κ β, γ λ ζ, ζ μ δ τρίγωνα. τούτου οὖν ἑξῆς γινομένου καταληφθήσεταί τινα τμήματα, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ κ χωρίου. καταλελείφθω, καὶ ἔστω τὰ α θ, θ ε, ε κ, κ β, γ λ, λ ζ, ζ μ, μ δ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα, ὧν βάσις μέν αἱ α θ, θ ε, ε κ, κ β, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου, μείζονα ἔσται τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ α ε, ε β, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου. καὶ ἐπεὶ ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν, καὶ τὰ α ε β, γ ζ δ ἐπίπεδα τμήματα, πέρας ἔχει τὸ τοῦ α γ β δ παραλληλογράμμου ἐπίπεδον, ἀλλὰ καὶ ἡ συγκειμένη ἐπιφάνεια ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσις μὲν αἱ α θ, θ ε, ε κ, κ β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου. καὶ τῶν α θ ε κ β, γ λ ζ μ δ, εὐθυγράμμων κοινὰ ἀφῃρήσθω τὰ α θ ε κ β, γ λ ζ μ δ εὐθύγραμμα. λοιπὴ ἄρα ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν καὶ τὰ α θ, θ ε, ε κ, κ β, γ λ, λ ζ, ζ μ, μ δ ἐπίπεδα τμήματα, μείζονά ἐστι τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσις μὲν αἱ α θ, θ ε, ε κ, κ β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου. τὰ δὲ παραλληλόγραμμα, ὧν βάσις μὲν αἱ α θ, θ ε, ε κ, κ β, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου, μείζονά ἐστι τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσις μὲν αἱ α ε, ε β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου. καὶ ἡ ἀποτεμνομένη ἄρα κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια, ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν. καὶ τὰ α θ, θ ε, ε κ, κ β, γ λ, λ ζ, ζ μ, μ δ ἐπίπεδα τμήματα, μείζονά ἐστι τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσις μὲν αἱ α ε, ε β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου. τὰ δὲ παραλληλόγραμμα ὧν βάσις μὲν αἱ α ε, ε β, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου, ἴσα ἐστὶ τῷ α γ δ β παραλληλογράμμῳ, καὶ τῷ κ χωρίῳ. καὶ ἡ ἀποτεμνομένη ἄρα κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια, ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν, καὶ τὰ α θ, θ ε, ε κ, κ β, γ λ, λ ζ, ζ μ, μ δ ἐπίπεδα τμήματα, μείζονά ἐστι τοῦ α γ β δ παραλληλογράμμου, καὶ τοῦ κ χωρίου. ἀφαιρεθέντα δὲ τὰ α θ, θ ε, ε κ, κ β, γ λ, λ ζ, ζ μ, μ δ τμήματα τοῦ κ χωρίου ἐλάσσονα.

λοιπὴ

λοιπὴ ἄρα ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν αγ, βδ εὐθειῶν, μείζων ἐστὶ τοῦ αγβδ παραλληλογράμμου.

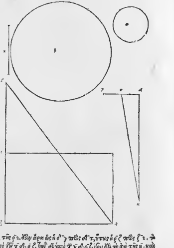
ιβ

Ἐὰν ἐν ἐπιφανείᾳ κυλίνδρου τινὸς ὀρθοῦ δύο εὐθεῖαι ὦσιν, ἀπὸ δὲ τῶν περάτων τῶν εὐθειῶν ἄχθωσίν τινες ἐπιψαύουσαι τῶν κύκλων, οἵ εἰσι βάσεις τοῦ κυλίνδρου ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῶν ὄσαι, καὶ συμπέσωσι, τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπό τε τῶν ἐπιψαυουσῶν καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου, μείζονα ἔσται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τῆς μεταξὺ τῶν εὐθειῶν τῶν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου. ἔστω κυλίνδρου τινὸς ὀρθοῦ βάσις ὁ αβγ κύκλος, καὶ ἔστωσαν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ δύο εὐθεῖαι, ὧν πέρατα τὰ α γ. ἀπὸ δὲ τῶν α γ ἤχθωσαν ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὄσαι, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ η, νοείσθωσαν δὲ καὶ ἐν τῇ ἑτέρᾳ βάσει τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ τῶν περάτων ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ εὐθεῖαι ἠγμέναι ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου. δεικτέον ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν ἐπιψαυουσῶν, καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου, μείζονά ἐστι τῆς κατὰ τὴν αβγ περιφέρειαν ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. ἤχθω γὰρ ἡ εζ ἐπιψαύουσα, καὶ ἀπὸ τῶν ε ζ σημείων ἤχθωσαν τινὲς εὐθεῖαι παρὰ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου, ἕως τῆς ἐπιφανείας τῆς ἑτέρας βάσεως. τὰ δὴ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν αη, ηγ, καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου, μείζονά ἐστι τῶν παραλληλογράμμων τῶν περιεχομένων ὑπό τε τῶν αε, εζ, ζγ. καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου. ἐπεὶ γὰρ αἱ εη, ηζ, τῆς εζ μείζους εἰσί, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ αε, ζγ. ὅλαι ἄρα αἱ ηα, ηγ, μείζους εἰσὶ τῶν αε, εζ, ζγ. ᾧ δὴ μείζονά ἐστιν, ἔστω τὸ κ χωρίον. τοῦ δὴ κ χωρίου τὸ ἥμισυ ἤτοι μεῖζόν ἐστι τῶν σχημάτων τῶν περιεχομένων ὑπὸ τῶν αε, εζ, ζγ εὐθειῶν, καὶ τῶν αδ, β, βθγ περιφερειῶν, ἢ οὔ. ἔστω πρότερον μεῖζον. τῆς δὲ ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν παραλληλογράμμων τῶν κατὰ τὰς αε, εζ, ζγ. καὶ τοῦ αεζγ τραπεζίου, καὶ τοῦ κατεναντίον αὐτοῦ ἐν τῇ ἑτέρᾳ βάσει τοῦ κυλίνδρου, πέρας ἐστὶν ἡ περίμετρος τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ κατὰ τὴν αγ. ἔστι δὲ καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἐκ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, τῆς κατὰ τὴν αβγ περιφέρειαν. καὶ τῶν τμημάτων τοῦ τε αβγ καὶ τοῦ ἀπεναντίον αὐτοῦ, πέρας ἡ αὐτὴ περίμετρος, αἱ δὲ εἰρημέναι ἐπιφάνειαι τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαι τυγχάνουσιν, ὅπερ ἐστὶν ἐν ἐπιπέδῳ. καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι. καὶ τινὰ μὲν περιλαμβάνει ἡ ἑτέρα αὐτῶν, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχουσιν. ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ περιλαμβανομένη. ἀφαιρεθέντων οὖν κοινῶν τοῦ τε αβγ τμήματος, καὶ τοῦ ἀπεναντίον αὐτοῦ, ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου, ἡ κατὰ τὴν αβγ περιφέρειαν τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας, ἔκ τε τῶν παραλληλογράμμων τῶν κατὰ τὰς αε, εζ, ζγ. καὶ τῶν σχημάτων τῶν αεβ, βζγ. καὶ τῶν ἀπεναντίον αὐτῶν. αἱ δὲ τῶν εἰρημένων σχημάτων, ἐλάττους εἰσὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν παραλληλογράμμων τῶν κατὰ τὰς αη, ηγ. μετὰ γὰρ τοῦ κ μείζονος ὄντος τῶν σχημάτων ἴσαι ἦσαν αὐταῖς. δῆλον οὖν ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν αη, ηγ καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου, μείζονά ἐστι τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τῆς κατὰ τὴν αβγ περιφέρειαν. εἰ δὲ μή ἐστι μεῖζον τὸ ἥμισυ τοῦ κ χωρίου τῶν εἰρημένων σχημάτων, ἀχθήσονται εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου σχήματος, ὥστε γενέσθαι τὰ περιλειπόμενα σχήματα ἐλάσσονα τοῦ ἡμίσεος τοῦ κ. καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς ἐπάνω δειχθήσεται. τούτων δὴ δεδειγμένων, φανερὸν ἐπὶ μὲν τῶν προειρημένων, ὅτι ἐὰν εἰς κῶνον ἰσοσκελῆ πυραμὶς ἐγγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἐλάσσων ἐστὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. ἕκαστον γὰρ τῶν περιεχόντων τὴν πυραμίδα τριγώνων ἐλάσσων ἐστὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, τῆς μεταξὺ τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν. ὥστε καὶ ὅλη ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, χωρὶς τῆς βάσεως. καὶ ὅτι ἐὰν περὶ κῶνον ἰσοσκελῆ πυραμὶς περιγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου χωρὶς τῆς βάσεως, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐκείνῳ. φανερὸν δὲ ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων, ὅτι τε ἐὰν εἰς κύλινδρον ὀρθὸν πρίσμα ἐγγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος, ἡ ἐκ τῶν παραλληλογράμμων συγκειμένη, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῆς βάσεως. ἔλασσον γὰρ ἕκαστον παραλληλόγραμμον τοῦ πρίσματος ἐστὶ τῆς καθ' αὑτὸ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας. καὶ ὅτι ἐὰν περὶ κύλινδρον ὀρθὸν πρίσμα περιγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος ἡ ἐκ τῶν



παραλληλογράμμων συγκειμένη, μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῆς βάσεως.

ιγ Παντὸς κυλίνδρου ὀρθοῦ ἡ ἐπιφάνεια χωρὶς τῆς βάσεως, ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου, καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου. ἔστω κυλίνδρου τινὸς ὀρθοῦ βάσις ὁ α κύκλος. καὶ ἔστω τῇ μὲν διαμέτρῳ τοῦ α κύκλου ἴση, ἡ γδ. τῇ δὲ πλευρᾷ τοῦ κυλίνδρου ἡ εζ. ἐχέτω δὲ μέσον λόγον τῶν δγ, εζ, ἡ η. καὶ κείσθω κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ η, ὁ β. δεικτέον ὅτι ὁ β κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου, χωρὶς τῆς βάσεως. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσος, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον εἰ δυνατὸν ἐλάσσων. δύο δὴ μεγεθῶν ὄντων ἀνίσων, τῆς τε ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, καὶ τοῦ β κύκλου, δυνατόν ἐστιν εἰς τὸν β κύκλον ἰσόπλευρον πολύγωνον ἐγγράψαι, καὶ ἄλλο περιγράψαι, ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὸν β κύκλον. νοείσθω δὴ περιγεγραμμένον, καὶ ἐγγεγραμμένον. καὶ περὶ τὸν α κύκλον περιγεγράφθω εὐθύγραμμον, ὅμοιον τῷ περὶ τὸν β περιγεγραμμένῳ. καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τοῦ εὐθυγράμμου πρίσμα. ἔσται δὴ περὶ τὸν κύλινδρον περιγεγραμμένον. ἔστω δὴ καὶ τῇ περιμέτρῳ τοῦ εὐθυγράμμου, τοῦ περὶ τὸν α κύκλον. ἴση ἡ κδ. καὶ τῇ κδ ἴση ἡ λζ, τῆς δὲ γδ ἡμίσεια ἔστω ἡ γτ. ἔσται δὴ τὸ κδτ τρίγωνον, ἴσον τῷ περιγεγραμμένῳ εὐθυγράμμῳ περὶ τὸν α κύκλον. ἐπειδὴ βάσιν μὲν ἔχει τῇ περιμέτρῳ ἴσην. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α κύκλου. τὸ δὲ ελ παραλληλόγραμμον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος, τοῦ περὶ τὸν κύλινδρον περιγεγραμμένου. ἐπειδὴ περιέχεται ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου, καὶ τῆς ἴσης τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος. κείσθω δὴ τῇ εζ ἴση ἡ ερ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ζρλ τρίγωνον, τῷ ελ παραλληλογράμμῳ, ὥστε καὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ εὐθύγραμμα τὰ περὶ τοὺς α, β κύκλους περιγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον τὰ εὐθύγραμμα, ὅνπερ αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει. ἕξει ἄρα τὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ περὶ τὸν β κύκλον εὐθύγραμμον, λόγον, ὃν ἡ τδ πρὸς τὴν η δυνάμει. αἱ γὰρ τδ, η, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ἐκ τοῦ κέντρου. ἀλλ᾽ ὃν ἔχει λόγον ἡ τδ πρὸς τὴν η δυνάμει, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἡ τδ πρὸς ρζ μήκει. ἡ γὰρ η τῶν τδ, ρζ μέση ἐστὶν ἀνὰ λόγον, διὰ τὸ καὶ τῶν γδ, εζ. πῶς δὲ τοῦτο; ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν δτ τῇ τγ, ἡ δὲ ρε τῇ εζ. διπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ γδ τῆς τδ καὶ ἡ ρζ, τῆς ρε. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δγ πρὸς δτ, οὕτως ἡ ρζ πρὸς ζε. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν γδ, εζ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τδ, ρζ. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν γδ, εζ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς η. καὶ τῷ ὑπὸ τῶν τδ, ρζ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς η. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τδ πρὸς η, οὕτως ἡ η πρὸς ρζ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τδ πρὸς ρζ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς τδ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς η. ἐὰν γὰρ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνὰ λόγον ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας εἶδος, τὸ ὅμοιον, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ τδ πρὸς ρζ μήκει, τοῦτον ἔχει τὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ ρλζ. ἐπειδήπερ ἴσαι εἰσὶν αἱ κδ, λζ. τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον, ὅνπερ τὸ τκδ τρίγωνον πρὸς τὸ ρζλ τρίγωνον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ζλρ τρίγωνον, τῷ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένῳ εὐθυγράμμῳ.



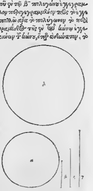
θυγράμμου. ὥστε καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τοῦ περὶ τὸν α κύλινδρον περιγεγραμμένου, τοῦ εὐθυγράμμου τοῦ περὶ τὸν β κύκλον ἴση ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν β κύκλον, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ κύκλῳ, τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ α κυλίνδρου πρὸς τὸν β κύκλον, ἐλάσσονα λόγον ἕξει καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τοῦ περὶ τὸν κύλινδρον, περιγεγραμμένου πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ β τῷ κύκλῳ γεγραμμένον, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὸν β κύκλον· καὶ ἐναλλάξ, ὅπερ ἀδύνατον. ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν κύλινδρον, μείζων ἐστὶ δέδεικται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. τὸ δὲ γεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τῷ β κύκλῳ, ἔλασσον ἐστὶ τοῦ β κύκλου. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὁ β κύκλος ἐλάσσων τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. ἔστω δέ, εἰ δυνατόν, μείζων. πάλιν δὲ νοείσθω εἰς τὸν β κύκλον εὐθύγραμμον ἐγγεγραμμένον, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον. ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸν β κύκλον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν α κύκλον πολύγωνον, ὅμοιον τῷ εἰς τὸν β κύκλον ἐγγεγραμμένῳ, καὶ πρίσμα ἀναγεγράφθω ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου. καὶ πάλιν ἡ κδ ἴση ἔστω τῇ περιμέτρῳ τοῦ εὐθυγράμμου, τοῦ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένου, καὶ ἡ ζλ ἴση αὐτῇ ἔστω. ἔσται δὴ τὸ μὲν κτδ τρίγωνον μεῖζον τοῦ εὐθυγράμμου, τοῦ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένου. διότι βάσιν μὲν ἔχει τὴν περίμετρον αὐτοῦ. ὕψος δὲ μεῖζον τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου ἀγομένης καθέτου. τὸ δὲ ελ παραλληλόγραμμον ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος, τῇ ἐκ τῶν παραλληλογράμμων συγκειμένῃ, διότι περιέχεται ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου, καὶ τῆς ἴσης τῇ περιμέτρῳ τοῦ εὐθυγράμμου, ὅ ἐστι βάσις τοῦ πρίσματος. ὥστε καὶ τὸ ρλζ τρίγωνον, ἴσον ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος. καὶ ἐπεὶ ὅμοια ἐστὶ τὰ εὐθύγραμμα τὰ ἐν τοῖς α, β κύκλοις ἐγγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων αὐτῶν δυνάμει. ἔχει δὲ καὶ τὰ κτδ, ζρλ τρίγωνα πρὸς ἄλληλα, λόγον, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων δυνάμει. τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ β ἐγγεγραμμένον, καὶ τὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ λζρ τρίγωνον. ἔλασσον δὲ ἐστὶ τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, τοῦ κτδ τριγώνου. ἔλασσον ἄρα καὶ τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ β κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, τοῦ ζρλ τριγώνου, ὥστε καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος τοῦ ἐν τῷ κυλίνδρῳ ἐγγεγραμμένου. ὅπερ ἀδύνατον. ἐπεὶ γὰρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον περὶ τὸν β κύκλον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἢ ὁ β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου· καὶ ἐναλλάξ. μεῖζον δὲ ἐστὶ τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸν β κύκλον τοῦ β κύκλου. μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ β κύκλῳ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. ὥστε καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος, οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ὁ β κύκλος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων, ἴσος ἄρα ἐστί.

ιδ

Παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς χωρὶς τῆς βάσεως, ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τοῦ κώνου, καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ κώνου. ἔστω κῶνος ἰσοσκελής, οὗ βάσις ὁ α κύκλος. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου ἔστω ἡ γ. τῇ δὲ πλευρᾷ τοῦ κώνου ἔστω ἴση ἡ δ. τῶν δὲ γ, δ μέση ἀνὰ λόγον ἡ ε. ὁ δὲ β κύκλος ἐχέτω τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ε ἴσην. λέγω ὅτι ὁ β κύκλος ἐστὶν ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, χωρὶς τῆς βάσεως. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσος, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον ἐλάσσων. ἔστι δὴ δύο μεγέθη ἄνισα, ἥ τε ἐπιφάνεια τοῦ κώνου, καὶ ὁ β κύκλος. καὶ μείζων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου. δυνατὸν ἄρα εἰς τὸν β κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγράψαι, καὶ ἄλλο περιγράψαι ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ. ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν β κύκλον. νοείσθω δὴ καὶ περὶ τὸν α κύκλον πολύγωνον περιγεγραμμένον, ὅμοιον τῷ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένῳ, καὶ ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν α κύκλον περιγεγραμμένου πολυγώνου πυραμὶς ἀνεστάτω ἀναγεγραμμένη, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιά ἐστι τὰ πολύγωνα τὰ περὶ τοὺς α, β κύκλους περιγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει πρὸς ἀλλήλας, τουτέστιν, ὃν ἔχει ἡ γ πρὸς



ε δυνάμει, τουτέστιν ἡ γ πρὸς δ μήκει. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ γ πρὸς δ μήκει, τοῦτον ἔχει τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον περὶ τὸν α κύκλον, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸν κῶνον. ἡ μὲν γὰρ γ ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου καθέτῳ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου. ἡ δὲ δ τῇ πλευρᾷ τοῦ κώνου. κοινὸν δὲ ὕψος ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου, πρὸς τὰ ἡμίση τῶν ἐπιφανειῶν. τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν α κύκλον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν β κύκλον. καὶ αὐτὸ τὸ εὐθύγραμμον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος περιγεγραμμένης περὶ τὸν κῶνον. ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τῷ εὐθυγράμμῳ τῷ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένῳ. ἐπεὶ οὖν ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν β κύκλον, ἐλάσσονα λόγον ἕξει ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τῆς περὶ τὸν κῶνον περιγεγραμμένης, πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ β κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν β κύκλον. ὅπερ ἀδύνατον. ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος μείζων οὖσα δέδεικται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τῷ β κύκλῳ, ἔλασσόν ἐστι τοῦ β κύκλου. οὐκ ἄρα ὁ β κύκλος ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ μείζων. εἰ γὰρ δυνατόν ἐστιν, ἔστω μείζων. πάλιν δὲ νοείσθω εἰς τὸν β κύκλον πολύγωνον ἐγγεγραμμένον, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, τοῦ ὃν ἔχει ὁ β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου. καὶ εἰς τὸν α κύκλον νοείσθω ἐγγεγραμμένον πολύγωνον, ὅμοιον τῷ εἰς τὸν β κύκλον ἐγγεγραμμένῳ. καὶ ἀναγεγράφθω ἀπ᾽ αὐτοῦ πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιά ἐστι τὰ ἐν τοῖς α, β ἐγγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει πρὸς ἀλλήλας. τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, καὶ ἡ γ πρὸς τὴν δ μήκει. ἡ δὲ γ πρὸς τὴν δ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον. ἡ γὰρ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α κύκλου πρὸς πλευρὰν τοῦ κώνου, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀγομένη κάθετος ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου, κάθετον ἀγομένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ β ἐγγεγραμμένον, ἢ αὐτὸ τὸ πολύγωνον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος, τοῦ ἐν τῷ β πολυγώνου ἐγγεγραμμένου. ἐλάσσονα δὲ λόγον ἔχει τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἢ ὁ β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου. πολλῷ ἄρα τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς ἐν τῷ κώνῳ ἐγγεγραμμένης ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου, ὅπερ ἀδύνατον, τὸ μὲν γὰρ περιγεγραμμένον πολύγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ β κύκλου. ἡ δὲ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τῆς ἐν τῷ κώνῳ, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, οὐκ, ὅτι οὐδὲ μείζων ἐστὶν ὁ κύκλος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων, ἴσος ἄρα.

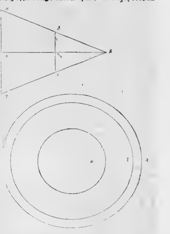


ιε Παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν βάσιν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως τοῦ κώνου. ἔστω κῶνος ἰσοσκελής, οὗ βάσις ὁ α κύκλος. ἔστω δὲ τῇ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α, ἴση ἡ β, τῇ δὲ πλευρᾷ τοῦ κώνου, ἡ γ. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν α κύκλον, καὶ ἡ γ πρὸς τὴν β. εἰλήφθω γὰρ τῶν β, γ μέση ἀνὰ λόγον ἡ ε, καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ δ, ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ε. ὁ δ ἄρα κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. τοῦτο γὰρ ἐδείχθη ἐν τῷ πρὸ τούτου. ἐδείχθη δὲ ὁ δ κύκλος πρὸς τὸν α κύκλον, λόγον ἔχων τὸν αὐτὸν, τῷ τῆς γ πρὸς β μήκει. ἑκάτερος γὰρ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ε πρὸς β δυνάμει. διὰ τὸ τοὺς κύκλους πρὸς ἀλλήλους εἶναι, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα. ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων. εἰ γὰρ αἱ διάμετροι, καὶ τὰ ἡμίση, τουτέστιν αἱ ἐκ τῶν κέντρων, ταῖς δὲ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσὶν, αἱ β, ε, δῆλον οὖν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου, πρὸς τὸν α κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ γ πρὸς β μήκει.

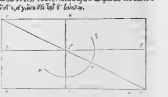
Ἐὰν

ις

Ἐὰν κῶνος ἰσοσκελὴς ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς τε πλευρᾶς τοῦ κώνου, τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, καὶ τῆς ἴσης ἀμφοτέραις ταῖς ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων, τῶν ἐν τοῖς παραλλήλοις ἐπιπέδοις. ἔστω κῶνος, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον ἴσον τῷ αβγ. καὶ τετμήσθω παραλλήλῳ ἐπιπέδῳ τῇ βάσει. καὶ ποιείτω τομὴν τὴν δε. ἄξων δὲ τοῦ κώνου ἔστω βη. κύκλος δέ τις ἐκκείσθω, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέση ἀνὰ λόγον ἐστὶ τῆς τε αδ, καὶ συναμφοτέρου τῆς δζ, ηα. ἔστω δὲ κύκλος ὁ θ. λέγω ὅτι ὁ θ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, τῇ μεταξὺ τῶν δε, αγ. ἐκκείσθωσαν γὰρ κύκλοι οἱ λ, κ. καὶ τοῦ μὲν κ κύκλου ἡ ἐκ τοῦ κέντρου, δυνάσθω τὸ ὑπὸ βδζ. τοῦ δὲ λ, ἡ ἐκ τοῦ κέντρου, δυνάσθω τὸ ὑπὸ βαη. ὁ μὲν ἄρα λ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ αβγ κώνου. ὁ δὲ κ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δεβ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν βα, αη, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν βδ, δζ, καὶ τῷ ὑπὸ τῆς αδ, καὶ συναμφοτέρου τῆς δζ, αη, διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν δζ τῇ αη, ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ αβ, αη δύναται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ λ κύκλου. τὸ δὲ ὑπὸ βδ, δζ δύναται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κ κύκλου. τὸ δὲ ὑπὸ τῆς δα, καὶ συναμφοτέρου τῆς δζ, αη δύναται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ θ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ λ κύκλου, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ἐκ τῶν κέντρων τῶν κ, θ κύκλων. ὥστε καὶ ὁ λ κύκλος ἴσος ἐστὶ τοῖς κ θ κύκλοις. ἀλλ᾽ ὁ μὲν λ ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ βαγ κώνου. ὁ δὲ κ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δβε κώνου. λοιπὴ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἡ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν δε, αγ, ἴση ἐστὶ τῷ θ κύκλῳ.



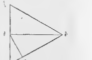
Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ βαη, καὶ διάμετρος αὐτοῦ ἔστω ἡ βη, τετμήσθω ἡ βα πλευρὰ ὡς ἔτυχεν κατὰ τὸ δ, καὶ διὰ τοῦ δ ἤχθω παράλληλος τῇ αη, ἡ δθ. διὰ δὲ τοῦ ζ τῇ βα, ἡ κλ. λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ βαη ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ βδζ καὶ ὑπὸ δα, καὶ συναμφοτέρου τῆς δζ αη. ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ὑπὸ βαη, ὅλον ἐστὶ τὸ βη. τὸ δὲ ὑπὸ βδζ, τὸ βζ. τὸ δὲ ὑπὸ δα, καὶ συναμφοτέρου τῆς δζ αη, ὁ μνξ γνώμων. τὸ μὲν γὰρ ὑπὸ δαη, ἴσον ἐστὶ τῷ κη. διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ κθ παραπλήρωμα, τῷ δλ παραπληρώματι. τὸ δὲ ὑπὸ δα, δζ, τῷ δλ. ὅλον ἄρα τὸ βη, ὅπερ ἐστὶ τὸ ὑπὸ βαη, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ βδζ καὶ τῷ μνξ γνώμονι, ὅς ἐστιν ἴσος τῷ ὑπὸ δα, καὶ συναμφοτέρου τῆς αη δζ.



οἱ κῶνοι οἱ ἴσον ὕψος ἔχοντες, τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς βάσεσι. καὶ οἱ ἴσας ἔχοντες βάσεις, τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον τοῖς ὕψεσιν. καὶ κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθεὶς παρὰ τὴν βάσιν, ἐστὶν ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, ὡς ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα. τοῖς δὲ κυλίνδροις ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν οἱ κῶνοι, οἱ ἔχοντες τὰς αὐτὰς βάσεις τοῖς κυλίνδροις. καὶ τῶν ἴσων κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ὧν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσί. καὶ οἱ κῶνοι ὧν αἱ διάμετροι τῶν βάσεων, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι τοῖς ἄξοσι, τουτέστι τοῖς ὕψεσι, πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων ταῦτα δὲ πάντα ὑπὸ τῶν πρότερον ἀποδέδεικται.

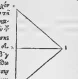


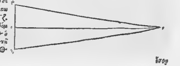
ιζ Ἐὰν ὦσι δύο κῶνοι ἰσοσκελεῖς, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἢ τῇ τοῦ ἑτέρου βάσει, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου κάθετος ἀγομένη τῷ ὕψει ἴση ᾖ, ἴσοι ἔσονται οἱ κῶνοι. ἔστωσαν δύο κῶνοι ἰσοσκελεῖς, οἱ α β γ, δ ε ζ. καὶ τοῦ α β γ ἡ μὲν βάσις ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ ε ζ. τὸ δὲ ὕψος τὸ α η, ἴσον ἔστω τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως τοῦ θ, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου, οἷον ἐπὶ τὴν δ ε καθέτῳ ἠγμένῃ τῇ κ θ. λέγω ὅτι ἴσοι εἰσὶν οἱ κῶνοι. ἐπεὶ γάρ ἴση ἐστὶν ἡ βάσις τοῦ α β γ, τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ ε ζ, τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὡς ἄρα ἡ τοῦ β α γ βάσις, πρὸς τὴν τοῦ δ ε ζ βάσιν, οὕτως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δ ε ζ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ δ ε ζ. ἀλλ' ὡς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν, οὕτως ἡ δ θ πρὸς τὴν θ κ. ἐδείχθη γὰρ τοῦτο, ὅτι παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν βάσιν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, τουτέστιν ἡ δ ε πρὸς δ θ. ὡς δὲ ἡ ε δ πρὸς θ δ, οὕτως ἡ δ θ πρὸς θ κ. ἰσογώνια γάρ ἐστι τὰ τρίγωνα. ἴση δέ ἐστιν ἡ θ κ τῇ α η. ὡς ἄρα ἡ βάσις τοῦ β α γ, πρὸς τὴν βάσιν τοῦ δ ε ζ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ δ ε ζ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ α β γ. τῶν α β γ, δ ε ζ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ β α γ, τῷ δ ε ζ κώνῳ.





ιη Παντὶ ῥόμβῳ ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκειμένῳ, ἴσος ἐστὶ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἑτέρου κώνου τῶν περιεχόντων τὸν ῥόμβον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ἑτέρου κώνου καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ ἑτέρου κώνου. ἔστω ῥόμβος ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκείμενος ὁ α β γ δ. οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν β γ κύκλος. ὕψος δὲ τὸ α δ. ἐκκείσθω δέ τις ἕτερος ὁ η θ κ, τὴν μὲν βάσιν ἔχων τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ α β γ κώνου ἴσην, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ δ σημείου καθέτῳ ἐπὶ τὴν α β, ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ ἠγμένῃ. ἔστω δὲ ἡ δ ζ. τὸ δὲ ὕψος τοῦ θ η κ κώνου, ἔστω τὸ θ λ. ἴσον δή ἐστι τὸ θ λ τῇ δ ζ. λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ κῶνος τῷ ῥόμβῳ. ἐκκείσθω γὰρ ἕτερος κῶνος ὁ μ ν ξ, τὴν μὲν βάσιν ἔχων ἴσην τῇ βάσει τοῦ α β γ κώνου, τὸ δὲ ὕψος



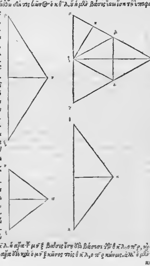


ἴσον

τὸν τῷ α δ. καὶ ἔστω τὸ ὕψος αὐτοῦ τὸ ν ο. ἐπεὶ οὖν ἡ ν ο, τῇ α λ ἴση ἐστίν, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ν ο πρὸς δ ε, οὕτως ἡ α λ πρὸς δ ε. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ α λ πρὸς δ ε, οὕτως ὁ α β γ δ ῥόμβος πρὸς τὸν β γ δ κῶνον. ὡς δὲ ἡ ν ο πρὸς τὴν δ ε, οὕτως ὁ μ ν ξ κῶνος πρὸς τὸν β γ δ κῶνον, διὰ τὸ τὰς βάσεις αὐτῶν εἶναι ἴσας. ὡς ἄρα ὁ μ ν ξ κῶνος, πρὸς τὸν β γ δ κῶνον· οὕτως ὁ α β γ δ ῥόμβος, πρὸς τὸν β γ δ κῶνον. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μ ν ξ, τῷ α β γ δ ῥόμβῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ α β γ, ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ θ κ. ὡς ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ α β γ, πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν, οὕτως ἡ βάσις τοῦ θ κ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ μ ν ξ. ἡ γὰρ βάσις τοῦ α β γ ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ μ ν ξ. ὡς δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ α β γ πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν, οὕτως ἡ α β πρὸς τὴν β ε, τουτέστιν ἡ α δ πρὸς δ ζ. ὅμοια γὰρ τὰ τρίγωνα. ὡς ἄρα ἡ βάσις τοῦ θ κ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ μ ν ξ, οὕτως ἡ α δ πρὸς δ ζ. ἴση δὲ ἡ μὲν α δ τῇ ν ο, ὑπέκειτο γάρ. ἡ δὲ δ ζ τῇ θ λ. ὡς ἄρα ἡ βάσις τοῦ θ κ, πρὸς τὴν βάσιν τοῦ μ ν ξ, οὕτως τὸ ν ο ὕψος πρὸς τὸ θ λ. τῶν θ κ, μ ν ξ ἄρα κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι ἄρα εἰσὶν οἱ κῶνοι. ἐδείχθη δὲ ὁ μ ν ξ ἴσος τῷ α β γ δ ῥόμβῳ, καὶ ὁ θ κ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ α β γ δ ῥόμβῳ.

ιθ

Ἐὰν κῶνος ἰσοσκελὴς ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, ἀπὸ δὲ τοῦ γενομένου κύκλου, κῶνος ἀναγραφῇ κορυφὴν ἔχων τὸ κέντρον τῆς βάσεως· ὁ δὲ γενόμενος ῥόμβος ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ὅλου κώνου, τῷ περιλείμματι ἴσος ἔσται κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. ἔστω κῶνος ἰσοσκελὴς ὁ α β γ. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῇ βάσει, καὶ ποιείτω τομὴν τὴν δ ε κύκλον. κέντρον δὲ τῆς βάσεως ἔστω τὸ ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν δ ε κύκλου, κῶνος ἀναγεγράφθω κορυφὴν ἔχων τὸ ζ. ἔσται δὴ ῥόμβος ὁ β δ ζ ε, ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκείμενος. ἐκκείσθω δή τις κῶνος ὁ κ θ λ. οὗ ἡ μὲν βάσις ἔστω ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν δ ε, α γ. τὸ δὲ ὕψος

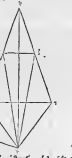


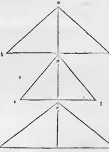
ἀχθείσης ἀπὸ τοῦ ζ σημείου καθέτου, ἐπὶ τὴν α β, τῆς ζ η. ἔστω ἴσον τῇ ζ η. λέγω ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ α β γ κώνου νοηθῇ ἀφῃρημένος ὁ β δ ζ ε ῥόμβος, τῷ περιλείμματι ἴσος ἔσται ὁ θ κ λ κῶνος. ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο κῶνοι οἱ μ ν ξ, ο π ρ. ὥστε τὴν μὲν τοῦ μ ν ξ βάσιν ἴσην εἶναι τῇ τοῦ α β γ κώνου τῇ ἐπιφανείᾳ, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ζ η. διὰ δὴ τοῦτο ἴσος ἐστὶν ὁ μ ν ξ κῶνος τῷ α β γ κώνῳ. ἐὰν γὰρ ὦσι δύο κῶνοι ἰσοσκελεῖς, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἡ τῇ τοῦ ἑτέρου βάσει. ἔτι δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου ἀγομένη κάθετος, τῷ ὕψει ἴση, ἴσοι ἔσονται οἱ κῶνοι. τὴν δὲ τοῦ ο π ρ κώνου βάσιν ἴσην εἶναι τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ β ε κώνου, ὕψος δὲ τῇ ζ η. διὰ δὴ ταῦτα ἴσος ἐστὶν ὁ ο π ρ κῶνος, τῷ β δ ζ ε ῥόμβῳ. τοῦτο γὰρ προαπεδείχθη. ἐπεὶ δὲ ἡ τοῦ α β γ κώνου ἐπιφάνεια σύγκειται ἔκ τε τῆς τοῦ β δ ε ἐπιφανείας, καὶ τῆς μεταξὺ τῶν δ ε, α γ. ἀλλ᾽ ἡ μὲν τοῦ α β γ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ μ ν ξ κώνου. ἡ δὲ τοῦ δ β ε ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ο π ρ. ἡ δὲ μεταξὺ τῶν δ ε, α γ, ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ θ κ λ. ἡ ἄρα τοῦ μ ν ξ βάσις ἴση ἐστὶ βάσεσι τῶν θ κ λ, ο π ρ, καί εἰσιν οἱ κῶνοι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. ἴσος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ μ ν ξ κῶνος τοῖς θ κ λ, ο π ρ κώνοις. ἀλλ᾽ ὁ μὲν μ ν ξ

κῶνος

κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ αβγ κώνῳ, ὁ δὲ π ο ρ, τῷ β δ ε ζ ῥόμβῳ. λοιπὸς ἄρα ὁ θ κ λ κῶνος, τῷ περιλείμματι ἴσος ἐστίν.

κ Ἐὰν ῥόμβου ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκειμένου, ὁ ἕτερος κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, ἀπὸ δὲ τοῦ γενομένου κύκλου κῶνος ἀναγραφῇ, κορυφὴν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ ἑτέρῳ κώνῳ· ἀπὸ δὲ τοῦ ὅλου ῥόμβου ὁ γενόμενος ῥόμβος ἀφαιρεθῇ, τῷ περιλείμματι ἴσος ἔσται ὁ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, ὕψος δὲ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ἑτέρου κώνου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ ἑτέρου κώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. ἔστω ῥόμβος ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκείμενος ὁ αβγδ. καὶ τμηθήτω ὁ ἕτερος κῶνος ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῇ βάσει, καὶ ποιείτω τομὴν τὴν εζ. ἀπὸ δὲ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν εζ κύκλου, κῶνος ἀναγεγράφθω τὴν κορυφὴν ἔχων τὸ δ σημεῖον. ἔσται δὴ γεγονὼς ῥόμβος ὁ εβδζ. καὶ νοείσθω ἀφῃρημένος ἀπὸ



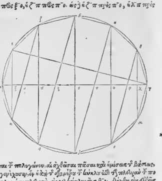


τοῦ ὅλου ῥόμβου. ἐκκείσθω δέ τις κῶνος ὁ θκλ, τὴν μὲν βάσιν ἴσην ἔχων τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν αγ, εζ. τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ δ σημείου καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ τὴν βα, ἢ τὴν ἐπ' εὐθείας αὐτῇ. λέγω ὅτι ὁ θκλ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ περιλείμματι. ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο κῶνοι, οἱ μνξ, οπρ. καὶ ἡ μὲν βάσις τοῦ μνξ κώνου ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ αβγ. τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ δη. διὰ δὴ τὰ προδειχθέντα, ἴσος ἐστὶν ὁ μνξ κῶνος τῷ αβγδ ῥόμβῳ. τοῦ δὲ οπρ κώνου, ἡ μὲν βάσις ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ εβζ κώνου. τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ δη. ὁμοίως δὴ ἴσος ἐστὶν ὁ οπρ κῶνος, τῷ εβδζ ῥόμβῳ. ἐπεὶ δὲ ὁμοίως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αβγ κώνου, σύγκειται ἐκ τῆς τοῦ εβζ, καὶ τῆς μεταξὺ τῶν εζ αγ. ἀλλ' ἡ μὲν τοῦ αβγ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ μνξ, ἡ δὲ τοῦ εβζ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ οπρ κώνου. ἡ δὲ μεταξὺ τῶν εζ αγ ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ θκλ. ἡ ἄρα βάσις τοῦ μνξ ἴση ἐστὶ ταῖς βάσεσι τῶν οπρ, θκλ. καί εἰσιν οἱ κῶνοι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. καὶ ὁ μνξ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τοῖς θκλ, οπρ κώνοις. ἀλλ' ὁ μὲν μνξ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ αβγδ ῥόμβῳ ὁ δὲ οπρ κῶνος τῷ εβδζ ῥόμβῳ. λοιπὸς ἄρα ὁ κῶνος ὁ θκλ, ἴσος ἐστὶ τῷ περιλείμματι τῷ λοιπῷ.

κα Ἐὰν εἰς κύκλον πολύγωνον ἐγγραφῇ ἀρτιόπλευρόν τε καὶ ἰσόπλευρον, καὶ διαχθῶσιν εὐθεῖαι ἐπιζευγνύουσαι τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου, ὥστε αὐτὰς παραλλήλους εἶναι μιᾷ ὁποιᾳοῦν τῶν ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινουσῶν, αἱ ἐπιζευγνύουσαι πᾶσαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον τοῦτον ἔχουσι τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ὑποτείνουσα τὰς μιᾷ ἐλάσσονας τῶν ἡμίσεων, πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου. ἔστω κύκλος ὁ αβγδ, καὶ ἐν αὐτῷ πολύγωνον ἐγγεγράφθω τὸ αεζβηθγμνδλκ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εκ, ζλ, βδ, ην, θμ. δῆλον δὴ ὅτι παράλληλοι εἰσὶ τῇ ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινούσῃ. λέγω οὖν, ὅτι αἱ εἰρημέναι πᾶσαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον τὴν αγ, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι τῷ τῆς γε πρὸς εα. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ζκ, λβ, ηδ, θν. παράλληλος ἄρα ἡ μὲν ζκ τῇ εα, ἡ δὲ βλ τῇ ζκ. καὶ ἔτι ἡ μὲν δη τῇ βλ, ἡ δὲ θν τῇ δη. καὶ ἡ γμ τῇ θν. καὶ ἐπεὶ δύο παράλληλοί εἰσιν αἱ εα, κζ, καὶ δύο διηγμέναι εἰσὶν αἱ εκ, αο. ἐστὶν ἄρα ὡς

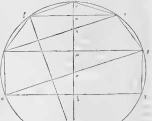
εξ

ἡ κ ξ, πρὸς ξ α, ἡ κ ξ πρὸς ξ ο. ὡς δὲ ἡ κ ξ πρὸς ξ ο, ἡ ζ π πρὸς π ο. ὡς δὲ ἡ ζ π πρὸς π ο, ἡ λ π πρὸς π ρ. ὡς δὲ ἡ λ π πρὸς π ρ, οὕτως ἡ β σ πρὸς σ ρ. καὶ ἔτι ὡς ἡ μὲν β σ πρὸς σ ρ ἡ δ σ πρὸς σ τ. ὡς δὲ ἡ δ σ πρὸς σ τ, ἡ η υ πρὸς υ τ. καὶ ἔτι ὡς ἡ μὲν η υ πρὸς υ τ, ἡ ν υ πρὸς υ φ. ὡς δὲ ἡ ν υ πρὸς υ φ, ἡ θ χ πρὸς χ φ. καὶ ἔτι ὡς ἡ μὲν θ χ πρὸς χ φ, ἡ μ χ πρὸς χ γ. καὶ πάντα ἄρα πρὸς πάντα ἐστὶν ὡς εἷς τῶν λόγων πρὸς ἕνα. ὡς ἄρα ἡ ε ξ πρὸς ξ α, οὕτως αἱ ε κ, ζ λ, β δ, η ν, θ μ, πρὸς τὴν α γ διάμετρον. ὡς δὲ ἡ ε ξ πρὸς ξ α, οὕτως ἡ γ ι πρὸς ι α. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ γ ι πρὸς ι α, οὕτως πᾶσαι αἱ ε κ, ζ λ, β δ, η ν, θ μ, πρὸς τὴν α γ διάμετρον.



κβ

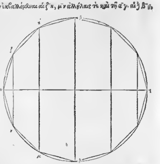
Ἐὰν εἰς τμῆμα κύκλου πολύγωνον ἐγγραφῇ τὰς πλευρὰς ἔχον χωρὶς τῆς βάσεως ἴσας καὶ ἀρτίους, ἀχθῶσι δὲ εὐθεῖαι παρὰ τὴν βάσιν τοῦ τμήματος, τὰς πλευρὰς ἐπιζευγνύουσαι τοῦ πολυγώνου, αἱ ἀχθεῖσαι πᾶσαι καὶ ἡμίσεια τῆς βάσεως, πρὸς τὸ ὕψος τοῦ τμήματος, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν, ὃν ἡ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου ἐπιζευγνυμένη, πρὸς τὴν τοῦ πολυγώνου πλευράν. εἰς γὰρ κύκλον τὸν α β γ, διήχθω τις εὐθεῖα ἡ α γ, καὶ ἐπὶ τῆς α γ πολύγωνον ἐγγεγράφθω εἰς τὸ α β γ τμῆμα ἀρτιόπλευρόν τε, καὶ ἴσας ἔχον τὰς πλευρὰς χωρὶς τῆς βάσεως τῆς α γ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζ η, ε θ, αἳ εἰσὶ παράλληλοι τῇ βάσει τοῦ τμήματος. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς αἱ ζ η, ε θ, α ξ πρὸς β ξ, οὕτως ἡ δ ζ πρὸς ζ β. πάλιν γὰρ ὁμοίως ἐπεζεύχθωσαν αἱ η ε, α θ. παράλληλοι ἄρα εἰσὶ τῇ β ζ. διὰ δὴ ταῦτα ἐστὶν ὡς ἡ κ ζ πρὸς κ β, ἥ τε η κ πρὸς κ λ, καὶ ἡ ε μ πρὸς μ λ, καὶ ἡ μ θ πρὸς μ ν, καὶ ἡ ξ α πρὸς ξ ν. καὶ ὡς ἄρα πάντα πρὸς πάντα, εἷς τῶν λόγων πρὸς ἕνα, ὡς ἄρα αἱ ζ η, ε θ, α ξ πρὸς β ξ, οὕτως ἡ ζ κ πρὸς κ β. ὡς δὲ ἡ κ ζ πρὸς κ β, οὕτως ἡ δ ζ πρὸς ζ β. ὡς ἄρα ἡ δ ζ πρὸς ζ β, οὕτως αἱ ζ η, ε θ, α ξ πρὸς β ξ.

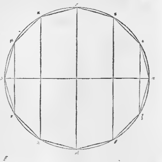


κγ

Ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸν πολύγωνον ἰσόπλευρον, τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος. αἱ δὲ α γ, β δ διάμετροι ἔστωσαν. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς α γ διαμέτρου, περιενεχθῇ ὁ α β γ δ κύκλος ἔχων τὸ πολύγωνον, δῆλον ὅτι ἡ μὲν περιφέρεια αὐτοῦ κατὰ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἐνεχθήσεται, αἱ δὲ τοῦ πολυγώνου γωνίαι χωρὶς τῶν πρὸς α, γ σημείοις κατὰ κύκλων περιφερειῶν ἐνεχθήσονται ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας γεγραμμένων ὀρθῶν πρὸς τὸν α β γ δ κύκλον. διάμετροι δὲ αὐτῶν ἔσονται, αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου παρὰ τὴν β δ οὖσαι. αἱ δὲ τοῦ πολυγώνου πλευραὶ κατά τινων κώνων ἐνεχθήσονται. αἱ μὲν α ζ, α ν κατ' ἐπιφανείας κώνου, οὗ βάσις μὲν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ζ ν, κορυφὴ δὲ τὸ α σημεῖον. αἱ δὲ ζ η, μ ν κατά τινος κωνικῆς ἐπιφανείας οἰσθήσονται, ἧς βάσις μὲν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν μ η, κορυ-

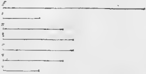
φὴ δὲ τὸ σημεῖον καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἐκβαλλόμεναι αἱ ζκ, μν ἀλλήλαις τε καὶ τῇ αγ. αἱ δὲ βμ, μδ πλευραὶ ἐπὶ κωνικῆς ἐπιφανείας οἰσθήσονται, ἧς βάσις μέν ἐστιν ὁ κύκλος, ὁ περὶ διάμετρον τὴν βδ, ὀρθὸς πρὸς τὸν αβγδ κύκλον. κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἐκβαλλόμεναι αἱ βκ, δμ, ἀλλήλαις τε καὶ τῇ γα. ὁμοίως δὲ καὶ ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμικυκλίῳ πλευραὶ ἐπὶ κωνικῶν ἐπιφανειῶν οἰσθήσονται, πάλιν ὁμοίων ταύταις. ἔσται δή τι σχῆμα ἐγγραφόμενον ἐν τῇ σφαίρᾳ ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον, τῶν προειρημένων. οὗ ἐπιφάνεια ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. διαιρεθείσης γὰρ τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὴν βδ ὀρθοῦ πρὸς τὸν αβγδ κύκλον, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἑτέρου ἡμισφαιρίου, καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ. ἀμφοτέρων γὰρ τῶν ἐπιφανειῶν πέρας ἐστὶ τοῦ κύκλου ἡ περιφέρεια, τοῦ περὶ διάμετρον τὴν βδ ὀρθοῦ πρὸς τὸν αβγδ κύκλον. καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι. καὶ περιλαμβάνεται αὐτῶν ἡ ἑτέρα ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἐπιφανείας, καὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχοντος αὐτῇ. ὁμοίως δὲ καὶ τοῦ ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμισφαιρίῳ σχήματος ἡ ἐπιφάνεια ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπιφανείας. καὶ ὅλη οὖν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.





κδ

Ἡ τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος εἰς τὴν σφαῖραν ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς πλευρᾶς τοῦ σχήματος, καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου (τετραπλεύρου) παραλλήλους οὔσας τῇ ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινούσῃ εὐθείᾳ. ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ, καὶ ἐν αὐτῷ πολύγωνον ἐγγεγράφθω ἰσόπλευρον, οὗ αἱ πλευραὶ ὑπὸ τετράδος μετροῦνται. καὶ ἀπὸ τοῦ πολυγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου νοείσθω τι εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγεγραμμένον σχῆμα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εζ, ηθ, γδ, κλ, μν, παράλληλοι οὖσαι τῇ ὑπὸ δύο πλευ-

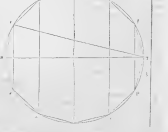


ρὰς

γὰς ὑποτεινούσας εὐθείας κύκλος δή τις ἐκκείσθω ὁ ξ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς α ε, καὶ τῆς ἴσης ταῖς ε ζ, η θ, γ δ, κ λ, μ ν. λέγω ὅτι ὁ κύκλος οὗτος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγραφομένου σχήματος. ἐκκείσθωσαν γὰρ κύκλοι οἱ ο, π, ρ, σ, τ, υ. καὶ τοῦ μὲν ο, ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ε α, καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ε ζ. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ π, δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ε α καὶ τῆς ἡμισείας τῶν ε ζ, η θ. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ρ, δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ε α καὶ τῆς ἡμισείας τῶν η θ, γ δ. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ σ, δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς α ε, καὶ τῆς ἡμισείας τῶν γ δ, κ λ. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ τ, δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς α ε, καὶ τῆς ἡμισείας τῶν κ λ, μ ν. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ υ, δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς α ε. καὶ τῆς ἡμισείας τῆς μ ν, διὰ δὴ ταῦτα ὁ μὲν ο κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ α ε ζ κώνου. ὁ δὲ π τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν ε ζ, η θ. ὁ δὲ ρ τῇ μεταξὺ τῶν η θ, γ δ. ὁ δὲ σ τῇ μεταξὺ τῶν δ γ, κ λ. καὶ ἔτι ὁ μὲν τ ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν κ λ, μ ν. ὁ δὲ υ τῇ τοῦ μ β ν κώνου ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστί. οἱ πάντες ἄρα κύκλοι ἴσοι εἰσὶ τῇ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ φανερὸν ὅτι αἱ ἐκ τοῦ κέντρου τῶν ο, π, ρ, σ, τ, υ κύκλων, δύνανται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς α ε καὶ δὶς τῶν ἡμίσεων τῶν ε ζ, η θ, γ δ, κ λ, μ ν. αἳ ὅλαι εἰσὶν αἱ ε ζ, η θ, κ λ, μ ν. αἱ ἄρα ἐκ τῶν κέντρων τῶν ο, π, ρ, σ, τ, υ κύκλων δύνανται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς α ε καὶ πασῶν τῶν ε ζ, η θ, γ δ, κ λ, μ ν, ἀλλὰ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ξ κύκλου δύναται τὸ ὑπὸ τῆς α ε, καὶ τῆς συγκειμένης ἐκ πασῶν τῶν ε ζ, η θ, γ δ, κ λ, μ ν. ἡ ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ξ κύκλου δύναται τὰς ἐκ τῶν κέντρων τῶν ο, π, ρ, σ, τ, υ κύκλων. καὶ ὁ κύκλος ἄρα ὁ ξ, ἴσος ἐστὶ τοῖς ο, π, ρ, σ, τ, υ κύκλοις. οἱ δὲ ο, π, ρ, σ, τ, υ κύκλοι ἀπεδείχθησαν ἴσοι τῇ εἰρημένῃ τοῦ σχήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ ὁ ξ ἄρα κύκλος ἴσος ἔσται τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος.

Τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος εἰς τὴν σφαῖραν, ἡ ἐπιφάνεια ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ. ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ. καὶ ἐν αὐτῷ ἐγγεγράφθω πολύγωνον ἀρτιόγωνον ἰσόπλευρον, οὗ αἱ πλευραὶ ὑπὸ τετράδος μετροῦνται. καὶ ἐπ' αὐτοῦ νοείσθω ἐπιφάνεια ἡ ἀπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχομένη. λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγραφέντος, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτείνουσαι τοῦ πολυγώνου, αἱ ἄρα ε ι, θ μ. καὶ ταύταις παράλληλοι αἱ ζ κ, δ β, η λ. ἐκκείσθω δέ τις κύκλος ὁ ρ. οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ τῆς ε α, καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ε ι, ζ κ, β δ, η λ, θ μ. διὰ δὴ τὸ προδειχθὲν ἴσος ἐστὶν ὁ κύκλος τῇ τοῦ εἰρημένου σχήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ἴση πάσαις ταῖς ε ι, ζ κ, β δ, η λ, θ μ, πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου τὴν α γ. οὕτως ἡ γ ε πρὸς ε α. τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς εἰρημέναις, καὶ τῆς ε α, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ρ κύκλου, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν α γ, γ ε. ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ

α γ, γ ε ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς α γ. ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ρ, τοῦ ἀπὸ τῆς α γ. ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ρ τῆς α γ. ὥστε ἡ διάμετρος τοῦ ρ κύκλου, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασία τῆς διαμέτρου τοῦ α β γ δ κύκλου. καὶ δύο ἄρα τοῦ α β γ δ κύκλου διάμετροι, μείζους εἰσὶ τῆς διαμέτρου τοῦ ρ κύκλου καὶ τὸ τετράκις ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ α β γ δ κύκλου, τουτέστι τῆς α γ, μεῖζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς τοῦ ρ κύκλου διαμέτρου. ὡς δὲ τὸ τετράκις ἀπὸ τῆς α γ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τοῦ ρ κύκλου διαμέτρου, οὕτως τέσσαρες κύκλοι οἱ α β γ δ πρὸς τὸν ρ κύκλον. τέσσαρες ἄρα κύκλοι οἱ α β γ δ, μείζους εἰσὶ τοῦ ρ κύκλου.

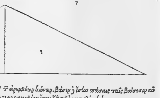


ὁ ἄρα κύκλος ὁ ρ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλάσιος τοῦ μεγίστου κύκλου. ὁ ρ κύκλος ἴσος ἐδείχθη τῇ

τῇ εἰρημένῃ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος. ἡ ἄρα ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ.

κϛ Τῷ ἐγγραφομένῳ ἐν τῇ σφαίρᾳ σχήματι, τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν ἴσος ἐστὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον, τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος τοῦ ἐγγραφέντος ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. ἔστω ἡ σφαῖρα καὶ ὁ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ. καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τῷ πρότερον. ἔστω δὲ κῶνος ὀρθὸς ὁ ρ, βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. δεικτέον ὅτι ὁ κῶνος ὁ ρ, ἴσος ἐστὶ τῷ ἐγγεγραμμένῳ ἐν τῇ σφαίρᾳ σχήματι. ἀπὸ γὰρ τῶν κύκλων ὧν εἰσὶ διάμετροι αἱ ζν, ημ, θλ, ικ, κῶνοι ἀναγεγράφθωσαν, κορυφὴν ἔχοντες τὸ τῆς σφαίρας κέντρον. ἔσται δὴ ῥόμβος στερεὸς ἐκ τε κώνου, οὗ βάσις μὲν ἔστω ὁ κύκλος ὁ περὶ τὴν ζν, κορυφὴ δὲ τὸ α σημεῖον καὶ τοῦ κώνου οὗ βάσις ὁ αὐτὸς κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ χ σημεῖον, ἴσος ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ναζ. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ χ καθέτῳ ἠγμένῃ. πάλιν δὲ καὶ τὸ περιλελειμμένον τοῦ ῥόμβου τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ



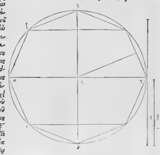


τὴν ζν ημ. καὶ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κώνων τῶν τε ζνχ, καὶ τοῦ ημχ, ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς μν ζη, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ χ ἐπὶ τὴν ζη καθέτῳ ἠγμένῃ. δέδεικται γὰρ ταῦτα. ἔτι δὲ καὶ τὸ περιλειπόμενον τοῦ κώνου τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ημ, βδ, καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ μηχ κώνου. καὶ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν βδ, ἴσον ἔσται κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν τε ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ημ, βδ ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ χ ἐπὶ τὴν βη καθέτῳ ἠγμένῃ. ὁμοίως δὲ καὶ ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμισφαιρίῳ ὅ τε ῥόμβος ὁ χκγι, καὶ τὰ περιλείμματα τῶν κώνων ἴσα ἔσται τοσούτοις καὶ τηλικούτοις κώνοις, ὅσοι καὶ πρότερον ἐρρήθησαν. δῆλον οὖν ὅτι καὶ ὅλον τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῇ σφαίρᾳ, ἴσον ἐστὶ πᾶσιν τοῖς εἰρημένοις κώνοις. οἱ δὲ κῶνοι ἴσοι εἰσὶ τῷ ρ κώνῳ. ἐπειδὴ ὁ ρ κῶνος ὕψος μὲν ἔχει ἑκάστῳ ἴσον τῶν εἰρημένων κώνων. βάσιν δὲ ἴσην πάσαις ταῖς βάσεσιν αὐτῶν. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένον ἴσον ἐστὶ τῷ ἐκκειμένῳ κώνῳ.

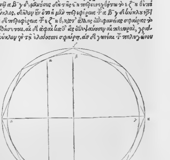
κζ Τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν, ἔλασσον ἐστὶν ἢ τετραπλάσιον τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἔστω γὰρ ὁ γινόμενος κῶνος ἴσος τῷ σχήματι τῷ ἐγγεγραμμένῳ ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὴν βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ ἐγγραφέντος πολυγώνου ὁ ρ. ὁ δὲ κῶνος

ὁ ξ

ὁ ξ ἔστω, βάσιν ἔχων ἴσην τῷ α β γ δ κύκλῳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α β γ δ κύκλου. ἐπεὶ οὖν ὁ ρ κῶνος βάσιν ἔχει ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ χ καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ τὴν α ζ. ἐδείχθη δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσων ἢ τετραπλασία τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ μεγίστου κύκλου. ἔστιν ἄρα ἡ τοῦ ρ κώνου βάσις ἐλάσσων ἢ τετραπλασία τῆς βάσεως τοῦ ξ κώνου. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὕψος τοῦ ρ ἔλασσον τοῦ ὕψους τοῦ ξ κώνου. ἐπεὶ οὖν ὁ ρ κῶνος τὴν μὲν βάσιν ἔχει ἐλάσσονα ἢ τετραπλασίαν τῆς τοῦ ξ βάσεως, τὸ δὲ ὕψος ἔλασσον τοῦ ὕψους, δῆλον ὡς καὶ αὐτὸς ὁ ρ κῶνος ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλάσιος τοῦ ξ κώνου. ἀλλὰ καὶ ὁ ρ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. τὸ ἄρα ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἔλασσόν ἐστιν ἢ τετραπλάσιον τοῦ ξ κώνου.



Ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ. περὶ δὲ τὸν α β γ δ κύκλον περιγεγράφθω πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος, τὸ δὲ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένον πολύγωνον, κύκλος περιγεγραμμένος περιλαμβανέτω, περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον γινόμενος τῷ α β γ δ, μενούσης δὲ τῆς ε η περιενεχθήτω τὸ ε ζ η θ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ τό τε πολύγωνον καὶ ὁ κύκλος. δῆλον οὖν ὅτι ἡ μὲν περιφέρεια τοῦ α β γ δ κύκλου κατὰ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας οἰσθήσεται. ἡ δὲ περιφέρεια τοῦ ε ζ η θ, κατ᾽ ἄλλης ἐπιφανείας σφαίρας τὸ αὐτὸ κέντρον ἐχούσης τῇ ἐλάσσονι οἰσθήσεται. αἱ δὲ ἁφαὶ καθ᾽ ἃς ἐπιψαύουσιν αἱ πλευραί, γράφουσι κύκλους ὀρθοὺς πρὸς τὸν α β γ δ κύκλον ἐν τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ. αἱ δὲ γωνίαι τοῦ πολυγώνου χωρὶς τῶν πρὸς τοῖς ε, η σημείοις, κατὰ κύκλων περιφερειῶν οἰσθήσονται, ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς μείζονος σφαίρας γεγραμμένων ὀρθῶν πρὸς τὸν ε ζ η θ κύκλον. αἱ δὲ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου κατὰ κωνικῶν ἐπιφανειῶν οἰσθήσονται, καθάπερ ἐπὶ τῶν πρὸ τοῦ. ἔστι οὖν τὸ σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν, περὶ μὲν τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν περιγεγραμμένον, ἐν δὲ τῇ μείζονι ἐγγεγραμμένον. ὅτι δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, οὕτως δειχθήσεται. ἔστω γὰρ ἡ κ δ διάμετρος κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ, τῶν κ, δ σημείων ὄντων, καθ᾽ ἃ ἅπτονται τοῦ α β γ δ κύκλου αἱ δύο πλευραὶ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου, διῃρημένης δὲ τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὴν κ δ ὀρθοῦ πρὸς τὸν α β γ δ κύκλον. καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν, διαιρεθήσεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου. καὶ φανερὸν ὅτι τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἐπιπέδῳ. ἀμφοτέρων γὰρ τῶν ἐπιφανειῶν



πέρας

πέρας ἐστὶν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια τοῦ περὶ διάμετρον τὴν κ δ, ὀρθοῦ πρὸς τὸν α β γ δ κύκλον, καί εἰσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι. καὶ περιλαμβάνεται ἡ ἑτέρα αὐτῶν ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἐπιφανείας, καὶ τῆς ἐπιπέδου τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης. ἐλάσσων οὖν ἐστὶν ἡ περιλαμβανομένη τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια, τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ τοῦ λοιποῦ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν.

κη Τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν, ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου, οὔσαις παραλλήλοις τινὶ τῶν ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινουσῶν. τὸ γὰρ περιγεγραμμένον περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν, ἐγγέγραπται εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν. τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου ἐν τῇ σφαίρᾳ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν, δέδεικται ὅτι τῇ ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστὶν ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου, καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου, οὔσαις παραλλήλοις τινὶ τῶν ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινουσῶν. δῆλον οὖν ἐστὶ τὸ προειρημένον.

κθ Τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὴν σφαῖραν, ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ. ἔστω γὰρ ἥ τε σφαῖρα καὶ ὁ κύκλος καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον προκειμένοις. καὶ ὁ λ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ ἔστω τοῦ προκειμένου περιγεγραμμένου περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν. ἐπεὶ οὖν ἐν τῷ ε ζ η θ κύκλῳ πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγέγραπται, καὶ ἀρτιογώνιον, αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ πολυγώνου πλευρὰς παράλληλοι οὖσαι τῇ θ ζ πρὸς τὴν ζ θ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν, ὃν ἡ κ θ πρὸς κ ζ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου, τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ζ θ κ. ὥστε ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ λ κύκλου ἴσον δύναται τῷ ὑπὸ ζ θ κ. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ λ κύκλου τῆς θ κ. ἡ δὲ θ κ ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τοῦ α β γ δ κύκλου. διπλασία γάρ ἐστι τῆς χ ς, οὔσης ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α β γ δ κύκλου. δῆλον οὖν ὅτι μείζων ἐστὶν ἢ τετραπλάσιος ὁ λ κύκλος, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν, τοῦ μεγίστου κύκλου τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ.

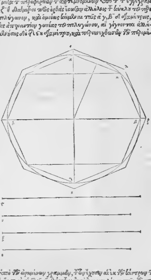


Τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν ἴσος ἐστὶ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. τὸ γὰρ περιγεγραμμένον σχῆμα περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν, ἐγγέγραπται ἐν τῇ μείζονι σφαίρᾳ. τῷ δὲ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν, δέδεικται ἴσος κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. αὕτη δέ ἐστιν ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. δῆλον οὖν ἐστὶ τὸ προτεθέν. ἐκ τούτου δὲ φανερόν, ὅτι τὸ σχῆμα τὸ περιγραφόμενον περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν μεῖζόν ἐστιν ἢ τετραπλάσιον κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἐπειδὴ γὰρ ἴσος ἐστὶ τῷ σχήματι κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ, τουτέστι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. ἔστι δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν μείζων ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν

ἐν

ἐν τῇ σφαίρᾳ. μείζων ἄρα ἢ τετραπλάσιον ἔσται τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὴν σφαῖραν τοῦ κώνου, βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἐπειδὴ καὶ ὁ κῶνος ἴσος αὐτῷ, μείζων ἢ τετραπλάσιος γίνεται τοῦ εἰρημένου. βάσιν τε γὰρ μείζονα, ἢ τετραπλασίαν ἔχει, καὶ ὕψος ἴσον.

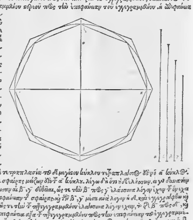
Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ σχῆμα ἐγγεγραμμένον, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον ὑπὸ ὁμοίων πολυγώνων, τὸν αὐτὸν τρόπον τοῖς πρότερον κατεσκευασμένοις, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐπιφάνειαν, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου περὶ τὸν μέγιστον κύκλον, πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ. αὐτὸ δὲ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον, τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἔστω ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ α β γ δ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸν πολύγωνον ἰσόπλευρον. τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος. καὶ ἄλλο περιγεγράφθω περὶ τὸν κύκλον, ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ. αἱ δὲ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευραὶ ἐπιψαυέτωσαν τοῦ κύκλου κατὰ μέσα τῶν περιφερειῶν τῶν ἀποτεμνομένων ὑπὸ τῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου πλευρῶν. αἱ δὲ ε η, ζ θ διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἔστωσαν ἀλλήλαις τοῦ κύκλου τοῦ περιλαμβάνοντος τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον, καὶ ὁμοίως κείμεναι ταῖς α γ, β δ διαμέτροις, καὶ νοείσθωσαν ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τὰς ἀπεναντίον γωνίας τοῦ πολυγώνου, αἳ γίγνονται ἀλλήλαις τε καὶ τῇ β ζ, θ δ παράλληλοι, μενούσης δὲ τῆς ε η διαμέτρου, καὶ περιενεχθεισῶν τῶν περιμέτρων τῶν πολυγώνων περὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν. τὸ μὲν περιγεγραμμένον σχῆμα ἔσται ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον. δεικτέον οὖν ὅτι ἡ μὲν ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ε λ πρὸς α κ. τὸ δὲ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἔστω γὰρ ὁ μὲν μ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὴν σφαῖραν. ὁ δὲ ν ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου. δύναται ἄρα τοῦ μὲν μ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ε λ καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου τοῦ περιγεγραμμένου. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν, τὸ ὑπὸ τῆς α κ καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ πολύγωνα, ὅμοια ἂν εἴη καὶ τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ τῶν εἰρημένων γραμμῶν, τουτέστι τῶν ἐπὶ τὰς γωνίας, ἢ τὰς πλευρὰς τῶν πολυγώνων. ὥστε τὸν αὐτὸν λόγον ἕξει πρὸς ἄλληλα, ὃν ἔχουσιν αἱ τῶν πολυγώνων πλευραὶ δυνάμει.



ἀλλὰ καὶ ὃν ἔχει λόγον τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν εἰρημένων γραμμῶν, τοῦτον ἔχουσιν αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν μ, ν κύκλων πρὸς ἀλλήλας δυνάμει. ὥστε καὶ αἱ τῶν μ, ν διάμετροι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς τῶν πολυγώνων πλευραῖς. οἱ δὲ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους διπλασίονα λόγον ἔχουσι τῶν διαμέτρων, οἵτινές εἰσιν ἴσοι ταῖς ἐπιφανείαις τοῦ περιγεγραμμένου καὶ ἐγγεγραμμένου. δῆλον οὖν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος εἰς τὴν

τὴν σφαῖραν, διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ε λ πρὸς α κ. εἰλήφθωσαν δὴ δύο κῶνοι οἱ ο, ξ. καὶ ἔστω ὁ μὲν ξ κῶνος βάσιν ἔχων τὸν ξ κύκλον, ἴσον τῷ μ. ὁ δὲ ο, βάσιν ἔχων τὸν ο κύκλον, ἴσον τῷ ν, ὕψος δὲ ὁ μὲν ξ κῶνος τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ὁ δὲ ο τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν α κ καθετον ἠγμένην. ἴσος ἄρα ὁ μὲν ξ κῶνος τῷ σχήματι τῷ περιγεγραμμένῳ περὶ τὴν σφαῖραν. ὁ δὲ ο τῷ ἐγγεγραμμένῳ. δέδεικται γὰρ ταῦτα. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ πολύγωνα, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ε λ πρὸς α κ, ὃν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὴν α κ κάθετον ἀγομένην. τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ ὕψος τοῦ ξ κώνου, πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ο κώνου, ὃν ἡ ε λ πρὸς α κ. ἔχει δὲ καὶ ἡ διάμετρος τοῦ μ κύκλου, πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ν κύκλου λόγον, ὃν ἔχει ἡ ε λ πρὸς α κ. τῶν ἄρα ξ, ο κώνων αἱ διάμετροι τῶν βάσεων τοῖς ὕψεσι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον. ὅμοιοι ἄρα εἰσί. καὶ διὰ τοῦτο τριπλασίονα λόγον ἔχει ὁ ξ κῶνος πρὸς τὸν ο κῶνον, ἤπερ ἡ διάμετρος τοῦ μ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ν κύκλου. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ε λ πρὸς α κ.

κα Πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ. ἔστω γὰρ σφαῖρά τις, καὶ ἔστω τετραπλάσιος τοῦ μεγίστου κύκλου ὁ α. λέγω ὅτι ὁ α ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον μείζων ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τοῦ κύκλου. ἔστι δὴ δύο μεγέθη ἄνισα, ἥτε ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, καὶ ὁ α κύκλος, δυνατὸν ἄρα ἐστὶ λαβεῖν δύο εὐθείας ἀνίσους, ὥστε τὴν μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα, λόγον ἔχειν ἐλάσσονα τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας πρὸς τὸν κύκλον. εἰλήφθωσαν αἱ β, γ. καὶ τῶν β γ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ δ. νοείσθω δὲ καὶ ἡ σφαῖρα ἐπιπέδῳ τετμημένη διὰ τοῦ κέντρου κατὰ τὸν ε ζ η θ κύκλον. νοείσθω δὲ καὶ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένον καὶ περιγεγραμμένον πολύγωνον, ὥστε ὅμοιον εἶναι τὸ περιγεγραμμένον τῷ ἐγγεγραμμένῳ πολυγώνῳ. καὶ τὴν τοῦ περιγεγραμμένου πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ ὃν ἔχει ἡ β πρὸς τὴν δ. καὶ ὁ διπλάσιος ἄρα λόγος τοῦ διπλασίου λόγου ἐστὶν ἐλάσσων. καὶ τοῦ μὲν τῆς β πρὸς δ, διπλάσιός ἐστιν ὁ τῆς β πρὸς τὴν γ. τῆς δὲ πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου, διπλάσιος ὁ τῆς ἐπιφανείας περιγεγραμμένου στερεοῦ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου. ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας πρὸς τὸν α κύκλον. ὅπερ ἄτοπον. ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μείζων ἐστίν, ἡ δὲ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος τοῦ α κύκλου ἐλάσσων ἐστί. δέδεικται γὰρ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσων τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ἡ τετραπλασία.

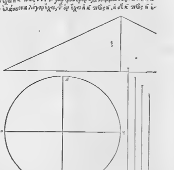


τοῦ δὲ μεγίστου κύκλου τετραπλάσιός ἐστιν ὁ α κύκλος. οὐκ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας μείζων ἐστὶ τοῦ α κύκλου. λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων. εἰ γὰρ δυνατόν ἔστω, καὶ ὁμοίως εὑρήσθωσαν αἱ β, γ εὐθεῖαι, ὥστε τὴν β πρὸς γ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ ὃν ἔχει ὁ α κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, καὶ τῶν β, γ μέση ἀνάλογον ἡ δ. καὶ ἐγγεγράφθω καὶ περιγεγράφθω πάλιν, ὥστε τὴν τοῦ περιγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, τοῦ τῆς β πρὸς δ, καὶ τὰ διπλάσια ἄρα. ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ α κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. ὅπερ ἄτοπον. ἡ μὲν γὰρ

νου ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ α κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. ὅπερ ἄτοπον. ἡ μὲν γὰρ τοῦ περιγεγραμμένου ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τοῦ α κύκλου. ἡ δὲ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσων τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. οὐκ ἄρα ἐστὶν ἐλάσσων ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τοῦ α κύκλου. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μείζων. ἡ ἄρα ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἴση ἐστὶ τῷ α κύκλῳ, τουτέστι τῷ τετραπλασίῳ τοῦ μεγίστου κύκλου.

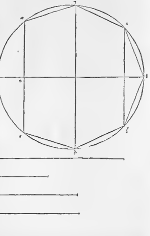
λβ

Πᾶσα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶ κώνου, βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἔστω γὰρ σφαῖρά τις, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ. εἰ οὖν μή ἐστιν ἡ σφαῖρα τετραπλασία τοῦ εἰρημένου κώνου, ἔστω εἰ δυνατὸν μείζων ἢ τετραπλασία. ἔστω δὲ ὁ ξ κῶνος βάσιν μὲν ἔχων τετραπλασίαν τοῦ α β γ δ κύκλου, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. μείζων οὖν ἐστιν ἡ σφαῖρα τοῦ ξ κώνου. ἔσται δὴ δύο μεγέθη ἄνισα, ἥ τε σφαῖρα καὶ ὁ κῶνος, δυνατὸν οὖν δύο εὐθείας λαβεῖν ἀνίσους, ὥστε ἔχειν τὴν μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα λόγον ἐλάσσονα, τοῦ ὃν ἔχει ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν ξ κῶνον. ἔστωσαν οὖν αἱ κ, η. αἱ δὲ ι, θ εἰλημμέναι, ὥστε τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχειν, τὴν κ τῆς ι, καὶ τὴν ι τῆς θ, καὶ τὴν θ τῆς η. νοείσθω δὲ καὶ εἰς τὸν α β γ δ κύκλον ἐγγεγραμμένον πολύγωνον, οὗ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν μετρείσθω ὑπὸ τετράδος. καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ, καθάπερ ἐπὶ τοῦ πρότερον, ἡ δὲ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω τοῦ ὃν ἔχει ἡ κ πρὸς ι. καὶ ἔστωσαν αἱ α γ, β δ διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις. εἰ οὖν μενούσης τῆς α γ διαμέτρου, περιενεχθείη τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ τὰ πολύγωνα, ἔσται τὸ σχῆμα τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὸ δὲ περιγεγραμμένον. καὶ ἕξει τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον, ἤπερ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν α β γ δ κύκλον. ἡ δὲ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κ πρὸς τὴν ι. ὥστε τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τριπλασίονα τοῦ κ πρὸς ι. ἔχει δὲ καὶ ἡ κ πρὸς η μείζονα λόγον, ἢ τριπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ κ πρὸς ι. τοῦτο γὰρ φανερὸν διὰ λημμάτων. πολλῷ ἄρα τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ κ πρὸς η. ἡ δὲ κ πρὸς η ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν ξ κῶνον, καὶ ἐναλλάξ, ὅπερ ἀδύνατον. τὸ γὰρ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον μεῖζόν ἐστι τῆς σφαίρας. τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον ἔλασσον τοῦ ξ κώνου. διὰ τὸ μὲν ξ κῶνος τετραπλάσιος ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ α β γ δ κύκλῳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον τοῦ εἰρημένου κώνου, ἢ τετραπλάσιον. οὐκ ἄρα μείζων ἢ τετραπλασία ἡ σφαῖρα τοῦ εἰρημένου. ἔστω εἰ δυνατὸν ἐλάσσων ἢ τετραπλασία, ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ἡ σφαῖρα τοῦ ξ κώνου. εἰλήφθωσαν δὴ αἱ κ, η εὐθεῖαι, ὥστε τὴν κ μείζονα εἶναι τῆς η, καὶ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν πρὸς αὐτήν, τοῦ ὃν ἔχει ὁ ξ κῶνος πρὸς τὴν σφαῖραν. καὶ αἱ θ, ι ἐκκείσθωσαν καθὼς πρότερον, καὶ εἰς τὸν α β γ δ κύκλον νοείσθω πολύγωνον ἐγγεγραμμένον, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον. ὥστε τὴν πλευρὰν τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἤπερ ἡ κ πρὸς ι, καὶ τὰ ἄλλα κατεσκευασμένα τὸν αὐτὸν τρόπον τοῖς πρότερον. ἕξει ἄρα καὶ τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν σχῆμα, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον, ἤπερ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν α β γ δ κύκλον, πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἡ δὲ πλευρὰ πρὸς τὴν



πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κ πρὸς ι. ἕξει οὖν τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἐλάσσονα λόγον ἢ τριπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ κ πρὸς τὴν ι. ἡ δὲ κ πρὸς τὴν η μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τριπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ κ πρὸς τὴν ι. ὥστε ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἢ ἡ κ πρὸς τὴν η. ἡ δὲ κ πρὸς τὴν η, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ ξ κῶνος πρὸς τὴν σφαῖραν, ὅπερ ἀδύνατον. τὸ μὲν γὰρ ἐγγεγραμμένον ἔλασσον ἐστὶ τῆς σφαίρας, τὸ δὲ περιγεγραμμένον μεῖζον τοῦ ξ κώνου. οὐκ ἄρα οὐδὲ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία ἡ σφαῖρα τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ α β γ δ κύκλῳ. ὕψος δὲ τὴν ἴσην τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ μείζων, τετραπλασία ἄρα.

Προδεδειγμένων δὲ τούτων, φανερὸν ὅτι πᾶς κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ἡμιόλιος ἐστὶ τῆς σφαίρας. ὁ μὲν γὰρ κύλινδρος ὁ προειρημένος ἑξαπλάσιος ἐστὶ τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. ἡ δὲ σφαῖρα δέδεικται τοῦ αὐτοῦ κώνου τετραπλασία οὖσα. δῆλον οὖν, ὅτι ὁ κύλινδρος ἡμιόλιος ἐστὶ τῆς σφαίρας. πάλιν ἐπεὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῶν βάσεων ἴση δέδεικται κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέση ἀνὰ λόγον ἐστὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου πλευρᾶς, καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως. τοῦ δὲ εἰρημένου κυλίνδρου περὶ τὴν σφαῖραν, ἡ πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως, δῆλον ὅτι ἡ μέση αὐτῶν ἀνὰ λόγον, ἴση γίνεται τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως. ὁ δὲ κύκλος ὁ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων ἴσην τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως, τετραπλάσιος ἐστὶ τῆς βάσεως τῆς τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ. ἔσται ἄρα καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῶν βάσεων, τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου. ὅλη ἄρα μετὰ τῶν βάσεων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἑξαπλασία ἔσται τοῦ μεγίστου κύκλου. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου. ὅλη ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἡμιολία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

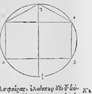


κγ

Η ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος εἰς τὸ τμῆμα τῆς σφαίρας, ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἐν τῷ τμήματι τοῦ μεγίστου κύκλου, καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς παραλλήλοις τῇ βάσει τοῦ τμήματος, σὺν τῇ ἡμισείᾳ τῆς τοῦ τμήματος βάσεως. ἔστω σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ τμῆμα, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν α η κύκλος. ἐγγεγράφθω σχῆμα εἰς αὐτὸ οἷον εἴρηται, περιεχόμενον ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν. καὶ μέγιστος κύκλος ὁ α η θ. καὶ ἀρτιόπλευρον πολύγωνον τὸ α γ ε θ ζ δ η χωρὶς τῆς α η πλευρᾶς. καὶ εἰλήφθω κύκλος ὁ λ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς α γ πλευρᾶς, καὶ ὑπὸ πασῶν τῶν ε ζ, γ δ. καὶ ἔτι τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως, τουτέστι τῆς α κ. δεικτέον οὖν, ὅτι ὁ λ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ τοῦ σχήματος ἐπιφανείᾳ. εἰλήφθω γὰρ κύκλος ὁ μ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ε θ πλευρᾶς, καὶ τῆς ἡμισείας

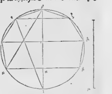
μισείας τῆς ε ζ. γίνεται δὴ ὁ μ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὴν ε ζ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ θ σημεῖον. εἰλήφθω δὲ καὶ ἄλλος ὁ ν. οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ε γ. καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρου τῆς ε ζ, γ δ. ἔσται οὗτος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ε ζ, γ δ. καὶ ἄλλος ὁμοίως ὁ ξ εἰλήφθω κύκλος. οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς α γ καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρων τῶν γ δ, α η. καὶ αὐτὸς ἔσται ἴσος ἐστὶ τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τοῦ κατὰ τὰς α η, γ δ. πάντες οὖν οἱ κύκλοι ἴσοι ἔσονται τῇ ὅλῃ τοῦ σχήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων αὐτῶν ἴσον δυνήσονται τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς τῆς α γ, καὶ τῆς ἴσης ταῖς ε ζ, γ δ. καὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς βάσεως τῇ α κ. ἐδύνατο δὲ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ λ κύκλου, ἴσον τῷ αὐτῷ χωρίῳ. ὁ ἄρα λ κύκλος ἴσος ἔσται τοῖς μ, ν, ξ κύκλοις. ὥστε καὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος.

Τετμήσθω σφαῖρα μὴ διὰ τοῦ κέντρου ἐπιπέδῳ, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ α ε ζ, τέμνων πρὸς ὀρθὰς τὸ ἐπίπεδον τὸ τέμνον. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ α β γ πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόγωνον, χωρὶς τῆς βάσεως τῆς α β. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον ἐὰν μενούσης τῆς γ ζ περιενεχθῇ τὸ σχῆμα, αἱ μὲν δ, ε, α, β γωνίαι κατὰ κύκλων οἰσθήσονται, ὧν διάμετροι αἱ δ ε, α β. αἱ δὲ πλευραὶ τοῦ τμήματος, κατὰ κωνικῆς ἐπιφανείας. καὶ ἔσται τὸ γενηθὲν σχῆμα στερεὸν ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον, βάσιν μὲν ἔχον κύκλον οὗ διάμετρος ἡ α β, κορυφὴν δὲ τὸ γ. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον τὴν ἐπιφάνειαν ἐλάσσονα ἕξει, τῆς τοῦ τμήματος ἐπιφανείας τοῦ περιλαμβάνοντος. τὸ γὰρ αὐτὸ πέρας αὐτῶν ἐστὶν ἐν ἐπιπέδῳ τοῦ τε τμήματος, καὶ τοῦ σχήματος ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ α β. καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι ἀμφότεραι εἰσὶν αἱ ἐπιφάνειαι, καὶ περιλαμβάνεται ἡ ἑτέρα ὑπὸ τῆς ἑτέρας.



λδ

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ἐν τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος. ἔστω σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ α β ε ζ. καὶ ἔστω τμῆμα ἐν τῇ σφαίρᾳ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν α β. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τὸ εἰρημένον σχῆμα. καὶ ἐν τῷ τμήματι τοῦ κύκλου πολύγωνον, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτά, διαμέτρου μὲν τῆς σφαίρας οὔσης τῆς θ λ. ἐπεζευγμένων δὲ τῶν λ ε, θ α. καὶ ἔστω κύκλος ὁ μ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔστω τῇ α θ. δεικτέον ὅτι ὁ μ κύκλος μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ σχήματος ἐπιφανείας. ἡ γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος δέδεικται ἴση οὖσα κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ε θ, καὶ τῶν ε ζ, γ δ, κ α. τὸ δὲ ὑπὸ τῆς ε θ, καὶ τῶν ε ζ γ δ, κ α δέδεικται ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ε λ, κ θ περιεχομένῳ. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ε λ, κ θ, ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς α θ. καὶ γὰρ τοῦ ὑπὸ λ θ, θ κ, ἴσου ὄντος τῷ ἀπὸ θ α. φανερὸν οὖν ὅτι ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ὅς ἐστιν ἴσος ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ. δῆλον ἄρα, ὅτι ὁ μ κύκλος μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος.

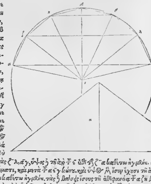


λε

Τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ τμήματι ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον, σὺν τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν τὴν αὐτὴν ἔχοντι τῷ σχήματι, κορυφὴν δὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ τοῦ πολυγώνου κάθετον ἠγμένην. ἔστω γὰρ σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος, καὶ τμῆμα ἔλασσον ἡμικυκλίου τὸ α β γ. καὶ κέντρον τὸ ε. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ α β γ τμῆμα πολύγωνον ἀρτιόπλευρον χωρὶς τῆς α γ, ὁμοίως τοῖς πρότερον. καὶ μενούσης τῆς β ε περιενεχθεῖσα ἡ σφαῖρα ποιείτω σχῆμά τι ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον. καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν α γ, κῶνος ἀναγεγράφθω κορυφὴν ἔχων τὸ κέντρον. καὶ εἰλήφθω κῶνος ὁ κ, βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τοῦ ε κέντρου ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου κάθετον ἠγμένην. δεικτέον ὅτι ὁ κ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ σχήματι, σὺν τῷ κώνῳ τῷ α ε γ. ἀναγε-

 γράφθω

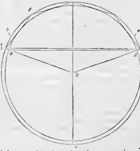
γεγράφθωσαν δὲ καὶ κῶνοι ἀπὸ τῶν κύκλων τῶν περὶ διαμέτρους τὰς κ θ, ζ λ, κορυφὴν ἔχοντες τὸ ε σημεῖον. ἔσται δὴ τὸ κ β θ ε ῥόμβος στερεὸς ἴσος ἐστὶ κώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κ β θ κώνου, τὸ ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὴν κ β ἀγομένῃ καθέτῳ. τὸ δὲ περίλειμμα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ἐπὶ τὰς κ θ, ζ λ, καὶ τῆς κωνικῆς τῶν ζ ε λ, κ ε θ, ἴσον ἐστὶ κώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἐστιν ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ἐπὶ τὰς κ θ, ζ λ, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὴν ζ κ καθέτῳ ἠγμένῃ. πάλιν τὸ περίλειμμα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ἐπὶ τὰς ζ λ, α γ, καὶ τῆς κωνικῆς τῶν α ε γ, ζ ε λ, ἴσον ἐστὶ κώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ἐπὶ τὰς ζ λ, α γ, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὴν ζ α καθέτῳ ἠγμένῃ.



οἱ δὲ εἰρημένοι κῶνοι ἴσοι ἔσονται τῷ σχήματι, καὶ μετὰ τοῦ α ε γ κώνου. καὶ ὕψος μὲν ἴσον ἔχουσι τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. τὰς δὲ βάσεις ἴσους τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ α ζ κ β λ γ σχήματος. ἔχει δὲ καὶ ὁ κ κῶνος τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ βάσιν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ κῶνος τοῖς εἰρημένοις κώνοις. οἱ δὲ εἰρημένοι κῶνοι ἐδείχθησαν ἴσοι τῷ σχήματι, καὶ τῷ α ε γ κώνῳ. καὶ ὁ κ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ τε σχήματι, καὶ τῷ ε α γ κώνῳ. ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, μείζων ἐστὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος σὺν τῷ κώνῳ. ὁ γὰρ προειρημένος κῶνος μείζων ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ ἴσου τῷ σχήματι, σὺν τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν βάσιν τοῦ τμήματος, τὴν δὲ κορυφὴν πρὸς τῷ κέντρῳ, τουτέστι τὴν βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. ἥ τε γὰρ βάσις τῆς βάσεως μείζων ἐστί. δέδεικται γὰρ τοῦτο, καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὕψους.

κζ

Ἔστω σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ. καὶ τετμήσθω ἔλασσον ἡμικυκλίου ὃ ἀποτέμνει ἡ α β. καὶ κέντρον τὸ δ. καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ δ ἐπὶ τὰ α β ἐπεζεύχθωσαν αἱ α δ, δ β. καὶ περὶ τὸν γενηθέντα τομέα περιγεγράφθω πολύγωνον, καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος. ἕξει δὴ τὸ αὐτὸ κέντρον τῷ α β γ κύκλῳ. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς ε κ, περιενεχθὲν τὸ πολύγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὁ περιγεγραμμένος κύκλος ἐπὶ ἐπιφανείας οἰσθήσεται σφαίρας. καὶ αἱ γωνίαι τοῦ πολυγώνου κύκλους γράψουσιν, ὧν αἱ διάμετροι ἐπιζευγνύουσι τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου, οὖσαι παράλληλοι



παράλληλοι τῇ α β. τὰ δὲ σημεῖα καθ᾽ ἃ ἅπτονται τοῦ ἐλάσσονος κύκλου αἱ τοῦ πολυγώνου πλευραί, κύκλους γράψουσιν ἐν τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ, ὧν διάμετροι ἔσονται αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς ἁφάς, παράλληλοι οὖσαι τῇ α β. αἱ δὲ πλευραὶ ἐπὶ κωνικῶν ἐπιφανειῶν οἰσθήσονται. καὶ ἔσται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν ζ κ κύκλος. ἡ δὲ τοῦ εἰρημένου σχήματος ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ ἐλάσσονος τμήματος ἐπιφανείας. ἡ βάσις ὁ περὶ τὴν α β κύκλος. ἤχθωσαν γὰρ ἐφαπτόμεναι αἱ α μ, β ν. καὶ ἐπὶ κωνικῆς ἄρα ἐπιφανείας οἰσθήσονται. καὶ τὸ σχῆμα τὸ γενηθὲν ὑπὸ τοῦ πολυγώνου τοῦ α μ, β ν ἕξει μείζονα τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας. ἡ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν α β κύκλος ἐστί. πέρας γὰρ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ ἔχουσιν τὸν περὶ διάμετρον τὴν α β κύκλον καὶ περιλαμβάνονται τὸ τμῆμα ὑπὸ τοῦ σχήματος. ἀλλ᾽ ἡ γεγενημένη ὑπὸ τῶν ζ μ, κ ν ἐπιφάνεια κώνου, μείζων ἐστὶ τῆς γεγενημένης ὑπὸ τῶν μ α, ν β. ἡ μὲν γὰρ ζ μ τῆς μ α μείζων ἐστί. ὑπὸ γὰρ ὀρθὴν ὑποτείνει. ἡ δὲ ν κ τῆς ν β. ὅταν δὲ τοῦτο ᾖ, μείζων ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας, ταῦτα γὰρ δέδεικται ἐν τοῖς λήμμασι. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ τμήματος ἐπιφανείας τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. καὶ φανερόν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος τοῦ περὶ τὸν τομέα, ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου, καὶ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν πασῶν τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου, καὶ τῆς ἐπὶ ἡμισείας τῆς βάσεως τοῦ εἰρημένου πολυγώνου. * ἐγγεγραμμένου σχῆμα, ἐγγεγραμμένον ἐστὶν εἰς τὸ τμῆμα τῆς μείζονος σφαίρας τοῦτο δὲ δῆλον, διὰ τὸ περιγεγραμμένον.

Τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος τῷ τομεῖ, ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ κύκλου. οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἠγμένῃ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος. ἔστω γὰρ σφαῖρα, καὶ μέγιστος κύκλος ἐπ᾽ αὐτῆς ὁ α β γ δ. καὶ κέντρον τὸ ε, καὶ περὶ τὸν τομέα περιγεγράφθω τὸ λ κ ζ πολύγωνον, καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος περιγεγράφθω. τὸ γενέσθω σχῆμα, καθάπερ πρότερον. καὶ ἔστω κύκλος ὁ ν, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου, καὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας σὺν τῇ ἡμισείᾳ τῆς κ λ. ἀλλὰ τὸ εἰρημένον χωρίον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς μ θ καὶ ζ κ. ὃ δή ἐστιν ὕψος τοῦ τμήματος τῆς μείζονος σφαίρας. τοῦτο γὰρ προδέδεικται. τοῦ ἄρα ν κύκλου ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ ὑπὸ μ θ, κ ζ περιεχομένῳ. ἀλλ᾽ ἡ μὲν κ ζ μείζων ἐστὶ τῆς δ ξ, ὅ ἐστιν ὕψος τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. ἐὰν γὰρ ἐπιζεύξωμεν τὴν κ ζ, ἔσται παράλληλος τῇ δ α. ἔστι δὲ καὶ ἡ α β τῇ κ λ παράλληλος, καὶ κοινὴ ἡ ζ ε. ὅμοιον ἄρα τὸ ζ κ η τρίγωνον, τῷ δ α ξ τριγώνῳ καὶ ἔστι μείζων ἡ ζ κ τῆς α δ. μείζων ἄρα καὶ ἡ ζ κ τῆς δ ξ. ἴση δὲ ἡ μ θ τῇ διαμέτρῳ τῇ γ δ. ἐὰν ἐπιζευχθῇ ἡ ε κ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν μ ο τῇ ο ζ, ἡ δὲ θ ε τῇ ε ζ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ε ο τῇ μ θ. διπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ μ θ τῆς ε ο. ἀλλὰ καὶ ἡ γ δ διπλασία ἐστὶ τῆς ε ο. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μ θ τῇ γ δ. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν γ δ, δ ξ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς α δ. ἡ ἄρα τοῦ



σχήματος τοῦ α ζ λ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος, ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος τοῦ περὶ διάμετρον τὴν α β. ὁ γὰρ ν κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν τομέα σχήματος.

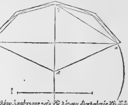
Γίνεται δὴ καὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα περὶ τὸν τομέα σὺν τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν κ λ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον, ἴσον κώνῳ οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν πλευρὰν καθέτῳ ἠγμένῃ, ἢ δὴ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. τὸ γὰρ περιγεγραμμένον σχῆμα περὶ τομεῖ, ἐγγεγραμμένον ἐστὶν εἰς τὸ τμῆμα τῆς

μα τῆς μείζονος σφαίρας, ἧς κέντρον ἐστὶ τὸ αὐτό. δῆλον οὖν τὸ λεγόμενον ἐστὶν ἐκ τοῦ περιγεγραμμένου. ἐκ τούτου δὲ φανερόν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ μεῖζόν ἐστι κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, ὕψος δὲ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. ὁ γὰρ ἴσος κῶνος τῷ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ τὴν μὲν βάσιν μείζονα ἕξει τοῦ εἰρημένου κύκλου, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. ἔστω πάλιν σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος, καὶ τμῆμα ἔλασσον ἡμικυκλίου τὸ αβγ. καὶ κέντρον τὸ δ. καὶ εἰς τὸν αβγ τομέα ἐγγεγράφθω πολύγωνον ἀρτιόγωνον, καὶ τούτῳ ὅμοιον περιγεγράφθω, καὶ παράλληλοι ἔστωσαν αἱ πλευραὶ ταῖς πλευραῖς. καὶ κύκλος περιγεγράφθω περὶ τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον. καὶ ὁμοίως τοῖς πρότερον μενούσης τῆς κβ περιενεχθέντες οἱ κύκλοι, ποιείτωσαν σχήματα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα. δεικτέον ὅτι ἡ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνειαν, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ πλευρὰ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου, πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου. τὸ δὲ σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ. ἔστω γὰρ ὁ μ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου, καὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας, καὶ ἔτι τῆς ἡμισείας τῆς εζ. ἔσται δὴ ὁ μ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. εἰλήφθω δὴ καὶ ὁ ν κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, καὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας σὺν τῇ ἡμισείᾳ τῆς αγ. ἔσται δὴ καὶ οὗτος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. ἀλλὰ τὰ εἰρημένα χωρία ἐστὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς εκ πλευρᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αλ πλευρᾶς. καὶ ὡς ἄρα τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, ὁ μ κύκλος πρὸς τὸν ν κύκλον. φανερὸν οὖν ὅτι καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εκ πρὸς τὴν αλ, τὸν δὲ αὐτόν, ὃν καὶ τὸ πολύγωνον. ἔστω πάλιν κῶνος ὁ ξ, βάσιν μὲν ἔχων τῷ μ ἴσην, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. ἴσος δὴ οὗτός ἐστιν ὁ κῶνος τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν εζ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ δ. καὶ ἔστω ἄλλος κῶνος ὁ ο, βάσιν μὲν ἴσην ἔχων τῷ ν, ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὴν αλ, κάθετον ἠγμένην. ἔσται δὴ καὶ οὗτος ἴσος τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν αγ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ δ κέντρον. ταῦτα γὰρ πάντα προγέγραπται. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ εκ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, ὡς ἡ αλ πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ δ, ἐπὶ τὴν αλ κάθετον ἠγμένην. ἐδείχθη δὲ ὡς ἡ εκ πρὸς τὴν αλ, οὕτως ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ κύκλου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν κύκλου. καὶ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον. ἔσται ἄρα ὡς ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ ξ, πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ ο, οὕτω τὸ ὕψος τοῦ ξ κώνου, πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ο κώνου. ὅμοιοι εἰσὶν οἱ κῶνοι. ὁ ξ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν ο κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον. φανερὸν οὖν, ὅτι καὶ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εκ πρὸς αλ.



μ Παντὸς τμήματος σφαίρας, ἐλάσσονος ἡμισφαιρίου, ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας. ἔστω σφαῖρα, ὁ μέγιστος ἐν αὐτῇ κύκλος ὁ αβγ. καὶ τμῆμα ἐν αὐτῇ ἔλασσον ἡμισφαιρίου, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν αγ κύκλος, πρὸς ὀρθὰς ὢν τῷ αβγ κύκλῳ. καὶ εἰλήφθω κύκλος

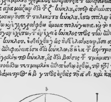
κύκλος ὁ ζ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αβ. δεικτέον ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αβγ τμήματος, ἴση ἐστὶ τῷ ζ κύκλῳ. εἰ γὰρ μή, ἔστω μείζων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ζ κύκλου. καὶ εἰλήφθω τὸ δ κέντρον. καὶ ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὰ α, γ ἐπιζευχθεῖσαι ἐκβεβλήσθωσαν. καὶ δύο μεγεθῶν ἀνίσων ὄντων τῆς τε ἐπιφανείας τοῦ τμήματος, καὶ τοῦ ζ κύκλου, ἐγγεγράφθω εἰς τὸν αβγ τομέα πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιογώνιον, καὶ ἄλλο τούτῳ ὅμοιον περιγεγράφθω. ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας πρὸς τὸν κύκλον. περιενεχθέντος δὲ τοῦ κύκλου ὡς καὶ πρότερον, ἔσται δύο σχήματα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα. ὧν τὸ μὲν περιγεγραμμένον, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον. καὶ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἔσται ὡς τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον.



ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων διπλάσιός ἐστι τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευρά, πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου πλευράν. ἀλλὰ τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τοῦ εἰρημένου τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὸν ζ κύκλον. μείζων δέ ἐστιν ἡ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας τοῦ τμήματος. καὶ ἡ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια ἄρα μείζων ἐστὶ τοῦ ζ κύκλου, ὅπερ ἀδύνατον. δέδεικται γὰρ ἡ εἰρημένη τοῦ σχήματος ἐπιφάνεια ἐλάσσων οὖσα τοῦ τηλικούτου κύκλου. ἔστω πάλιν ὁ κύκλος μείζων τῆς ἐπιφανείας καὶ ὁμοίως περιγεγράφθω καὶ ἐγγεγράφθω ὅμοια πολύγωνα. καὶ τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω, τοῦ ὃν ἔχει ὁ κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σχήματος. οὐκ ἄρα μείζων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ζ κύκλου. ἐδείχθη δὲ ὡς οὐδὲ ἐλάσσων, ἴση ἄρα.

μα

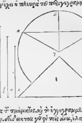
Κἂν μείζων ἡμισφαιρίου ᾖ τμῆμα, ὁμοίως αὐτοῦ ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔσται τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος. ἔστω γὰρ σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος, καὶ νοείσθω τετμημένη ἐπιπέδῳ ὀρθῷ, τῷ ἐπὶ τῇ αδ. καὶ τὸ αβδ ἔλασσον ἔστω ἡμισφαιρίου. καὶ διάμετρος ἡ βγ πρὸς ὀρθὰς τῇ αδ. καὶ ἀπὸ τῶν β, γ ἐπὶ τὸ α ἐπεζεύχθωσαν αἱ βα, αγ. καὶ ἔστω ὁ μὲν ε κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αβ. ὁ δὲ ζ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αγ. ὁ δὲ η κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ γβ. ὁ η κύκλος ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς δυσὶ κύκλοις τοῖς ε, ζ. ὁ δὲ η κύκλος ἴσος ἐστὶν ὅλῃ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας. ἐπειδήπερ ἑκάτερα τετραπλασία ἐστὶ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν βγ κύκλου. ὁ δὲ ε κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ αβδ τμήματος. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐπὶ τοῦ ἐλάσσονος ἡμισφαιρίου. λοιπὸς ἄρα ὁ ζ κύκλος, ἴσος ἐστὶ τῇ τοῦ αγδ τμήματος ἐπιφανείᾳ, ὃ δή ἐστι μεῖζον ἡμισφαιρίου.



μβ

Παντὶ τομεῖ σφαίρας, ἴσος ἐστὶ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας τῆς κατὰ τὸν τομέα, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἔστω σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ αβδ, καὶ κέντρον τὸ γ. καὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον, τὸν ἴσον τῇ κατὰ τὴν αβδ περιφέρειαν ἐπιφανείᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ βγ. δεικτέον ὅτι ὁ τομεὺς ὁ αβγδ ἴσος ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ κώνῳ. εἰ γὰρ μή, ἔστω μείζων ὁ τομεὺς τοῦ κώνου. καὶ κείσθω ὁ θ κῶνος, οἷος εἴρηται. δύο δὴ μεγεθῶν ἀνίσων ὄντων, τοῦ τομέως καὶ τοῦ θ κώνου, εὑρήσθωσαν δύο γραμμαὶ αἱ δ, ε. μείζων δὲ ἡ δ τῆς ε, καὶ ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω ἡ δ πρὸς ε, ἤπερ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον. καὶ εἰλήφθωσαν δύο γραμμαὶ αἱ ζ, η. ὅπως τῷ ἴσῳ ὑπερέχῃ ἡ δ τῆς ζ, καὶ ἡ ζ τῆς η, καὶ ἡ η τῆς ε. καὶ περὶ τὸν ἐπίπεδον τομέα τοῦ κύκλου περιγεγράφθω πολύγωνον

γώνου ἰσοπλεύρου, καὶ ἀρτιογωνίου. καὶ τούτῳ ὅμοιον ἐγγεγράφθω. ὥστε ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πλευρὰ ἐλάσσονα λόγον ἔχει πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, τοῦ ὃν ἔχει ἡ δ πρὸς ζ. καὶ ὁμοίως τοῖς πρότερον περιενεχθέντος τοῦ κύκλου, γεγενήσθω δύο σχήματα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα. τὸ ἄρα περιγεγραμμένον, σὺν τῷ κώνῳ τῷ κορυφὴν ἔχοντι τὸ γ σημεῖον, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ τριπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου. ἀλλὰ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ δ πρὸς ζ. ἐλάσσονα λόγον ἄρα ἕξει, ἢ τριπλάσιον, τὸ εἰρημένον στερεὸν σχῆμα τοῦ τῆς δ πρὸς ζ. ἡ δὲ δ πρὸς ε μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τριπλάσιον τοῦ τῆς δ πρὸς ζ. τὸ ἄρα περιγεγραμμένον σχῆμα στερεὸν τῷ τομεῖ, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ δ πρὸς ε. ἡ δὲ δ πρὸς ε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ στερεὸς τομεὺς πρὸς τὸν θ κῶνον. τὸ ἄρα περιγεγραμμένον τῷ τομεῖ σχῆμα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ στερεὸς τομεὺς πρὸς τὸν θ κῶνον. καὶ ἐναλλάξ. μεῖζον δὲ ἐστὶ τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν σχῆμα τοῦ τμήματος. καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον ἄρα σχῆμα ἐν τῷ τομεῖ, μεῖζόν ἐστι τοῦ θ κώνου. ὅπερ ἀδύνατον. δέδεικται γὰρ ἐν τοῖς ἄνω, ἔλασσον ὂν τοῦ τηλικούτου κώνου, τουτέστι τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἐπιζευγνυμένῃ εὐθείᾳ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος. ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. τοιοῦτος δὲ ἐστὶν ὁ εἰρημένος κῶνος ὁ θ. βάσιν τε γὰρ ἔχει κύκλον ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ τμήματος, τουτέστι τῷ εἰρημένῳ κύκλῳ, καὶ ὕψος ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. οὐκ ἄρα ὁ στερεὸς τομεὺς μείζων ἐστὶ τοῦ θ κώνου. ἔστω δὴ πάλιν ὁ θ κῶνος τοῦ στερεοῦ τομέως μείζων. πάλιν δὴ ὁμοίως ἡ δ πρὸς τὴν ε μείζων αὐτῆς οὖσα, ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω, τοῦ ὃν ἔχει ὁ κῶνος πρὸς τὸν τομέα. καὶ ὁμοίως εἰλήφθωσαν αἱ ζ, η. ὥστε εἶναι τὰς δύο πλευρὰς τὰς αὐτάς, καὶ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν ἐπίπεδον τομέα πολυγώνου ἀρτιογωνίου ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω, τοῦ ὃν ἔχει ἡ δ πρὸς τὴν ζ. καὶ γεγενήσθω τὰ περὶ τὸν στερεὸν τομέα στερεὰ σχήματα. ὁμοίως οὖν δείξομεν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸν τομέα στερεὸν σχῆμα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἡ δ πρὸς ε. καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ θ κῶνος πρὸς τὸν τομέα. ὥστε καὶ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἐγγεγραμμένον στερεὸν ἐν τῷ τμήματι πρὸς τὸ περιγεγραμμένον. μείζων δὲ ἐστὶν ὁ τομεὺς τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸν σχήματος. μείζων ἄρα ὁ θ κῶνος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. ὅπερ ἀδύνατον. δέδεικται γὰρ τοῦτο, ὅτι ὁ τηλικοῦτος κῶνος ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὸν τομέα. ἴσος ἄρα ὁ τομεὺς τῷ θ κώνῳ.



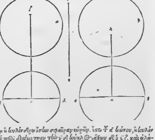
Ἀρχιμήδης

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ
ΚΑΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ ΒΙΒΛΙΟΝ Β.

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΔΩΣΙΘΕΩ ΧΑΙΡΕΙΝ.

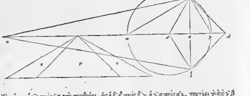
Πρότερον μὲν ἀπέστειλάς μοι γράψαι τῶν προβλημάτων τὰς ἀποδείξεις, ὧν αὐτὸς τὰς προτάσεις ἀπέσταλκα Κόνωνι. συμβαίνει δὲ αὐτῶν τὰ πλεῖστα γράφεσθαι διὰ τῶν θεωρημάτων, ὧν πρότερον ἀπέσταλκά σοι τὰς ἀποδείξεις. ὅτι τε πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, καὶ διὰ ὅτι παντὸς τμήματος σφαίρας τῇ ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ εὐθείᾳ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως ἀγομένῃ. καὶ διότι πάσης σφαίρας ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, αὐτός τε ἡμιόλιός ἐστι τῷ μεγέθει τῆς σφαίρας, καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἡμιολία τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. καὶ διότι πᾶς τομεὺς στερεὸς ἴσος ἐστὶ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας τοῦ ἐν τῷ τομεῖ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ὅσα μὲν οὖν τῶν θεωρημάτων καὶ προβλημάτων γράφεται διὰ τούτων τῶν θεωρημάτων, ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ γράψας ἀπέσταλκά σοι. ὅσα δὲ δι᾽ ἄλλης εὑρίσκονται θεωρίας, τά τε περὶ ἑλικῶν καὶ τὰ περὶ τῶν κωνοειδῶν, πειράσομαι διὰ τάχους ἀποστεῖλαι. τὸ δὲ πρῶτον ἦν τῶν προβλημάτων τόδε· σφαίρας δοθείσης ἐπίπεδον χωρίον εὑρεῖν, ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας. ἔστι δὲ τοῦτο φανερόν, δεδειγμένον ἐκ τῶν προειρημένων θεωρημάτων. τὸ γὰρ τετραπλάσιον τοῦ μεγίστου κύκλου τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ, ἐπίπεδόν τε χωρίον ἐστὶ, καὶ ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας.

Τὸ δεύτερον ἦν κώνου δοθέντος ἢ κυλίνδρου σφαῖραν εὑρεῖν τῷ κώνῳ ἢ τῷ κυλίνδρῳ ἴσην. ἔστω ὁ δεδομένος κῶνος ἢ κύλινδρος ὁ α, καὶ τῷ α ἴση ἡ β σφαῖρα. καὶ κείσθω τοῦ α κώνου ἢ κυλίνδρου ἡμιόλιος κύλινδρος ὁ γζ δ. τῆς δὲ β σφαίρας ἡμιόλιος κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν κθ κύκλος. ἄξων δὲ ὁ κλ ἴσος τῇ διαμέτρῳ τῆς β σφαίρας. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ε κύλινδρος τῷ κ κυλίνδρῳ. τῶν δὲ ἴσων κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ὡς ἄρα ὁ ε κύκλος πρὸς τὸν κ κύκλον, τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς γδ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κθ, οὕτως ἡ κλ πρὸς εζ. ἴση δὲ ἡ κλ τῇ κθ. ὁ γὰρ ἡμιόλιος κύλινδρος τῆς σφαίρας ἴσον ἔχει τὸν ἄξονα τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας. καὶ ὁ κ κύκλος μέγιστός ἐστι τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ γδ πρὸς τὸ ἀπὸ κθ, οὕτως ἡ κθ πρὸς τὴν εζ. ἔστω τῷ ἀπὸ κθ ἴσον τὸ ὑπὸ γδ, μν. ὡς ἄρα ἡ γδ πρὸς μν, οὕτως τὸ ἀπὸ γδ πρὸς τὸ ἀπὸ κθ, τουτέστιν ἡ κθ πρὸς εζ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ γδ πρὸς τὴν κθ, οὕτως ἡ κθ πρὸς τὴν μν, καὶ ἡ μν πρὸς εζ. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἑκατέρα τῶν γδ, εζ. δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν γδ, εζ δύο μέσαι ἀνὰ λόγον εἰσὶν αἱ κθ, μν. δοθεῖσα ἄρα ἑκατέρα τῶν κθ, μν, συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω δὴ ὁ δοθεὶς κῶνος ἢ κύλινδρος ὁ α. δεῖ δὴ τῷ α κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ ἴσην σφαῖραν εὑρεῖν. ἔστω τοῦ α κώνου ἢ κυλίνδρου, ἡμιόλιος κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν γδ κύκλος. ἄξων δὲ ὁ εζ. καὶ εἰλήφθωσαν τῶν γδ, εζ δύο μέσαι ἀνὰ λόγον, αἱ κθ, μν. ὥστε εἶναι ὡς τὴν γδ πρὸς τὴν κθ, οὕτω τὴν κθ πρὸς τὴν μν, καὶ τὴν μν πρὸς τὴν εζ. καὶ νοείσθω κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν κθ κύκλος. ἄξων δὲ ὁ κλ ἴσος τῇ κθ διαμέτρῳ. λέγω δὴ ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ ε κύλινδρος τῷ κ κυλίνδρῳ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ γδ πρὸς κθ, ἡ μν πρὸς εζ. καὶ ἐναλλάξ, καὶ ἴση ἡ κθ τῇ κλ. ὡς ἄρα ἡ γδ πρὸς μν, του-



τέστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς γ λ πρὸς τὸ ἀπὸ ἡ θ, οὕτως ὁ ε κύκλος πρὸς τὸν κ κύκλον. ὡς ἄρα ὁ ε κύκλος πρὸς τὸν κ κύκλον, οὕτως ἡ κ λ πρὸς τὴν ε ζ. τῶν ἄρα ε, κ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις ταῖς ὕψεσιν. ἴσος ἄρα ὁ ε κύλινδρος τῷ κ κυλίνδρῳ. ὁ δὲ κ κύλινδρος τῆς σφαίρας, ἧς διάμετρος ἡ ε θ ἡμιόλιός ἐστι. καὶ ἡ σφαῖρα ἄρα ἧς ἡ διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ η θ, τουτέστιν ἡ β, ἴση ἐστὶ τῷ α κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ.

β Παντὶ τμήματι τῆς σφαίρας ἴσος ἐστὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ εὐθεῖαν, ἥτις πρὸς τὸ ὕψος τοῦ τμήματος τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν συναμφότερος, ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος, πρὸς τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος. ἔστω σφαῖρα, ἐν ᾗ μέγιστος κύκλος οὗ διάμετρος ἡ α γ. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ ἡ σφαῖρα, τῷ διὰ τῆς β ζ πρὸς ὀρθὰς τῇ α γ. καὶ ἔστω κέντρον τὸ θ. καὶ πεποιήσθω ὡς συναμφότερος ἡ θ α, α ε, πρὸς τὴν α ε, οὕτως ἡ δ ε πρὸς γ ε. καὶ πάλιν πεποιήσθω ὡς συναμφότερος ἡ θ γ, γ ε πρὸς γ ε, οὕτως ἡ κ ε πρὸς ε α. καὶ ἀναγεγράφθωσαν κῶνοι ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν β ζ, κορυφὰς ἔχοντες τὰ κ, δ σημεῖα. λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ μὲν β δ ζ κῶνος, τῷ κατὰ τὸ γ τμήματι τῆς σφαίρας. ὁ δὲ β κ ζ τῷ κατὰ τὸ α σημεῖον. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ β θ, θ ζ, καὶ νενοήσθω κῶνος βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλον. κορυφὴν δὲ τὸ θ σημεῖον. καὶ ἔστω κῶνος ὁ μ, βάσιν μὲν ἔχων κύκλον ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ β γ ζ τμήματος τῆς σφαίρας. τουτέστιν οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ β γ. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἔστι δὴ ὁ μ κῶνος ἴσος τῷ β γ θ ζ στερεῷ τομεῖ. τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. ἐπεὶ δὲ ἐστὶν ὡς ἡ δ ε πρὸς ε γ, οὕτω συναμφότερος ἡ θ α, α ε πρὸς α ε διελόντι ἔσται ὡς ἡ γ δ πρὸς γ ε, οὕτως ἡ θ α πρὸς α ε, τουτέστιν ἡ γ θ πρὸς α ε. καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ δ γ πρὸς

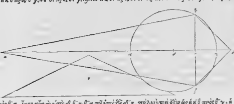


γ θ ἐστὶν, οὕτως ἡ γ ε πρὸς ε α. καὶ συνθέντι, ὡς ἡ θ δ πρὸς θ γ, ἡ γ α πρὸς α ε, τουτέστι τὸ ἀπὸ γ β πρὸς τὸ ἀπὸ β ε. ὡς ἄρα ἡ δ θ πρὸς γ θ, τὸ ἀπὸ γ β πρὸς τὸ ἀπὸ β ε. ἴση δὲ ἐστὶν ἡ γ β τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ κύκλου. ἡ δὲ β ε ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλου. ὡς ἄρα ἡ δ θ πρὸς θ γ, ὁ μ κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλον. καὶ ἔστιν ἴση ἡ θ γ τῷ ἄξονι τοῦ μ κώνου. καὶ ὡς ἄρα ἡ δ θ πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ μ κώνου, οὕτως ὁ μ κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλον, ἴσος ἄρα ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν μ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, τῷ β δ ζ θ στερεῷ ῥόμβῳ. τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς λήμμασι τοῦ πρώτου βιβλίου δέδεικται. ἢ οὕτως, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ δ θ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ μ κώνου, οὕτως ὁ μ κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλον, ἴσος ἄρα ὁ μ κῶνος τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλον, ὕψος δὲ ἡ δ θ. ἀντιπεπόνθασι γὰρ αὐτῶν αἱ βάσεις ταῖς ὕψεσιν. ἀλλ᾽ ὁ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν δ θ. ἴσος ἐστὶ τῷ β δ ζ θ στερεῷ ῥόμβῳ. ἀλλ᾽ ὁ μ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ β γ ζ θ στερεῷ τομεῖ, καὶ ὁ β γ ζ θ στερεὸς τομεὺς ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ β δ ζ θ στερεῷ ῥόμβῳ. κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ κώνου, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ὁ περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ε θ, λοιπὸς ἄρα ὁ β δ ζ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ β ζ γ τμήματι τῆς σφαίρας. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ὁ β κ ζ κῶνος, ἴσος τῷ β α ζ τμήματι τῆς σφαίρας. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς συναμφότερος, ἡ θ γ, γ ε πρὸς γ ε, οὕτως ἡ κ ε πρὸς ε α. διελόντι ἄρα ὡς ἡ κ α πρὸς α ε, οὕτως ἡ θ γ πρὸς γ ε. ἴση δὲ ἡ θ γ τῇ θ α. καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ κ α πρὸς α θ, οὕτως ἡ α ε πρὸς ε γ. ὥστε καὶ συνθέντι, ὡς ἡ κ θ πρὸς θ α, ἡ α γ πρὸς γ ε, τουτέστι τὸ ἀπὸ β α πρὸς τὸ ἀπὸ β ε. κείσθω δὴ πάλιν κύκλος ὁ ν, ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ α β. ὁ ἄρα ν κύκλος ἴσος

ἔσται

ἔσται τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ βεζ τμήματος. καὶ νοείσθω ὁ κῶνος ὁ ν, ἴσον ἔχων τὸ ὕψος τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἴσος ἄρα ἐστὶ τῷ βθζα στερεῷ τομεῖ. τοῦτο γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ δέδεικται. καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς ἡ κθ πρὸς θα, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν κύκλου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλου, τουτέστιν ὁ ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον. ἴση δὲ ἡ αθ τῷ ὕψει τοῦ ν κώνου. ὡς ἄρα ἡ κθ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ κώνου, οὕτως ὁ ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ν κῶνος, τουτέστιν ὁ βθζα τομεὺς τῷ βθζκ σχήματι. κοινὸς προσκείσθω ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὴν βζ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ εθ. ὅλον ἄρα τὸ αβζ τμῆμα τῆς σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ βζκ κώνῳ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. καὶ φανερὸν ὅτι γίγνεται καθόλου τμῆμα σφαίρας πρὸς κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, καὶ ὕψος ἴσον, ὡς συναμφότερος, ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ ἡ κάθετος τοῦ λοιποῦ τμήματος πρὸς τὴν κάθετον τοῦ λοιποῦ τμήματος. ὡς γὰρ ἡ δε πρὸς εγ, οὕτως ὁ δζβ κῶνος, τουτέστι τὸ βγζ τμῆμα πρὸς τὸν βγζ κῶνον.

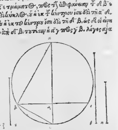
Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, δείξομεν ὅτι καὶ ὁ κβζ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ αζβ τμήματι τῆς σφαίρας. ἔστω γὰρ ὁ ν κῶνος βάσιν μὲν ἔχων τὴν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ κῶνος τῇ σφαίρᾳ. ἡ γὰρ σφαῖρα δέδεικται τετραπλασία τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον, καὶ ὕψος τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ ν κῶνος τοῦ αὐτοῦ ἐστι τετραπλάσιος ἐπεὶ καὶ ἡ βάσις τῆς βάσεως, καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ θα, αε πρὸς αε, ἡ δε πρὸς εγ. διελόντι καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ θγ πρὸς γδ, ἡ αε πρὸς εγ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ κε πρὸς εα, συναμφότερος ἡ θγε πρὸς γε. διελόντι καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ κα πρὸς γθ, τουτέστι πρὸς θα, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ. τουτέστιν ἡ θγ πρὸς γδ καὶ συνθέντι, ἴση δὲ ἡ αθ τῇ θγ, ὡς ἄρα ἡ κθ πρὸς θγ, ἡ θδ πρὸς δγ. καὶ ὅλη ἡ κδ πρὸς δθ. ἔστιν ὡς ἡ δθ πρὸς δγ. τουτέστιν ὡς ἡ κθ



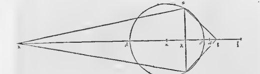
πρὸς θα. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ δθ, κ, θα τῷ ὑπὸ τῶν δκ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θγ, ἡ θδ πρὸς γδ, ἐναλλὰξ ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, ἡ θγ πρὸς γδ. ὡς δὲ ἡ θγ πρὸς γδ, ἐδείχθη ἡ αε πρὸς εγ, ὡς ἄρα ἡ κθ πρὸς θδ, ἡ αε πρὸς εγ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κδ πρὸς τὸ ὑπὸ κθ δ, τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αεγ. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν κθ δ ἴσον ἐδείχθη τῷ ὑπὸ κδ, αθ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κδ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν κδ, αθ, τουτέστιν ἡ κδ πρὸς αθ. τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ὑπὸ αεγ, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ εβ. καί ἐστιν ἴση ἡ αγ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν κύκλου. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν κύκλου πρὸς τὸ ἀπὸ βε, τουτέστιν ὁ ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον, οὕτως ἡ κδ πρὸς αθ. τουτέστιν ἡ κδ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ν κώνου. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ν κῶνος, τουτέστιν ἡ σφαῖρα τῷ βδζκ στερεῷ ῥόμβῳ. ἢ οὕτως ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον, οὕτως ἡ κδ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ν κώνου. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ν κῶνος τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ὁ περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ δκ. ἀντιπεπόνθασιν γὰρ αὐτῶν αἱ βάσεις ταῖς ὕψεσιν. ἀλλ᾽ οὗτος ὁ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ βκζδ στερεῷ ῥόμβῳ. καὶ ὁ ν ἄρα κῶνος, τουτέστιν ἡ σφαῖρα ἴση ἐστὶ τῷ βζκδ στερεῷ ῥόμβῳ, ὧν ὁ βδζ κῶνος ἴσος ἐδείχθη τῷ βγζ τμήματι τῆς σφαίρας. λοιπὸς ἄρα ὁ βκζ κῶνος, ἴσος ἐστὶ τῷ βαζ τμήματι τῆς σφαίρας.

Τρίτον ἦν πρόβλημα τόδε. τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὅπως αἱ τῶν τμημάτων ἐπιφάνειαι πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι. γεγονέτω, καὶ ἔστω τῆς σφαίρας μέγιστος κύκλος ὁ αδβε, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ αβ. καὶ ἐκβεβλήσθω πρὸς τὴν αβ ἐπίπε- γ

δον ὀρθόν. καὶ ποιείτω τὸ ἐπίπεδον ἐν τῷ α δ β ε κύκλῳ τομὴν τὴν δ ε. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α δ, β δ. ἐπεὶ οὖν λόγος ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ δ α ε τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ δ β ε τμήματος. ἀλλὰ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ α ε τμήματος ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α δ. τῇ δὲ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ β ε τμήματος ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ δ β. ὡς δὲ οἱ εἰρημένοι κύκλοι πρὸς ἀλλήλους, οὕτως τὸ ἀπὸ α δ πρὸς τὸ ἀπὸ δ β, τουτέστιν ἡ α γ πρὸς γ β. λόγος ἄρα τῆς α γ πρὸς γ β δοθείς, ὥστε δοθέν ἐστι τὸ γ σημεῖον. καί ἐστι τῇ α β πρὸς ὀρθὰς ἡ δ ε. θέσει ἄρα καὶ τὸ διὰ τῆς δ ε ἐπίπεδον. συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἔστω σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ α β δ ε, καὶ διάμετρος ἡ α β. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς ζ πρὸς η. καὶ τετμήσθω ἡ α β, κατὰ τὸ γ. ὥστε εἶναι ὡς τὴν α γ πρὸς β γ, οὕτως τὴν ζ πρὸς η. καὶ διὰ τοῦ γ ἐπιπέδῳ τετμήσθω ἡ σφαῖρα πρὸς ὀρθὰς τῇ α β εὐθείᾳ. καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ ἡ δ ε καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α δ, δ β. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο κύκλοι οἱ θ, κ, ὁ μὲν θ ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ α δ, ὁ δὲ κ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἴσην ἔχων τῇ δ β. ἔστιν ἄρα ὁ μὲν θ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ α ε τμήματος. ὁ δὲ κ τῇ τοῦ δ β ε τμήματος. τοῦτο γὰρ προδέδεικται ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ α δ β, καὶ κάθετος ἡ γ δ. ἐστιν ὡς ἡ α γ πρὸς γ β, τουτέστιν ἡ ζ πρὸς η, τὸ ἀπὸ α δ πρὸς τὸ ἀπὸ δ β. τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ θ κύκλου, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κ κύκλου. τουτέστιν ὁ θ κύκλος πρὸς τὸν κ κύκλον. τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δ α ε τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ δ β ε τμήματος τῆς σφαίρας.



δ Τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι. ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα ἡ α β γ δ. δεῖ δὴ αὐτὴν τεμεῖν ἐπιπέδῳ, ὥστε τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν δοθέντα. τετμήσθω διὰ τῆς α γ ἐπιπέδῳ, λόγος ἄρα τοῦ α δ γ τμήματος τῆς σφαίρας πρὸς τὸ α β γ τμῆμα τῆς σφαίρας δοθείς. τετμήσθω δὲ ἡ σφαῖρα διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω ἡ τομὴ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ. κέντρον δὲ τὸ κ. καὶ διάμετρος ἡ δ β. καὶ πεποιήσθω, ὡς μὲν συναμφότερος ἡ κ δ χ πρὸς δ χ, οὕτως ἡ ρ χ πρὸς χ β. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ κ β χ πρὸς β χ, οὕτως ἡ λ χ πρὸς χ δ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α λ, λ γ, α ρ, ρ γ. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν α λ γ κῶνος, τῷ α δ γ τμήματι τῆς σφαίρας. ὁ δὲ α ρ γ, τῷ α β γ. λόγος ἄρα καὶ τοῦ α λ γ κώνου πρὸς τὸν α ρ γ κῶνον δοθείς. ὡς δὲ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, οὕτως ἡ λ χ πρὸς χ ρ. ἐπείπερ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχουσι τὸν περὶ διάμετρον τὴν α γ κύκλον. λόγος ἄρα καὶ τῆς λ χ πρὸς χ ρ δοθείς. καὶ διὰ ταῦτα τοῖς πρότερον διὰ τῆς κατασκευῆς, ὡς ἡ λ δ πρὸς κ δ, ἡ κ β πρὸς β ρ,



καὶ ἡ δ χ πρὸς χ β. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ρ β πρὸς β κ, ἡ κ δ πρὸς λ δ. συνθέντι ὡς ἡ ρ κ πρὸς κ β, τουτέστι πρὸς κ δ, οὕτως ἡ κ λ πρὸς λ δ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ ρ λ πρὸς ὅλην τὴν κ λ ἐστίν, ὡς ἡ κ λ πρὸς λ δ. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ρ λ δ, τῷ ἀπὸ λ κ. ὡς ἄρα ἡ ρ λ πρὸς λ δ, τὸ ἀπὸ κ λ πρὸς τὸ ἀπὸ λ δ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ λ δ πρὸς δ κ, οὕτως ἡ δ χ πρὸς χ β. ἔσται ἀνάπαλιν καὶ συνθέντι, ὡς ἡ κ λ πρὸς λ δ, οὕτως ἡ β δ πρὸς δ χ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κ λ πρὸς τὸ ἀπὸ λ δ, οὕτω τὸ ἀπὸ β δ πρὸς τὸ ἀπὸ δ χ. πάλιν

πάλιν ἐπεὶ δεῖ ὡς ἡ λχ πρὸς δχ, συναμφότερος ἡ κβ, βχ πρὸς βχ. διελόντι, ὡς ἡ λδ πρὸς δχ, οὕτως ἡ κβ πρὸς βχ. καὶ κείσθω τῇ κβ ἴση ἡ βζ. ὅτι γὰρ ἐκτὸς τοῦ ε πεσεῖται, δῆλον. καὶ ἔσται ὡς ἡ λδ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ζβ πρὸς βχ. ὥστε καὶ ὡς ἡ δλ πρὸς λχ, ἡ βζ πρὸς ζχ. ἐπεὶ δὲ λόγος ἐστὶ τῆς δλ πρὸς λχ δοθείς, καὶ τῆς ρλ ἄρα πρὸς λχ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς ρλ πρὸς λχ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ρλ πρὸς λδ, καὶ ἡ δλ πρὸς λχ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ δβ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. ὡς δὲ ἡ δλ πρὸς λχ, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζχ. ὁ ἄρα τῆς ρλ πρὸς λχ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, καὶ ἡ βζ πρὸς ζχ. πεποιήσθω δὲ ὡς ἡ ρλ πρὸς λχ, ἡ βζ πρὸς ζθ. λόγος δὲ τῆς ρλ πρὸς λχ δοθείς, λόγος ἄρα καὶ τῆς ζβ πρὸς ζθ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ βζ, ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ζθ, καὶ ὁ τῆς βζ ἄρα λόγος πρὸς ζθ συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, καὶ ἡ βζ πρὸς ζχ. ἀλλ' ὁ βζ πρὸς ζθ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ τῆς βζ πρὸς ζχ, καὶ τοῦ τῆς ζχ πρὸς ζθ. κοινὸς ἀφῃρήσθω ὁ τῆς βζ πρὸς ζχ, λοιπὸς ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ βδ, τουτέστι δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, οὕτως ἡ χζ πρὸς ζθ, τουτέστι πρὸς δοθεῖν. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ζδ. δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν δζ, τεμεῖν δεῖ κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὴν χζ πρὸς δοθεῖσαν τὴν ζθ, οὕτως τὸ δοθὲν τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. τοῦτο δὲ ἁπλῶς μὲν λεγόμενον οὐκ ἔχει διορισμόν. προστιθεμένων δὲ τῶν προβλημάτων, τῶν ἐνθάδε ὑπαρχόντων, τουτέστι τοῦ τε διπλασίαν εἶναι τὴν δβ τῆς βζ, καὶ τοῦ μείζονα τὴν ζθ τῆς βθ, ὡς κατὰ τὴν ἀνάλυσιν οὐκ ἔχει διορισμόν. καὶ ἔσται τὸ πρόβλημα τοιοῦτον. δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν δβ, βζ, καὶ διπλασίας οὔσης τῆς δβ τῆς βζ, καὶ σημείου ἐπὶ τῆς βζ τοῦ θ, τεμεῖν τὴν δβ κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, τὴν χζ πρὸς ζθ. ἑκάτερα δὲ ταῦτα ἐπὶ τέλει ἀναλυθήσεταί τε καὶ συντεθήσεται.

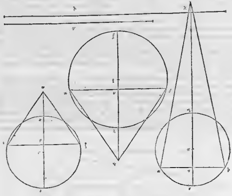
Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω ὁ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς π πρὸς σ, μείζων πρὸς ἐλάσσονα. καὶ δεδόσθω τις σφαῖρα, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω τομὴ ὁ αβγδ κύκλος, καὶ διάμετρος ἔστω ἡ βδ, κέντρον δὲ τὸ κ. καὶ τῇ κβ ἴση κείσθω ἡ βζ, καὶ τετμήσθω ἡ βζ κατὰ τὸ θ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν θζ πρὸς θβ, τὴν π πρὸς σ. καὶ ἔτι τετμήσθω ἡ βδ κατὰ τὸ χ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν χζ πρὸς θζ, τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. καὶ διὰ τοῦ χ ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω ὀρθὸν πρὸς τὸ βδ. λέγω ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει τὴν σφαῖραν, ὥστε εἶναι ὡς τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον, τὴν π πρὸς σ. πεποιήσθω γὰρ ὡς μὲν συναμφότερος ἡ κβ, βχ πρὸς βχ, οὕτως ἡ λχ πρὸς



δχ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ κδ, δχ πρὸς χδ, ἡ ρχ πρὸς χβ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αλ, λγ, αρ, ργ. ἔσται δὴ διὰ τὴν κατασκευὴν ὡς ἐδείξαμεν ἐν τῇ ἀναλύσει, ἴσον τὸ ὑπὸ ρλ, λδ τῷ ὑπὸ λκ. καὶ ὡς ἡ κλ πρὸς λδ, ἡ βδ πρὸς δχ. ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ κλ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ, τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ρλ, λδ τῷ ἀπὸ λκ ἐστὶν ἴσον, ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ λκ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, τουτέστιν ἡ χζ πρὸς ζθ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ κβ, βχ πρὸς βχ, οὕτως ἡ λχ πρὸς χδ. ἴση δέ ἐστιν ἡ κβ τῇ βζ. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἡ ζχ πρὸς χβ, οὕτως ἡ λχ πρὸς χδ. ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ χζ πρὸς ζβ, οὕτως ἡ χλ πρὸς λδ. ὥστε καὶ ὡς ἡ λδ πρὸς λχ, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζχ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, οὕτως ἡ χζ πρὸς ζθ. ὡς δὲ ἡ δλ πρὸς λχ, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζχ. καὶ δι' ἴσου ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ, ὡς ἡ ρλ πρὸς λχ, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζθ. καὶ ὡς ἄρα ἡ λχ πρὸς χρ, οὕτως ἡ ζθ πρὸς θβ. ὡς δὲ ἡ ζθ πρὸς θβ, οὕτως ἡ π πρὸς σ. καὶ ὡς ἄρα ἡ λχ πρὸς χρ, τουτέστιν ὁ αγλ κῶνος πρὸς τὸν αργ κῶ-

ναι, τουτέστι τὸ α λ γ τμῆμα τῆς σφαίρας, πρὸς τὸ α β γ τμῆμα τῆς σφαίρας, οὕτως ἡ π πρὸς σ.

ε Τῷ δοθέντι τμήματι σφαίρας ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι. ἔστω τὰ δύο δοθέντα τμήματα σφαίρας τὰ α β γ, ε ζ η. καὶ ἔστω τοῦ μὲν α β γ τμήματος βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν α β κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ γ σημεῖον. τοῦ δὲ ε ζ η βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ε ζ, κορυφὴ δὲ τὸ η σημεῖον. δεῖ δὴ εὑρεῖν τμῆμα σφαίρας, ὃ ἔσται τῷ μὲν α β γ τμήματι ἴσον, τῷ δὲ ε ζ η ὅμοιον. εὑρήσθω. καὶ ἔστω τὸ θ κ λ. καὶ ἔστω αὐτοῦ μὲν βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν θ κ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ λ σημεῖον. ἔστωσαν δὴ καὶ κύκλοι ἐν ταῖς σφαίραις οἱ α ν β γ, θ ξ κ λ, ε ο ζ η, διάμετροι δὲ αὐτῶν πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσι τῶν τμημάτων αἱ γ ν, λ ξ, η θ. καὶ ἔστω κέντρα τὰ π, ρ, σ. καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν συναμφότερος ἡ π ν, ν τ πρὸς τὴν ν τ, οὕτως ἡ χ τ πρὸς τ γ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ρ ξ, ξ υ πρὸς ξ υ, οὕτως ἡ ψ υ πρὸς υ λ. καὶ ὡς συναμφότερος ἡ σ ο, ο φ

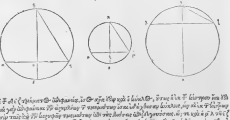


πρὸς ο φ, οὕτως ἡ ω φ πρὸς φ η. καὶ νοείσθωσαν κῶνοι, ὧν βάσεις μὲν εἰσὶν οἱ περὶ διαμέτρους τὰς α β, θ κ, ε ζ κύκλοι, κορυφαὶ δὲ τὰ χ, ψ, ω σημεῖα. ἔσται δὲ ἴσος ὁ μὲν α β χ κῶνος τῷ α β γ τμήματι τῆς σφαίρας, ὁ δὲ ψ θ κ τῷ θ κ λ, ὁ δὲ ε ω ζ τῷ ε η ζ. τοῦτο γὰρ δέδεικται. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ α β γ τμῆμα τῆς σφαίρας τῷ θ κ λ τμήματι, ἴσος ἄρα καὶ ὁ α χ β κῶνος τῷ ψ θ κ κώνῳ. τῶν δὲ ἴσων κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν α β πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν θ κ, οὕτως ἡ ψ υ πρὸς χ τ. ὡς δὲ ὁ κύκλος πρὸς τὸν κύκλον, τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ, οὕτως ἡ ψ υ πρὸς χ τ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ε ζ η τμῆμα τῷ θ κ λ τμήματι, ὅμοιος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ ε ζ ω κῶνος τῷ ψ θ κ κώνῳ. τοῦτο γὰρ δειχθήσεται. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ω φ πρὸς τὴν ε ζ, οὕτως ἡ ψ υ πρὸς θ κ. λόγος δὲ τῆς ω φ πρὸς τὴν ε ζ δοθείς, λόγος ἄρα καὶ τῆς ψ υ πρὸς τὴν θ κ δοθείς, ὁ αὐτὸς ἔστω ὁ τῆς χ τ πρὸς δ. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ χ τ, δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ δ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ψ υ πρὸς χ τ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ, οὕτως ἡ θ κ πρὸς δ. κείσθω τῷ ἀπὸ θ κ ἴσον τὸ ὑπὸ α β, ς. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ, οὕτως ἡ α β πρὸς τὴν ς. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ, οὕτως ἡ θ κ πρὸς δ. καὶ ἐναλλάξ. ὡς ἡ α β πρὸς θ κ, οὕτως ἡ ς πρὸς δ. ὡς δὲ ἡ α β πρὸς θ κ, οὕτως ἡ θ κ πρὸς ς. διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ἀπὸ θ κ τῷ ὑπὸ τῶν α β, ς. ὡς ἄρα ἡ α β πρὸς θ κ, οὕτως ἡ θ κ πρὸς ς, καὶ ἡ ς πρὸς δ. δύο ἄρα δοθεισῶν τῶν α β, δ, δύο μέσαι κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ θ κ, ς.

Συντε

Συντελήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω ὧ μὲν δεῖ ἴσον τμῆμα συστήσασθαι τὸ αβγ. ᾧ δὲ ὅμοιον τὸ εζη. καὶ ἔστωσαν μέγιστοι κύκλοι τῶν σφαιρῶν οἱ αβγν, κεοζ. διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ γν, ηο. κέντρα τὰ π, σ. καὶ πεποιήσθω ὡς συναμφότερος ἡ πνυ πρὸς υτ, οὕτως ἡ χτ πρὸς τγ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ σοφ πρὸς σφ, ἡ ωφ πρὸς φη. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν χαβ κῶνος τῷ αβγ τμήματι τῆς σφαίρας. ὁ δὲ ζωε τῷ επζ. πεποιήσθω ὡς ἡ ωφ πρὸς εζ, οὕτως ἡ χτ πρὸς δ. καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν αβ, δ, δύο μέσαι κατὰ λόγον εἰλήφθωσαν αἱ θκ, ξ. ὥστε εἶναι, ὡς τὴν αβ πρὸς θκ, οὕτως τὴν κθ πρὸς ξ, καὶ τὴν ξ πρὸς δ. καὶ ἐπὶ τῆς θκ κύκλου τμῆμα ἐπεστάσθω τὸ θκλ, ὅμοιον τῷ εζη τμήματι, καὶ ἀναπεπληρώσθω ὁ κύκλος. καὶ ἔστω αὐτοῦ διάμετρος ἡ λξ. καὶ νοείσθω σφαῖρα ἧς μέγιστος κύκλος ἐστὶν ὁ λθξκ, κέντρον δὲ τὸ ρ. καὶ διὰ τῆς θκ ἐπίπεδον ὀρθὸν ἐκβεβλήσθω πρὸς τὴν λξ. ἔσται δὴ τὸ τμῆμα τῆς σφαίρας τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ λ, ὅμοιον τῷ εζη τμήματι τῆς σφαίρας. ἐπεὶ δὴ καὶ τῶν κύκλων τὰ τμήματα ἦν ὅμοια, λέγω δὲ ὅτι καὶ ἴσον ἐστὶ τῷ αβγ τμήματι τῆς σφαίρας. πεποιήσθω ὡς συναμφότερος ἡ ρξυ πρὸς τὴν ξυ, οὕτως ἡ ψυ πρὸς υλ. ἴσος ἄρα ψθκ κῶνος, τῷ θκλ τμήματι τῆς σφαίρας. καὶ ἐπειδὴ ὅμοιός ἐστιν ὁ ψθκ κῶνος τῷ ζωε κώνῳ, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ωφ πρὸς εζ, τουτέστιν ἡ χτ πρὸς δ, οὕτως ἡ ψυ πρὸς θκ. καὶ ἐναλλὰξ καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἄρα ἡ ψυ πρὸς χτ, ἡ θκ πρὸς δ. καὶ ἐπειδὴ ἀνὰ λόγον εἰσὶν αἱ αβ, κθ, ξ, δ, ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θκ, ἡ θκ πρὸς δ. ὡς δὲ ἡ θκ πρὸς δ, ἡ ψυ πρὸς χτ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ κθ, τουτέστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν θκ κύκλος, οὕτως ἡ ψυ πρὸς τὴν χτ. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ χαβ κῶνος τῷ ψθκ κώνῳ. ὥστε καὶ τὸ αβγ τμῆμα τῆς σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ θκλ τμήματι τῆς σφαίρας. τῷ δοθέντι ἄρα τμήματι τῷ αβγ ἴσον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ὅμοιον τῷ εζη, τὸ αὐτὸ συνέσταται τὸ θκλ.

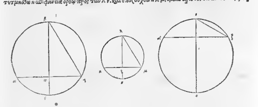
Δύο δοθέντων σφαίρας τμημάτων, εἴτε τῆς αὐτῆς, εἴτε μὴ, εὑρεῖν τμῆμα σφαίρας, ὃ ἔσται ἓν μὲν τῶν δοθέντων ὅμοιον, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν ἕξει ἴσην τῇ τοῦ ἑτέρου τμήματος ἐπιφανείᾳ. ἔστω τὰ δοθέντα τμήματα σφαιρικὰ ἐπὶ τὰς αβγ, δεζ περιφερείας. καὶ ἔστω ᾧ μὲν δεῖ ὅμοιον εὑρεῖν τὸ ἐπὶ τὴν αβγ περιφέρειαν. οὕτως δὲ τὴν ἐπιφάνειαν ἴσην ἔχειν τῇ ἐπιφανείᾳ, τὸ ἐπὶ τὴν δεζ. καὶ γεγενήσθω καὶ ἔστω τὸ κλμ τῆς σφαίρας, τῷ μὲν αβγ τμήματι ὅμοιον. τὴν δὲ ἐπιφάνειαν ἴσην ἐχέτω τῇ τοῦ δεζ τμήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ νοείσθω τὰ κέντρα τῶν σφαιρῶν. καὶ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω ὀρθὰ πρὸς τὰς τῶν τμημάτων βάσεις. καὶ ἐν μὲν ταῖς σφαίραις τομαὶ ἔστωσαν οἱ κλμν, βαγθ, εζηδ μέγιστοι κύκλοι. ἐν δὲ ταῖς βάσεσι τῶν τμημάτων, αἱ κμ, αγ, δζ εὐθεῖαι. διάμετροι δὲ τῶν σφαιρῶν πρὸς ὀρθὰς οὖσαι ταῖς κμ, αγ, δζ, ἔστωσαν αἱ λν, βθ, εη. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ λμ, βγ, εζ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ τοῦ κλμ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφά-



νεια τῇ τοῦ δεζ τμήματος ἐπιφανείᾳ, ἴσος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ εζ. αἱ γὰρ ἐπιφάνειαι τῶν εἰρημένων τμημάτων ἴσαι ἐδείχθησαν κύκλοις, ὧν αἱ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσαι εἰσὶ ταῖς ἀπὸ τῶν κορυφῶν τῶν τμημάτων ἐπὶ τὰς βάσεις ἐπιζευγνυούσαις. ὥστε καὶ ἡ μλ τῇ εζ ἴση ἐστίν. ἐπεὶ δὲ ὅμοιόν ἐστι τὸ κλμ τῷ αβγ τμήματι, ἔστιν ὡς ἡ ρλ πρὸς ρν, ἡ βπ πρὸς πθ. καὶ ἀνάπαλιν. καὶ συνθέντι ὡς ἡ νλ πρὸς λρ, οὕτως ἡ θβ πρὸς βπ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ρλ πρὸς λμ, οὕτως ἡ βπ πρὸς γβ. ὅμοια γὰρ τὰ τρίγωνα. ὡς ἄρα ἡ νλ πρὸς λμ, τουτέστι πρὸς εζ, οὕτως ἡ θβ πρὸς βγ. καὶ ἐναλλὰξ. λόγος δὲ τῆς εζ πρὸς βγ δοθείς. δοθεῖσαι γὰρ ἑκατέρα. λόγος ἄρα καὶ τῆς λν πρὸς βθ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ βθ. δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ λν, ὥστε καὶ ἡ σφαῖρα δοθεῖσά ἐστι.

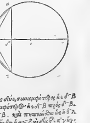
Συντεθήσεται

Συντεθήσεται δὴ οὕτως. ἔστω τὰ δοθέντα δύο τμήματα σφαίρας, τὰ αβγ, δεζ. τὸ μὲν αβγ, ᾧ δεῖ ὅμοιον· τὸ δὲ δεζ, οὗ τὴν ἐπιφάνειαν ἴσην ἔχειν τῇ ἐπιφανείᾳ. καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω τοῖς ἐπὶ τῆς ἀναλύσεως. καὶ πεποιήσθω, ὡς μὲν ἡ βγ πρὸς εζ, οὕτως ἡ βθ πρὸς λν. καὶ περὶ διάμετρον τὴν λν κύκλος γεγράφθω. καὶ νοείσθω σφαῖρα ἧς μέγιστος ἔστω κύκλος ὁ λκνμ. καὶ τετμήσθω ἡ νλ κατὰ τὸ ρ. ὡς τε εἶναι ὡς τὴν θπ πρὸς πβ, τὴν νρ πρὸς ρλ. καὶ διὰ τοῦ ρ ἐπίπεδον τετμήσθω ἡ ἐπιφάνεια ὀρθῷ πρὸς τὴν λν. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ λμ. ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ ἐπὶ τῶν κμ, αγ



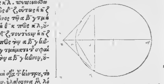
εὐθειῶν τῶν κύκλων τμήματα, ὥς τε καὶ τὰ τμήματα τῶν σφαιρῶν ἐστὶν ὅμοια. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ θβ πρὸς βπ, οὕτως ἡ νλ πρὸς λρ. καὶ γὰρ κατὰ διαίρεσιν. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ πβ πρὸς βγ, οὕτως ἡ ρλ πρὸς λμ. καὶ ὡς ἄρα ἡ θβ πρὸς νλ, ἡ βγ πρὸς λμ. ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ θβ πρὸς λν, ἡ βγ πρὸς εζ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ εζ τῇ λμ ὥστε καὶ ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ εζ, ἴσος ἐστὶ κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ λμ. καὶ ὁ μὲν τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων τὴν εζ κύκλος, ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δεζ τμήματος. ὁ δὲ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ λμ, ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κλμ τμήματος. τοῦτο γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ δέδεικται. ἴση ἄρα καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κλμ τμήματος τῆς σφαίρας, τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δεξ τμήματος, καὶ ἐστὶν ὅμοιον τὸ κλμ τῷ αβγ.

Από τῆς δοθείσης σφαίρας τμῆμα τεμεῖν ἐπιπέδῳ, ὥστε τὸ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, καὶ ὕψος ἴσον, τὸν δοθέντα λόγον ἔχειν. ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ βδ. δεῖ δὴ τὴν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν διὰ τῆς αγ, ὅπως τὸ αβγ τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸν αβγ κῶνον λόγον ἔχῃ τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι. γεγονέτω καὶ ἔστω κέντρον τῆς σφαίρας τὸ ε. καὶ ὡς συναμφότερος ἡ εδζ πρὸς δζ, οὕτως ἡ κζ πρὸς ζβ. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ αγκ κῶνος τῷ αβγ τμήματι. λόγος ἄρα καὶ τοῦ ακγ κώνου πρὸς τὸν αβγ κῶνον δοθείς. λόγος ἄρα τῆς κζ πρὸς ζβ δοθείς. ὡς δὲ ἡ κζ πρὸς ζβ συναμφότερος ἡ εδζ πρὸς δζ. λόγος ἄρα συναμφοτέρου τῆς εδζ πρὸς δζ δοθείς, ὥς τε καὶ τῆς εδ πρὸς δζ. δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ δζ ὥς τε καὶ ἡ αγ. καὶ ἐπεὶ συναμφότερος ἡ εδζ πρὸς δζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ εδβ πρὸς δβ. καὶ ἔστι συναμφότερος μὲν ἡ εδβ τρὶς ἡ εδ. ἡ δὲ βδ δὶς ἡ εδ. συναμφότερος ἄρα ἡ εδζ πρὸς δζ, μείζονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει τρία πρὸς δύο. καὶ ἔστιν ὁ συναμφοτέρου τῆς εδζ πρὸς ζδ λόγος ὁ αὐτὸς τῷ δοθέντι. δεῖ ἄρα τὸν διδόμενον λόγον εἰς τὴν σύνθεσιν μείζονα εἶναι, τοῦ ὃν ἔχει τρία πρὸς δύο.

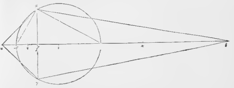


Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ. διάμετρος δὲ ἡ βδ. κέντρον δὲ τὸ ε. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς κθ πρὸς κλ, μείζων τοῦ ὃν ἔχει τρία πρὸς δύο. ἔστι δὲ ὡς τρία πρὸς δύο, συναμφότερος ἡ εδβ πρὸς δβ. καὶ ἡ θκ ἄρα πρὸς κλ μείζονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει συναμφότερος ἡ εδβ πρὸς δβ. διελόντι ἄρα ἡ θλ πρὸς λκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εδ πρὸς δβ. καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ θλ πρὸς λκ, οὕτως ἡ εδ πρὸς δζ. καὶ διὰ τοῦ ζ τῇ βδ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ αζγ. καὶ διὰ τῆς αγ ἤχθω ἐπίπεδον

θω ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὴν βδ. λέγω ὅτι τὸ αβγ τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸν αβγ κῶνον λόγον ἔχει τὸν αὐτὸν τῷ θκ πρὸς κλ. πεποιήσθω γὰρ ὡς συναμφότερος ἡ ε δζ πρὸς δζ, οὕτως ἡ κζ πρὸς ζβ. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ γακ κῶνος τῷ αβγ τμήματι τῆς σφαίρας. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ θκ πρὸς κλ, οὕτως συναμφότερος ἡ ε δζ πρὸς δζ, τουτέστιν ἡ κζ πρὸς ζβ. τουτέστιν ὁ ακγ κῶνος, πρὸς τὸν αβγ κῶνον. ἴσος δὲ ὁ ακγ κῶνος τῷ αβγ τμήματι τῆς σφαίρας. ὡς ἄρα τὸ αβγ τμῆμα πρὸς τὸν αβγ κῶνον, οὕτως ἡ θκ πρὸς κλ.



Ἐὰν σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμηθῇ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου, τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον, ἐλάσσονα μὲν λόγον ἔχει, ἢ διπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ μείζονος τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ἐλάσσονος ἐπιφάνειαν. μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον. ἔστω σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ. καὶ διάμετρος ἡ βδ. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τῆς αγ ὀρθῷ πρὸς τὸν αβγδ κύκλον. καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τῆς σφαίρας τὸ αβγ, λέγω ὅτι τὸ αβγ τμῆμα πρὸς τὸ αδγ, ἐλάσσονα μὲν ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μείζονος τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βα δα. καὶ ἔστω κέντρον τὸ ε. καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν συναμφότερος ἡ ε δζ πρὸς δζ, ἡ θζ πρὸς ζβ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ε βζ πρὸς βζ, οὕτως ἡ



κζ πρὸς ζδ. καὶ νοείσθωσαν κῶνοι, βάσιν ἔχοντες τὸν περὶ διάμετρον τὴν αγ κύκλον, κορυφὰς δὲ τὰ θ, κ σημεῖα. ἔσται δὴ ἴσος ὁ μὲν αθγ κῶνος τῷ αβγ τμήματι τῆς σφαίρας, ὁ δὲ ακγ τῷ αδγ. καὶ ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ αδ, οὕτως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αβγ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ αδγ τμήματος. τοῦτο γὰρ προγέγραπται. δεικτέον ὅτι τὸ μεῖζον τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ἔλασσον, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλάσιον, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. λέγω ὅτι καὶ ὁ αθγ κῶνος πρὸς τὸν ακγ, τουτέστιν ἡ ζθ πρὸς ζκ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ αδ, τουτέστιν ἡ βζ πρὸς ζδ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς μὲν συναμφότερος ἡ ε δζ πρὸς δζ, οὕτως ἡ θζ πρὸς ζβ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ε βζ πρὸς βζ, οὕτως ἡ ζκ πρὸς ζδ· ἔσται καὶ ὡς ἡ βζ πρὸς ζδ, ἡ θβ πρὸς βε. ἴση γὰρ ἡ βε τῇ δε. τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς ἐπάνω συναποδέδεικται. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ ε βζ πρὸς βζ, ἡ κζ πρὸς ζδ. ἔστω τῇ βε ἴση ἡ βν. δῆλον γὰρ ὅτι μεῖζόν ἐστιν ἡ θβ τῆς βε. ἐπεὶ καὶ ἡ βζ τῆς ζδ. καὶ ἔσται ὡς ἡ νζ πρὸς ζβ, ἡ κζ πρὸς ζδ. ὡς δὲ ἡ ζβ πρὸς ζδ, ἐδείχθη ἡ θβ πρὸς βε. ἴση δὲ ἡ βε τῇ νβ. ὡς ἄρα ἡ θβ πρὸς βν, οὕτως ἡ νζ πρὸς ζκ. καὶ ἐπεὶ ἡ θζ πρὸς ζν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θβ πρὸς βν. ὡς δὲ ἡ θβ πρὸς βν, ἐδείχθη ἡ νζ πρὸς ζκ. ἡ θζ ἄρα πρὸς ζν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ νζ πρὸς ζκ. ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν θζ κ, τοῦ ἀπὸ ζν. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν θζ κ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ, τουτέστιν ἡ ζθ πρὸς ζκ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς νζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ. τὸ δὲ ἀπὸ νζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ, διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ νζ πρὸς ζκ. ἡ ἄρα θζ πρὸς ζκ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ διπλασίονα τοῦ ὃν ἔχει ἡ νζ πρὸς ζκ. (ἡ

ζ κζ πρὸς

κ ζ πρὸς ζ η ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλασίονα τοῦ ὃν ἔχει ἡ β ζ πρὸς ζ δ.) τοῦτο δὲ ἐζητοῦμεν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ β ε τῇ ε δ, ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν β ζ δ τοῦ ὑπὸ τῶν β ε δ. ἡ ζ β ἄρα πρὸς β ε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ε δ πρὸς δ ζ, τουτέστιν ἡ θ β πρὸς β ζ. ἔλασσον ἄρα τὸ ἀπὸ ζ β τοῦ ὑπὸ τῶν θ β ε. τουτέστι τοῦ ὑπὸ τῶν θ β κ. ἔστω ἴσον τὸ ἀπὸ β ν τῷ ὑπὸ θ β κ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ θ β πρὸς β κ, τὸ ἀπὸ θ ν πρὸς τὸ ἀπὸ ν κ. τὸ δὲ ἀπὸ θ ζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζ κ, μείζονα λόγον ἔχει ἢ τὸ ἀπὸ θ ν πρὸς τὸ ν κ. τὸ ἀπὸ θ ζ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ζ κ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θ β πρὸς β κ, τουτέστιν ἡ θ β πρὸς β ε, τουτέστιν ἡ κ ζ πρὸς ζ κ. ἡ ἄρα θ ζ πρὸς ζ κ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἡμιόλιον τοῦ ἧς ἡ κ ζ πρὸς ζ κ. τοῦτο γὰρ ἐπὶ τέλει. καὶ ἔστιν ὡς μὲν ἡ θ ζ πρὸς ζ κ, ὁ α θ γ κῶνος πρὸς τὸν α κ γ κῶνον, τουτέστι τὸ α β γ τμῆμα πρὸς τὸ α δ γ τμῆμα. ὡς δὲ ἡ κ ζ πρὸς ζ κ, ἡ β ζ πρὸς ζ δ, τουτέστι τὸ ἀπὸ β δ πρὸς τὸ ἀπὸ α δ. τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ α β γ τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ α δ γ τμήματος. ἄλλο δὲ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον, ἐλάσσονα μὲν ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον.

Ἄλλως. Ἔστω σφαῖρα, ἐν ᾗ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ. διάμετρος δὲ ἡ α γ. κέντρον δὲ τὸ ε. καὶ τετμήσθω ἐπίπεδον ὀρθῷ διὰ τῆς β δ πρὸς τὴν α γ. λέγω ὅτι τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ δ α β πρὸς τὸ ἔλασσον τὸ β γ δ, ἐλάσσονα ἢ διπλάσιον λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ α β δ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ β γ δ τμήματος. μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ α β, β γ. ὁ δὲ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγος, ὁ τοῦ κύκλου ἐστὶν οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ α β, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ β γ, τουτέστιν ὁ τῆς α θ πρὸς τὴν θ γ. κείσθω τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἴση ἑκατέρα τῶν α ζ, γ κ. ὁ δὲ τοῦ β α δ τμήματος πρὸς τὸ β γ δ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ β α δ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον, οὗ ἡ βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν β δ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ α σημεῖον. καὶ ὁ αὐτὸς κῶνος πρὸς τὸν κῶνον βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτήν, κορυφὴν δὲ τὸ γ σημεῖον, καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος πρὸς τὸ β γ δ τμῆμα. ἀλλ᾽ ὁ μὲν τοῦ β α δ τμήματος λόγος, πρὸς τὸν β α δ κῶνον, ὁ τῆς κ θ ἐστὶ πρὸς θ γ. ὁ δὲ τοῦ κώνου, πρὸς τὸν κῶνον ὁ τῆς α θ πρὸς θ γ. ὁ δὲ τοῦ β γ δ κώνου πρὸς τὸ τμῆμα τὸ β γ δ, ὁ τῆς α θ ἐστὶ πρὸς θ ζ. ὁ δὲ συνημμένος ἐκ τοῦ τῆς κ θ πρὸς θ γ, καὶ τῆς α θ πρὸς θ γ, ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν α θ κ ἐστὶ πρὸς τὸ ἀπὸ θ γ. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ κ θ, θ α, πρὸς τὸ ἀπὸ θ γ μετὰ τοῦ τῆς α θ

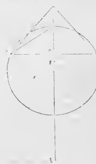


πρὸς θ ζ, ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν κ θ, θ α ἐστὶν ἐπὶ τὴν θ α, πρὸς τὸ ἀπὸ θ γ, ἐπὶ τὴν θ ζ. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ τῶν κ θ α ἐπὶ τὴν θ α, πρὸς τὸ ἀπὸ θ γ ἐπὶ τὴν θ η, ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς θ α ἐστὶ πρὸς τὸ ἀπὸ θ γ. ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ θ α ἐπὶ τὴν θ η, πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν ζ θ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς α θ πρὸς θ γ διπλασίου ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ θ γ. τὸ ἄρα ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν η θ, πρὸς τὸ ἀπὸ θ γ ἐπὶ τὴν θ ζ. ὅτι ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν ζ θ, τοῦ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ κ. ὅτι ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ θ ζ τῆς θ κ, φημὶ δὴ ὅτι καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον λόγον μείζονα ἔχει, ἢ ἡμιόλιον τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς ἐπιφάνειαν λόγου. ἀλλ᾽ ὁ μὲν τῶν τμημάτων ἐδείχθη, ὁ αὐτὸς ὢν ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η, πρὸς τὸ ἀπὸ θ γ ἐπὶ τὴν θ ζ. τοῦ δὲ τῆς ἐπιφανείας λόγου, ἡμιόλιος ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ α β κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ β γ κύβον. φημὶ δή, ὅτι τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η, πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ ἀπὸ τῆς α β κύβος, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς β γ κύβον. τουτέστιν ὁ ἀπὸ τῆς α θ κύβος, πρὸς τὸν ἀπὸ θ β κύβον. τουτέστιν ὁ τῆς ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ β θ. καὶ ὅταν α θ πρὸς θ β, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ θ β, προσλαβὼν τὸν τῆς α θ πρὸς θ β. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ α θ ἐστὶν πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν γ θ β. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν θ β γ, ὁ τοῦ ἀπὸ α θ ἐστὶν ἐπὶ τὴν θ η πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν θ β γ ἐπὶ τὴν θ κ. φημὶ δὴ ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ κ πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ β θ γ. τουτέστι τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ κ, πρὸς τὸ ὑπὸ β θ γ ἐπὶ τὴν θ κ. δεικτέον οὖν ὅτι τὸ ἀπὸ θ γ ἐπὶ τὴν θ ζ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν β θ γ, ἐπὶ τὴν κ θ. ὁ ταυτὸν ἐστὶ τῷ δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ γ θ πρὸς τὸ ὑπὸ β θ γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κ θ πρὸς θ ζ. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ κ θ πρὸς θ ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ θ πρὸς θ β. ἤχθω ἀπὸ τοῦ ε τῇ ε γ πρὸς ὀρθὰς ἡ ε λ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ β κάθετος ἐπ᾽ αὐτὴν ἡ β λ. ἐπίλοιπον ἡμῖν δεῖξαι, διότι ἡ κ θ πρὸς θ ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ θ πρὸς θ β. ἴση δὲ ἐστὶν ἡ θ ζ

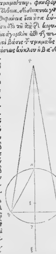
συναμφοτέρῳ

συναμφοτέρῳ τῇ α θ κ ε. δεῖξαι ἄρα δεῖ, ὅτι ἡ κ θ πρὸς συναμφότερον τὴν θ α κ ε, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ γ θ πρὸς θ β. καὶ ἀφαιρεθείσης ἄρα ὑπὸ τῶν θ κ τῶν γ θ, ἀπὸ δὲ τῶν κ ε τῶν ε λ ἴσης τῇ β θ, δεῖ δειχθῆναι, ὅτι λοιπὴ ἡ γ κ πρὸς λοιπὴν τὴν συναμφότερον τὴν α θ, κ λ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ γ θ πρὸς θ β, τουτέστιν ἡ θ β πρὸς θ α, τουτέστιν ἡ λ ε πρὸς θ α. καὶ ἐναλλὰξ. ὅτι ἡ κ ε πρὸς ε λ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κ λ, θ α, πρὸς θ α καὶ διελόντι, ἡ κ λ πρὸς λ ε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κ λ πρὸς θ α. ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἡ λ ε τῆς θ α.

Τῶν ὑπὸ τῇ ἴσῃ ἐπιφανείᾳ περιεχομένων σφαιρικῶν τμημάτων, μεῖζόν ἐστι τὸ ἡμισφαίριον. ἔστω γὰρ σφαίρας μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ α γ. καὶ ἄλλης σφαίρας, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ ε ζ η θ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ε η. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ ἡ μὲν ἑτέρα σφαῖρα διὰ τοῦ κέντρου, ἡ δὲ ἑτέρα μὴ διὰ τοῦ κέντρου. ἔστω δὲ τὰ μὲν τέμνοντα ἐπίπεδα ὀρθὰ πρὸς τὰς α γ, ε η διαμέτρους. καὶ τετμήσθωσαν κατὰ τὰς δ β, ζ θ γραμμάς. ἔστι δὴ τὸ μὲν κατὰ τὴν ζ ε θ περιφέρειαν τμῆμα τῆς σφαίρας ἡμισφαίριον, τῶν δὲ κατὰ τὴν β α δ περιφέρειαν τομῶν, τὸ μὲν τοῦ ἑτέρου τμήματι πρὸς ὃ τὸ σ σημεῖον μεῖζον ἡμισφαιρίου. ἐν δὲ τοῦ ἑτέρου ἔλασσον ἡμισφαιρίου. ἴσαι δὲ ἔστωσαν αἱ τῶν εἰρημένων τμημάτων ἐπιφάνειαι.

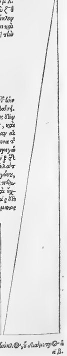


λέγω οὖν ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ κατὰ τὴν ζ ε θ περιφέρειαν ἡμισφαίριον, τοῦ κατὰ τὴν β α δ περιφέρειαν τμήματος. ἐπεὶ γὰρ ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν εἰρημένων τμημάτων, φανερὸν ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ β α τῇ ε ζ εὐθείᾳ. δέδεικται γὰρ ἑκάστου τμήματος ἡ ἐπιφάνεια ἴση οὖσα κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος εὐθείᾳ ἀγομένῃ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡμίσεως κύκλου ἡ β α δ περιφέρεια ἐν τῷ ἑτέρῳ σχήματι, πρὸς ὃ τὸ σ σημεῖον, δῆλον ὅτι ἡ β α ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασίων δυνάμει τῆς α κ, τῆς δὲ ἐκ τοῦ κέντρου μείζων ἢ διπλασίων δυνάμει. ἔστω δὲ καὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α β δ κύκλου ἴση ἡ γ ξ. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ γ ξ πρὸς τὴν γ κ, τοῦτον ἐχέτω ἡ μ α πρὸς α κ. ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν β δ κῶνος ἔστω, κορυφὴν ἔχων τὸ μ σημεῖον. ἴσος δή ἐστιν ὁ κῶνος τῷ κατὰ τὴν β α δ περιφέρειαν τμήματι τῆς σφαίρας. ἔστω καὶ τῇ ε λ ἴση ἡ ε ν. καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν θ ζ κῶνος, ἔστω κορυφὴν ἔχων τὸ ν σημεῖον. ἴσος δὴ καὶ οὗτος ἐστὶ τῷ κατὰ τὴν θ ε ζ περιφέρειαν ἡμισφαιρίῳ. τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν



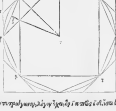


αρ γ μεῖζον ἐστὶ τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν α κ γ. διότι τὴν ἐλάσσονα πλευρὰν τῆς ἐλάσσονος τῆς ἑτέρου αρ γ μείζονα ἔχει. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς α ρ, ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν α κ, γ ξ. ἥμισυ γάρ ἐστι τῆς α ρ τῆς α β. μείζων οὖν ἐστὶ καὶ τὸ συναμφότερον τοῦ συναμφοτέρου. τὸ ἄρα περιεχόμενον ὑπὸ τῶν γ α ρ, μεῖζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ξ κ α. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ξ κ α, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν μ κ γ. ὥστε μεῖζον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν γ α ρ, τοῦ ὑπὸ τῶν μ κ γ. ὥστε μείζονα λόγον ἔχει ἡ γ α πρὸς τὴν κ γ, ἤπερ ἡ μ κ πρὸς τὴν α ρ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ α γ πρὸς τὴν γ κ, τοῦτον ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς α β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β κ. δῆλον οὖν, ὅτι μείζονα λόγον ἔχει τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ τῆς α β, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ α ρ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β κ, ἤπερ ἡ μ κ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς α ρ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ λ ν. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ζ θ, πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν β δ, ἤπερ ἡ μ κ πρὸς τὴν μ λ. ὥστε μεῖζον ἐστὶν ὁ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον μὲν τὴν ζ θ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ ν σημεῖον τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος κύκλον τὸν περὶ διάμετρον μὲν τὴν β δ, κορυφὴν δὲ τὸ μ σημεῖον. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ ἡμισφαίριον τὸ κατὰ τὴν ε ζ θ περιφέρειαν, μεῖζόν ἐστι τοῦ τμήματος τοῦ κατὰ τὴν β α δ περιφέρειαν.



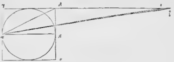
ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ.

α Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει. ἐχέτω ὁ α β γ δ κύκλος, ὡς ὑπόκειται. λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ τῷ ε. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω μείζων ὁ κύκλος, καὶ ἐγγεγράφθω τὸ α γ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα. καὶ ἔστω τὰ τμήματα ἤδη ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύκλος τοῦ τριγώνου. τὸ εὐθύγραμμον ἄρα ἔτι τοῦ τριγώνου ἐστὶ μεῖζον. εἰλήφθω κέντρον τὸ ν, καὶ κάθετος ἡ ν ξ. ἐλάσσων ἄρα ἡ ν ξ ἐστὶ τῆς τοῦ τριγώνου πλευρᾶς. ἔστι δὲ καὶ ἡ περίμετρος τοῦ εὐθυγράμμου ἐστὶ λοιπῆς ἐλάττων. ἐπεὶ ἐστὶ τῆς κύκλου περιμέτρου. ἔλαττον ἄρα τὸ εὐθύγραμμον τοῦ ε τριγώνου, ὅπερ ἄτοπον. ἔστω δὲ ὁ κύκλος, εἰ δυνατὸν, ἐλάσσων τοῦ ε τριγώνου. καὶ περιγεγράφθω τὸ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα. καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι διὰ τῶν σημείων, ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ο α ρ. ἡ ο ρ ἄρα ἐστὶ μ ρ ἐστὶ μείζων. ἡ γὰρ ρ μ τῇ ρ α ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ρ ο π τρίγωνον ἄρα τοῦ ο ζ α μ σχήματος μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ. λελείφθωσαν οἱ τῷ π ζ α τομεῖ ὅμοιοι ἐλάσσους ἐστὶ ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ε τρίγωνον τοῦ α β γ δ κύκλου. ἔστιν ἄρα τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἔτι τοῦ ε ἔλασσον, ὅπερ ἄτοπον. ἔστι γὰρ μεῖζον, ὅτι ἡ μὲν ν α ἴση ἐστὶ τῇ καθέτῳ τοῦ τριγώνου. ἡ δὲ περίμετρος μείζων ἐστὶ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου. ἴσος ἄρα ὁ κύκλος τῷ ε τριγώνῳ.

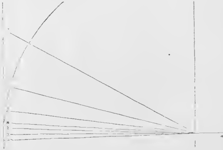


β Ὁ κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον, λόγον ἔχει, ὃν ια πρὸς ιδ. ἔστω κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ α β.

αβ. καὶ περιγεγράφθω τετράγωνον τὸ γη. καὶ τῆς γδ διπλῆ ἡ δε. ἕβδομον δὲ ἡ εζ τῆς γδ. ἐπεὶ οὖν τὸ αγε πρὸς τὸ αγδ λόγον ἔχει, ὃν κα πρὸς ζ. πρὸς δὲ τὸ αεζ τὸ αγδ λόγον ἔχει, ὃν ἑπτὰ πρὸς ἕν. τὸ αγζ πρὸς τὸ αγδ ἐστὶν, ὡς κβ πρὸς ζ. ἀλλὰ τοῦ αγδ τετραπλάσιον ἐστὶ, τὸ γη τετράγωνον. τὸ δὲ αγζ τρίγωνον, τῷ αβ κύκλῳ ἴσον ἐστὶν, ἐπεὶ ἡ μὲν αγ κάθετος ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. ἡ δὲ βάσις τῆς διαμέτρου τριπλασίων, καὶ τῷ ζ ἔγγιστα ὑπερέχουσα δειχθήσεται. ὁ κύκλος οὖν πρὸς τὸ γη τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν ια πρὸς ιδ.



Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ. καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις. ἔστω κύκλος, καὶ διάμετρος ἡ αγ, καὶ κέντρον τὸ ε, καὶ ἡ γλζ ἐφαπτομένη. καὶ ἡ ὑπὸ ζεγ τρίτου ὀρθῆς. ἡ εζ ἄρα πρὸς ζγ λόγον ἔχει, ὃν τς πρὸς ρνγ. ἡ δὲ εγ πρὸς τὴν γζ λόγον ἔχει, ὃν σξε πρὸς ρνγ. τετμήσθω οὖν ἡ ὑπὸ ζεγ δίχα τῇ εη. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζε πρὸς εγ, ἡ ζη πρὸς ηγ. καὶ ἐναλλὰξ. καὶ συντεθέντι, ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ ζε, εγ πρὸς ζγ, ἡ εγ πρὸς γη. ὥστε ἡ γε πρὸς γη μείζονα λό-



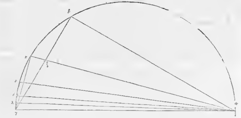
γον ἔχει, ἤπερ φοα πρὸς ρνγ. ἡ εη ἄρα πρὸς ηγ δυνάμει λόγον ἔχει, ὃν μ θυν πρὸς μ γυθ. μήκει ἄρα ὃν φϛα πρὸς ρνγ. πάλιν δίχα ἡ ὑπὸ ηεγ τῇ εθ. διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα ἡ εγ πρὸς γθ, μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν αρξβ η πρὸς ρνγ. ἡ θε ἄρα πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν αροβ η πρὸς ρνγ. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ θεγ τῇ εκ. ἡ εγ ἄρα πρὸς γκ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν βτλδ δ πρὸς ρνγ. ἡ εκ ἄρα πρὸς γκ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν βτλθ δ πρὸς ρνγ. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ κεγ τῇ λε. ἡ εγ ἄρα πρὸς λγ μείζονα μήκει λόγον ἔχει, ἤπερ δχογ < πρὸς ρνγ. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ζεγ τρίτον οὖσα ὀρθῆς τέτμηται τετράκις δίχα, ἡ ὑπὸ λεγ, ὀρθῆς ἐστι μη. κείσθω οὖν αὐτῇ ἴση ἡ πρὸς τῷ ε, ἡ ὑπὸ γεμ. ἡ ἄρα ὑπὸ λεμ ὀρθῆς ἐστι κδ. καὶ ἡ λμ ἄρα εὐθεῖα πλευρά ἐστι τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου πολυγώνου πλευρὰς ἔχοντος ϙς. ἐπεὶ οὖν ἡ εγ πρὸς τὴν γλ ἐδείχθη μείζονα λό-

λδ β
μ μ

γον ἔχουσα, ἤπερ ͵δχογ∠ πρὸς ρνγ. ἀλλὰ τῆς μὲν εγ διπλῆ ἡ αγ. τῆς δὲ γλ διπλασίων ἡ κμ. καὶ ἡ αγ ἄρα πρὸς τὴν τοῦ ϟς πολυγώνου περίμετρον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵δχογ∠ πρὸς α μ ͵δχπη. καὶ ἔστι τριπλασία. καὶ ὑπερέχουσι χξζ∠, ἅπερ τῶν ͵δχογ∠, ἐλάσσονά ἐστι τὸ ἑβδόμον, ὥστε τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν κύκλον τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλάσιον, καὶ ἔλαττον ἢ τῷ ἑβδόμῳ μέρει μεῖζον. ἡ τοῦ κύκλου ἄρα περίμετρος πολὺ μᾶλλον ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τριπλασίων, καὶ ἑβδόμῳ μέρει μείζων.

δ

Ἔστω κύκλος, καὶ διάμετρος ἡ αγ. ἡ δὲ ὑπὸ βαγ τρίτου ὀρθῆς. ἡ αβ ἄρα πρὸς βγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵ατνα πρὸς ψπ. ἡ δὲ αγ πρὸς γβ, ὃν ͵αφξ πρὸς ψπ. τετμήσθω δίχα ἡ ὑπὸ βαγ τῇ αη. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαη τῇ ὑπὸ ηγβ, ἀλλὰ καὶ τῇ ὑπὸ ηαγ. καὶ ἡ ὑπὸ



ηγβ ἄρα, τῇ ὑπὸ ηαγ ἐστὶν ἴση. καὶ κοινὴ ἡ ὑπὸ αηγ ὀρθή, καὶ τρίτη ἄρα ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ ηζγ τρίτῃ τῇ ὑπὸ αγη. ἰσογώνιον ἄρα τὸ αηγ τῷ γηζ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αη πρὸς ηγ, ἡ γη πρὸς ηζ, καὶ ἡ αγ πρὸς γζ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ αγ πρὸς γζ, καὶ συναμφότερος ἡ γαβ πρὸς βγ. καὶ ὡς συναμφότερος ἄρα ἡ βαγ πρὸς βγ, ἡ αη πρὸς ηγ. διὰ τοῦτο οὖν ἡ αη πρὸς τὴν ηγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βϡια πρὸς ψπ. ἡ δὲ αγ πρὸς τὴν γη ἐλάσσονα, ἢ ὃν ͵γιγ∠δ πρὸς ψπ. δίχα ἡ ὑπὸ γαη τῇ αθ. ἡ αθ ἄρα διὰ τὰ αὐτὰ πρὸς τὴν θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵ελκδ∠δ πρὸς ψπ, ἢ ὃν ͵αωκγ πρὸς σμ. ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας δ ιγ. ὥστε ἡ αγ πρὸς τὴν γθ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵αωλη θ πρὸς σμ. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ θαγ τῇ κα. καὶ ἡ κα, πρὸς τὴν κγ ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵αζ πρὸς ξς. ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας οἶμαι ἄρα πρὸς τὸ κατάλογον ͵αος πρὸς ξς. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ καγ τῇ λα. ἡ αλ ἄρα πρὸς τὴν λγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν τὰ ͵βις ς πρὸς ξς. ἡ δὲ αγ πρὸς γλ ἐλάσσονα, ἢ τὰ ͵βιζδ πρὸς ξς. ἀνάπαλιν ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν διάμετρον μείζονα ἔχει λόγον ἤπερ ͵ςτλς πρὸς μας ͵βιζδ. ἅπερ τῶν ͵βιζδ μείζονα ἐστὶν ἢ τριπλασίονα καὶ δέκα οα. καὶ ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ ϟς πολυγώνου τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ τῆς διαμέτρου, τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων ἢ δέκα οα. ὥστε καὶ ὁ κύκλος ἔτι μᾶλλον τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων, ἢ δέκα οα. ἡ ἄρα τοῦ κύκλου περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ, καὶ ἐλάσσων μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει, μείζων δέ.

ΑΡΧΙ-

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΚΩΝΟΕΙΔΕΩΝ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΟΕΙΔΕΩΝ.

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΔΩΣΙΘΕΩ ΕΥΠΡΑΤΤΕΙΝ.

ΑΠΟΣΤΕΛΛΩ σοι γράψας ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ τῶν τε λοιπῶν θεωρημάτων τὰς ἀποδείξεις, ὧν οὐκ εἶχες ἐν τοῖς πρότερον ἀπεσταλμένοις, καὶ ἄλλων ὕστερον ποτεξευρημένων, ἃ πρότερον μὲν ἤδη πολλάκις ἐγχειρήσας ἐπισκέπτεσθαι δύσκολον ἔχειν τι φανείσας μοι τᾶς εὑρέσιας αὐτῶν ἠπόρησα. διόπερ οὐδὲ συνεξεδόθη τοῖς ἄλλοις αὐτὰ τὰ προβεβλημένα. ὕστερον δὲ ἐπιμελέστερον ποτ' αὐτοῖς γενόμενος ἐξεῦρον τὰ ἀπορηθέντα. ἦν δὲ τὰ μὲν λοιπὰ τῶν προτέρων θεωρημάτων περὶ τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος προβεβλημένα, τὰ δὲ νῦν ἐντὶ ποτεξευρημένα περί τε ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος, καὶ περὶ σφαιροειδέων σχημάτων, ὧν τὰ μὲν παραμάκεα, τὰ δὲ ἐπιπλατέα καλέω. περὶ μὲν οὖν τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ὑπέκειτο τάδε. εἴκα ὀρθογωνίου κώνου τομὰ μενούσας τᾶς διαμέτρου περιενεχθεῖσα ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, τὸ περιλαφθὲν σχῆμα ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ὀρθογώνιον κωνοειδὲς καλεῖσθαι, καὶ ἄξονα μὲν αὐτοῦ, τὰν μεμενακυῖαν διάμετρον καλεῖσθαι. κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἅπτεται ὁ ἄξων τᾶς τοῦ κωνοειδέος ἐπιφανείας. καὶ εἴκα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος σχήματος ἐπίπεδον ἐπιψαύῃ, παρὰ δὲ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθὲν ἀποτέμνῃ τι τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, βάσιν μὲν καλεῖσθαι τοῦ ἀποτμαθέντος τμάματος τὸ ἐπίπεδον τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ κωνοειδέος τομᾶς, ἐν τῷ ἀποτέμνοντι ἐπιπέδῳ, κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον καθ' ὃ ἐπιψαύει τὸ ἕτερον ἐπίπεδον τοῦ κωνοειδέος, ἄξονα δὲ τὰν περιλαφθεῖσαν εὐθεῖαν ἐν τῷ τμάματι, ἀπὸ τᾶς ἀχθείσας διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμάματος παρὰ τὸν ἄξονα τοῦ κωνοειδέος. προεβαλλόμην δὲ τάδε θεωρῆσαι, διότι εἴκα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος τμάματα ἀποτμαθῇ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ἡμιόλιον ἐσσεῖται τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. καὶ διότι εἴκα ἀπὸ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα ἀποτμαθέντα ἐπιπέδοις ὁπωσοῦν ἀγμένοις, τὰ ἀποτμαθέντα τμάματα διπλάσιον λόγον ἑξοῦντι ποτὶ τὰ ἄλλα τῶν ἀξόνων. περὶ δὲ τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ὑποτιθέμεθα μὲν τάδε. εἴκα ἐν ἐπιπέδῳ ἐόντι ἀμβλυγωνίου κώνου τομὰ, καὶ διάμετρος αὐτᾶς, καὶ ἔγγιστα τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου τομᾶς, μενούσας δὲ τᾶς διαμέτρου περιενεχθὲν τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ εἰρημέναι γραμμαὶ, ἀποκατασταθῇ πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, αἱ μὲν ἔγγιστα εὐθεῖαι τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς, δῆλον ὡς κῶνον ἰσοσκελῆ περιλαψοῦντι, οὗ κορυφὴ ἐσσεῖται τὸ σαμεῖον καθ' ὃ ἔγγιστα συμπίπτοντι. ἄξων δὲ ἁ μεμενακοῖσα διάμετρος. τὸ δὲ ὑπὸ τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς σχῆμα περιλαφθὲν, ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς καλεῖσθαι. ἄξονα δὲ αὐτοῦ τὰν μεμενακοῖσαν διάμετρον. κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἅπτεται ὁ ἄξων τᾶς ἐπιφανείας τοῦ κωνοειδέος. τὸν δὲ κῶνον τὸν περιλαφθέντα ὑπὸ τᾶς τοῦ ἔγγιστα τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς, περιέχοντα τὸ κωνοειδὲς καλεῖσθαι. τὰν δὲ μεταξὺ εὐθεῖαν τᾶς τε κορυφᾶς τοῦ κωνοειδέος καὶ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδὲς, ποτεοῦσαν τῷ ἄξονι καλεῖσθαι. καὶ εἴκα τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἐπίπεδον ἐπιψαύῃ, παρὰ δὲ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον, ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθὲν, ἀποτέμνῃ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, βάσιν μὲν καλεῖσθαι τοῦ ἀποτμαθέντος τμάματος τὸ ἐπίπεδον τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ κωνοειδέος τομᾶς, ἐν τῷ ἀποτέμνοντι ἐπιπέδῳ. κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἅπτεται τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐπιψαῦον τοῦ κωνοειδέος. ἄξονα τὰν περιλαφθεῖσαν ἐν τῷ τμάματι, ἀπὸ τᾶς ἀχθείσας διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμάματος, καὶ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές. καὶ τὰν μεταξὺ τᾶν εἰρημέναν κορυφᾶν εὐθεῖαν ποτεοῦσαν τῷ ἄξονι καλεῖσθαι. τὰ μὲν οὖν ὀρθογώνια κωνοειδέα πάντα, ὅμοια ἐντί. τῶν δὲ ἀμβλυγωνίων κωνοειδέων ὅμοια καλείσθω, ὧν καὶ οἱ κῶνοι οἱ περιέχοντες τὰ κωνοειδέα ὅμοιοι ἐντί. προβάλλεται δὲ τάδε θεωρῆσαι, διότι εἴκα τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἀποτμαθῇ τμάματα ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέρα ἴσα τῷ ἄξονι τοῦ τμάματος καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις, τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος, καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι. καὶ διότι, εἴκα τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος

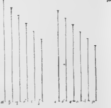
δέος τμᾶμα ἀποτμαθῇ ἐπιπέδῳ μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ
βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ὃ γίγνεται ἀπότμαμα κώνου. τοῦτον ἕξει τὸν
λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέρος ἴσα τῷ ἄξονι τοῦ τμάματος καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι,
ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος, καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι.
περὶ δὲ τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὑποτιθέμεθα τάδε. εἴκα ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς μενούσας τᾶς
μείζονος διαμέτρου περιενεχθεῖσα, ἀποκατασταθῇ πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, τὸ περιγραφὲν σχῆμα,
ὑπό τε τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς παραμακὲς σφαιροειδὲς καλεῖσθαι. εἰ δὲ τᾶς ἐλάσσονος δια-
μέτρου μενούσας περιενεχθεῖσα, ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἀποκατασταθῇ πάλιν ὅθεν ὥρμασεν,
τὸ περιγραφὲν σχῆμα ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐπιπλατυσφαιροειδὲς καλεῖσθαι.
ἑκατέρου δὲ τῶν σφαιροειδέων ἄξονα μὲν καλεῖσθαι τὰν μεμενακοῦσαν διάμετρον. κορυφὴ δὲ τὸ σα-
μεῖον καθ' ὃ ἅπτεται ὁ ἄξων τᾶς ἐπιφανείας τοῦ σφαιροειδέος. κέντρον δὲ καλεῖσθαι τὸ μέσον τοῦ
ἄξονος, καὶ διάμετρον τὰν διὰ τοῦ κέντρου ποτ' ὀρθὰς ἀγομέναν τῷ ἄξονι. καὶ εἴκα τῶν σφαιροει-
δέων σχημάτων ὁποτερωνοῦν ἐπίπεδα παράλλαλα ἐπιψαύοντι μὴ τέμνοντα, παρὰ δὲ τὰ ἐπίπεδα
τὰ ψαύοντα, ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθῇ, τέμνον τὸ σφαιροειδὲς τῶν γενομένων τμαμάτων, βάσιν μὲν
καλεῖσθαι τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ σφαιροειδέος τομᾶς ἐν τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ, κορυφὰς δὲ
τὰ σαμεῖα, καθ' ἃς ἐπιψαύοντι τοῦ σφαιροειδέος τὰ παράλλαλα ἐπίπεδα. ἄξονας δὲ τὰς ἐναπολαφ-
θείσας εὐθείας ἐν τοῖς τμαμάτεσσιν ἀπὸ τᾶς εὐθείας τὰς κορυφὰς αὐτῶν ἐπιζευγνυούσας. ὅτι δὲ τά
τε ἐπιψαύοντα ἐπίπεδα τοῦ σφαιροειδέος καθ' ἓν μόνον ἅπτονται σαμεῖον τᾶς ἐπιφανείας αὐ-
τοῦ, καὶ ὅτι ἁ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδέος πορεύεται, δεί-
ξομεν. ὅμοια δὲ καλεῖσθαι τῶν σφαιροειδέων σχημάτων, ὧν καὶ οἱ ἄξονες ποτὶ τὰς διαμέτρους τὸν
αὐτὸν λόγον ἔχοντι. τμᾶμα δὲ σφαιροειδέων σχημάτων καὶ κωνοειδέων ὅμοια καλεῖσθω, εἴκα ἀφ'
ὁμοίων σχημάτων ἀφαιρημένα ἔωντι, καὶ τάς τε βάσεις ὁμοίας ἔχοντι καὶ οἱ ἄξονες αὐτῶν, ἤτοι
ὀρθοὶ ἐόντες ποτὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν βάσεων, ἢ γωνίας ἴσας ποιοῦντες, ποτὶ τὰς ὁμολόγους διαμέτρους
τῶν βάσεων τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ποτ' ἀλλήλοις ταῖς ὁμολόγοις διαμέτροις τῶν βάσεων. προ-
βάλλεται δὲ περὶ τῶν σφαιροειδέων τάδε θεωρῆσαι. διὰ τί εἴκά τι τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ἐ-
πιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῶν γενομένων τμαμάτων, ἑκάτερον διπλά-
σιον ἐσσεῖται τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. εἴκα δὲ
ὀρθῷ μὲν ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ τμαθῇ, διὰ τοῦ κέντρου δὲ τῶν γενομένων τμαμάτων τὸ μὲν
μεῖζον ποτὶ τὸν κῶνον τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ἕξει τὸν λόγον,
ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα, τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς εὐθείας, ἅ ἐστιν ἄξων τοῦ σφαιροειδέος. καὶ τῷ ἄξονι τοῦ
ἐλάσσονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τοῦ ἐλάσσονος τμάματος. τὸ δὲ ἔλασσον τμᾶμα ποτὶ τὸν
κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ὃν ἁ
συναμφοτέραις ἴσα, τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς εὐθείας, ἅ ἐστιν ἄξων τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ
μείζονος τμάματος πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ μείζονος τμάματος. καὶ διὰ τί εἴκα τοῦ σφαιροειδέων τι ἐπιπέ-
δῳ τμαθῇ διὰ τοῦ κέντρου μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τῶν γενομένων τμαμάτων ἑκάτερον διπλάσιον ἐσ-
σεῖται τοῦ σχήματος, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. γίγνεται δὲ τὸ σχῆμα ἀ-
πότμαμα κώνου. εἴκα δὲ μήτε διὰ τοῦ κέντρου, μήτε ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ τμαθῇ τὸ
σφαιροειδὲς, τῶν γενομένων τμαμάτων, τὸ μὲν μεῖζον ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν
τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἕξει λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα τᾷ τε ἡμισείᾳ αὐτᾶς
τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν τμαμάτων καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ ἐλάσσονος τμάματος, πο-
τὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ ἐλάσσονος τμάματος. τὸ δὲ ἔλασσον τμᾶμα ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ βάσιν ἔχον τὰν
αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ συναμφοτέραις ἴσα τᾷ τε
ἡμισείᾳ τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν τμαμάτων, καὶ τῷ ἄξονι τοῦ μείζονος τμάματος
ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ μείζονος τμάματος. γίνεται δὲ καὶ ἐν τούτοις τὸ σχῆμα ἀπότμαμα κώνου.
ἀποδειχθέντων δὲ τῶν εἰρημένων θεωρημάτων διὰ τούτων εὑρίσκονται θεωρήματά τε πολλὰ καὶ
προβλήματα. οἷον καὶ τόδε, ὅτι τὰ ὅμοια σφαιροειδέα, καὶ τὰ ὅμοια τμάματα τῶν τε σφαιροει-
δέων σχημάτων καὶ τῶν κωνοειδέων, τριπλασίονα λόγον ἔχοντι ποτὶ τὰ ἄλλα τῶν ἀξόνων, καὶ
διότι τῶν ἰσοσφαιροειδέων σχημάτων τὰ τετράγωνα τὰ ὑπὸ τῶν διαμέτρων ἀντιπεπόνθασι τοῖς
ἀξόνεσσιν. καὶ εἴκα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων ἀντιπε-
πόνθασι τοῖς ἀξόνεσσιν, ἴσα ἐντὶ τὰ σφαιροειδέα. πρόβλημα δὲ οἷον καὶ τόδε, ἀπὸ τοῦ δοθέντος
σφαιροειδέος τμάματος ἢ κωνοειδέος τμᾶμα, ἀποτεμεῖν ἐπιπέδῳ παρὰ δοθὲν ἐπίπεδον ἀγ-
μένῳ.

κώνῳ. εἰ μὲν δὲ τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ἴσον τῷ δοθέντι κώνῳ, ἢ κυλίνδρῳ, ἢ σφαίρᾳ τᾷ δοθείσᾳ. προγραψάντες οὖν τά τε θεωρήματα καὶ τὰ ἐπιτάγματα τὰ χρείαν ἔχοντα εἰς τὰς ἀποδείξιας αὐτῶν, μετὰ ταῦτα γραψοῦμές τοι τὰ προβλήματα. εὐτύχει.

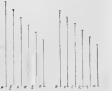
α

Εἴ κα κῶνος ἐπιπέδῳ τμαθῇ συμπίπτοντι πάσαις ταῖς τοῦ κώνου πλευραῖς, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ἤτοι κύκλος, ἢ ὀξυγωνίου κώνου τομά. εἰ μὲν οὖν κύκλος ἁ τομά, δῆλον ὅτι τὸ ἀπολαφθὲν ἀπὸ τοῦ κώνου τμᾶμα ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾷ τοῦ κώνου κορυφᾷ, κῶνος ἐσσεῖται. εἰ δέ κα ἁ τομὰ γένηται ὀξυγωνίου κώνου τομά, τὸ ἀπολαφθὲν ἀπὸ τοῦ κώνου σχῆμα ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῇ τοῦ κώνου κορυφᾷ ἀπότμαμα κώνου καλείσθω. τοῦ δ' ἀποτμάματος βάσις μὲν καλείσθω τὸ ἐπίπεδον, τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς. κορυφὰ δὲ τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ κώνου κορυφά. ἄξων δέ, ἁ ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου ἐπὶ τὸ κέντρον τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐπιζευχθεῖσα εὐθεῖα. καὶ εἴ κα κύλινδρος δυσὶν ἐπιπέδοισιν παραλλήλοις τμαθῇ, συμπιπτόντεσσι πάσαις ταῖς τοῦ κυλίνδρου πλευραῖς, αἱ τομαὶ ἐσσοῦνται, ἤτοι κύκλοι, ἢ ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ ἴσαι καὶ ὅμοιαι ἀλλήλαις. εἰ μὲν οὖν καὶ αἱ τομαὶ κύκλοι γένωνται, δῆλον ὅτι τὸ ἀποτμαθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου σχῆμα, μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων κύλινδρος ἐσσεῖται. εἰ δὲ καὶ αἱ τομαὶ γένωνται ὀξυγωνίων κώνων τομαί, τὸ ἀπολαφθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου σχῆμα μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τόμος κυλίνδρου καλείσθω. τοῦ δὲ τόμου βάσεις μὲν καλείσθων τὰ ἐπίπεδα τὰ περιλαφθέντα ὑπὸ τᾶν ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν. ἄξων δὲ ἁ ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα τὰ κέντρα τᾶν τῶν ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν. ἐσσεῖται δὲ αὐτὰ ἐπὶ τᾶς αὐτᾶς εὐθείας τῷ ἄξονι τοῦ κυλίνδρου. εἴ κα ἔωντι μεγέθεα, ὁποσαοῦν τῷ ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχοντα, ᾖ δὲ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τῷ ἐλαχίστῳ, καὶ ἄλλα μεγέθεα τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, πάντα τὰ μεγέθεα, ὧν ἐστιν ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, πάντων μὲν τῶν τῷ ἴσῳ ὑπερεχόντων ἐλάσσονα ἐσσοῦνται ἢ διπλάσια. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζονα ἢ διπλάσια. ἁ δὲ ἀπόδειξις τούτου φανερά.

β



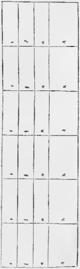
Εἴ κα μεγέθεα ὁποσαοῦν τῷ πλήθει, ἄλλοις μεγέθεσιν ἴσοις τῷ πλήθει κατὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι τὰ ὁμοίως τεταγμένα, λέγηται δὲ τά τε πρῶτα μεγέθεα ποτὶ τὰ ἄλλα μεγέθεα, ἢ πάντα, ἢ τινὰ αὐτῶν ἐν λόγοις ὁποιοισοῦν, καὶ τὰ ὕστερον ποτὶ ἄλλα μεγέθεα τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, πάντα τὰ πρῶτα μεγέθεα, ποτὶ πάντα ἃ λέγονται, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν ἔχοντι πάντα τὰ ὕστερον μεγέθεα ποτὶ πάντα ἃ λέγονται. ἔστω δὴ τὰ μεγέθεα τὰ α β γ δ ε ζ ἄλλοις μεγέθεσιν ἴσοις τῷ πλήθει τοῖς η θ ι κ λ μ, κατὰ δύο τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, καὶ ἐχέτω τὸ μὲν α ποτὶ τὸ β τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ η ποτὶ τὸ θ. τὸ δὲ β ποτὶ τὸ γ, ὃν τὸ θ ποτὶ τὸ ι. καὶ τὰ ἄλλα ὁμοίως τούτοις. λεγέσθω δὲ τὰ μὲν α β γ δ ε ζ μεγέθεα, ποτὶ τὰ ἄλλα μεγέθεα τὰ ν ξ ο π ρ σ, ἐν λόγοις ὁποιοισοῦν. τὰ δὲ η θ ι κ λ μ ποτὶ τὰ ἄλλα τὰ τ υ φ χ ψ ω, τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις. ὃν μὲν ἔχει λόγον τὸ α ποτὶ τὸ ν, τὸ η ἐχέτω ποτὶ τὸ τ. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ β ποτὶ τὸ ξ, τὸ θ ἐχέτω ποτὶ τὸ υ. καὶ τὰ ἄλλα ὁμοίως τούτοις. δεικτέον, ὅτι πάντα τὰ α β γ δ ε ζ ποτὶ πάντα τὰ ν ξ ο π ρ σ, τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ὃν πάντα τὰ η θ ι κ λ μ, ποτὶ πάντα τὰ τ υ φ χ ψ ω. ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ν ποτὶ τὸ α τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τ ποτὶ τὸ η, τὸ δὲ α ποτὶ τὸ β ὃν τὸ η ποτὶ τὸ θ, τὸ δὲ β ποτὶ τὸ ξ ὃν τὸ θ ποτὶ τὸ υ, τὸν αὐτὸν ἑξεῖ λόγον τὸ ν ποτὶ τὸ ξ, ὃν τὸ τ ποτὶ τὸ υ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ ξ ποτὶ τὸ ο, ὃν τὸ υ ποτὶ τὸ φ, καὶ τοῖς τὰ ἄλλα ὁμοίως. ἔχοντι δὴ τὰ μὲν α β γ δ ε ζ πάντα ποτὶ τὸ α τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχοντι τὰ η θ ι κ λ μ πάντα ποτὶ τὸ η. τὸ δὲ α ποτὶ τὸ ν, ὃν τὸ η ποτὶ τὸ τ. τὸ δὲ ν ποτὶ πάντα τὰ ν ξ ο π ρ σ, τὸν αὐτὸν λόγον ὃν τὸ τ ποτὶ πάντα τὰ τ υ φ χ ψ ω. δῆλον οὖν, ὅτι



πάντα τὰ α β γ δ ε ζ ποτὶ πάντα τὰ ν ξ ο π ρ ς τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ὃν πάντα τὰ η θ ι κ λ μ ποτὶ πάντα τὰ τ υ φ χ ψ ω. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ εἴκα τῶν τε α β γ δ ε ζ μεγέθεων, τὰ μὲν α β γ δ ε λέγοιτο ποτὶ τὰ ν ξ ο π ρ ς. τὸ δὲ ζ μηδὲ ποθὲν λέγηται, καὶ τῶν η θ ι κ λ μ λέγοιντο ποτὶ τὰ τ υ φ χ ψ ω, τὰ ὁμοίως ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, τὸ δὲ μ μηδὲ ποθὲν λέγηται, ὁμοίως πάντα τὰ α β γ δ ε ζ ποτὶ πάντα τὰ ν ξ ο π ρ ς, τὸν αὐτὸν ἔξοντι λόγον, ὃν πάντα τὰ η θ ι κ λ μ ποτὶ πάντα τὰ τ υ φ χ ψ ω.

γ Εἴκα γραμμαὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἐῶντι, ὁπόσαι οὖν τῷ πλήθει, καὶ παρ᾽ ἑκάσταν αὐτᾶν παραπέσῃ τι χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, ἐῶντι δὲ καὶ αἱ πλευραὶ τῶν ὑπερβλημάτων τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τᾷ ἐλαχίστᾳ, ἐῶντι δὲ καὶ ἄλλα χωρία τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ. ποτὶ μὲν πάντα τὰ ἕτερα χωρία ἐλάσσονα λόγον ἑξοῦντι τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἴσα συναμφοτέραις ταῖς τε τοῦ μεγίστου ὑπερβλήματος πλευραῖς. καὶ μία τᾶν ἰσᾶν ἐουσᾶν ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις, τᾷ τε τρίτῳ μέρει τᾶς τοῦ μεγίστου ὑπερβλήματος πλευρᾶς. καὶ τὰ ἡμίσεα μιᾶς τᾶν ἰσᾶν ἐουσᾶν. ποτὶ δὲ τὰ λοιπὰ χωρία ἄνευ τοῦ μεγίστου μείζονα λόγον ἑξοῦντι τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἔστω γὰρ ἴσαι εὐθεῖαι ὁποσαιοῦν τῷ πλήθει ἐφ᾽ ἂν τὰ α, καὶ παραπεπτωκέτω παρ᾽ ἑκάσταν αὐτᾶν χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ. ἔστων δὲ ὑπερβλημάτων πλευραὶ αἱ β, γ, δ, ε, ζ, η τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι. καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἔστω ἴσα τᾷ ἐλαχίστᾳ. καὶ μεγίστα μὲν ἔστω ἁ β, ἐλαχίστα δὲ ἁ η. ἔστω δὲ καὶ ἄλλα χωρία ὧν ἕκαστον τῶν θ ι κ λ τῷ μὲν



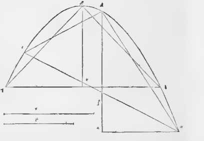


πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον ἔστω τῷ μεγίστῳ τῷ παρὰ τὰν α β παρακειμένῳ. ἔστω δὲ ἁ μὲν θ ι γραμμὰ ἴσα τᾷ α. ἁ δὲ κ λ ἴσα τᾷ β. καὶ τᾶν μὲν θ ι γραμμᾶν ἑκάστα ἔστω διπλασία τᾶς ι. τᾶν δὲ κ λ ἑκάστα τριπλασία τᾶς κ. δεικτέον ὅτι τὰ χωρία πάντα ἐν οἷς τὰ θ ι κ λ ποτὶ μὲν πάντα τὰ ἕτερα χωρία τὰ α β, α γ, α δ, α ε, α ζ, α η ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἁ θ ι κ λ εὐθεῖα ποτὶ τὰν ι κ. ποτὶ δὲ τὰ λοιπὰ ἄνευ τοῦ μεγίστου τοῦ α β μείζονα λόγον ἔχοντι τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἐντὶ γάρ τινα χωρία, ἐν οἷς τὰ α τῷ ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχοντα. καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τῷ ἐλαχίστῳ. ἐπεί τε τὰ παραβλήματα καὶ τὰ πλάτη τῷ ἴσῳ ὑπερέχουσιν, καὶ ἄλλα χωρία, ἐν οἷς τὰ θ ι τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ. σύμπαντα οὖν τὰ χωρία ἐν οἷς τὰ θ ι, πάντων μὲν τῶν ἐν οἷς τὰ α ἐλάσσονα ἐντί, ἢ διπλασίονα. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζον ἢ διπλασίονα. αὐτὰ οὖν τὰ χωρία ἐν οἷς τὰ ι, πάντων μὲν τῶν ἐν οἷς τὰ α ἐλάσσονα ἐντί. τῶν δὲ λοιπῶν ἄνευ τοῦ μεγίστου μείζονα πάλιν ἐντὶ γραμμαί τινες αἱ β γ δ ε ζ η, τῷ ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχουσαι, καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τᾷ ἐλαχίστᾳ, καὶ ἄλλαι γραμμαὶ ἐφ᾽ ἂν τὰ κ λ, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσαι τᾷ μεγίστᾳ. τὰ οὖν τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶν ἰσᾶν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, πάντων μὲν τῶν

μὲν τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ πασᾶν τῶν ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερεχουσᾶν, ἐλάσσονα ἐντὶ ἢ τριπλασία. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου μείζονα ἢ τριπλάσια, δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς περὶ τᾶν ἑλικᾶν ἐκδεδομένοις. τὰ οὖν χωρία ἐν οἷς τὸ κ, πάντων μὲν τῶν χωρίων ἐν οἷς β γ δ ε ζ η ἐλάσσονα ἐστίν. αὐτῶν δὲ τῶν ἐν οἷς τὰ γ δ ε ζ η μείζονα. ὥστε καὶ πάντα τὰ χωρία ἐν οἷς τὰ ι κ, πάντων μὲν τῶν ἐν οἷς α β, α γ, α δ, α ε, α ζ, α η ἐλάσσονα ἐστί. τῶν δὲ ἐν οἷς α γ, α δ, α ε, α ζ, α η μείζονα. δῆλον οὖν ὅτι πάντα τὰ χωρία ἐν οἷς τὰ θ ι, κ λ, ποτὶ μὲν τὰ χωρία ἐν οἷς τὰ α β, α γ, α δ, α ε, α ζ, α η ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι, τοῦ ὃν ἔχει ἁ θ λ ποτὶ τὰν ι κ, ποτὶ δὲ τὰ λοιπὰ χωρὶς τοῦ ἐν ᾧ τὸ α β μείζω τοῦ αὐτοῦ λόγου.

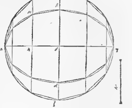
Εἴκα κώνου τομᾶς ὁποιασοῦν εὐθεῖαι, ἐπιψαύοντι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σαμείου ἀγμέναι, ἐῶντι δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι ἐν τᾷ τοῦ κώνου τομᾷ, παρὰ τὰς ἐπιψαυούσας ἀγμέναι, καὶ τέμνωσαι ἀλλάλας, τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον ποτὶ τὰ ἄλλα ὄντα τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ἐπιψαυουσᾶν, ὁμόλογον δὲ ἐσσεῖται τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τᾶς ἑτέρας γραμμᾶς τμαμάτων τετραγώνου, τὸ ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας παραλλάλας αὐτᾷ. ἀποδέδεικται δὲ τοῦτο ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις.

Εἴκα ἀπὸ τᾶς αὐτᾶς ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς δύο τμάματα ἀποτμηθέωντι ὁπωσοῦν, ἴσας ἔχοντα τὰς διαμέτρους, αὐτά τε τὰ τμάματα ἴσα ἐσσοῦνται, καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα εἰς αὐτά, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό. διάμετρον δὲ καλέω παντὸς τμάματος, τὰν δίχα τέμνουσαν τὰς εὐθείας πάσας, τὰς παρὰ τὰν βάσιν αὐτοῦ ἀγμένας. ἔστω ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ α β γ, καὶ ἀποτετμάσθω ἀπ' αὐτᾶς δύο τμάματα, τό, τε α δ ε, καὶ τὸ θ β γ. ἔστω δὲ τοῦ μὲν α δ ε τμάματος διάμετρος ἁ δ ζ, τοῦ δὲ θ β γ ἁ β η. καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ δ ζ, β η. δεικτέον ὅτι τὰ τμάματα ἴσα ἐντὶ τὰ α δ ε, θ β γ, καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα τὸν εἰρημένον τρόπον ἐν αὐτοῖς. ἔστω δὴ πρῶτον ἀποτεμνούσα τὸ ἕτερον τμᾶμα ἁ θ γ, ποτ' ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. λελάφθω ἁ ἂν δυνῶνται, αἱ ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν διάμετρον, διπλασία τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος. καὶ ἔστω ἐφ' ᾧ τὸ μ. ἀπὸ δὲ τοῦ α κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν δ ζ ἁ α κ. ἐπεὶ οὖν διάμετρός ἐντι ἁ δ ζ τοῦ τμάματος, ἁ τε α ε δίχα τέμνεται κατὰ τὸ ζ, καὶ ἁ δ ζ παρὰ τὰν διάμετρον ἐστὶ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. οὕτω γὰρ δίχα τέμνει πάσας τὰς παρὰ τὰν α ε ἀγμένας. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς α ζ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς α κ, τοῦτον ἐχέτω ἁ ν ποτὶ τὰν μ. αἱ δὴ ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν δ ζ ἀγόμεναι παρὰ τὰν α ε, δυνάνται τὰ παρὰ τὰν ἴσαν τᾷ ν παραπίπτοντα πλάτος ἔχοντα, ἃς αὐταὶ ἀπολαμβάνοντι ἀπὸ τᾶς δ ζ ποτὶ τὸ δ πέρας, δέδεικται γὰρ ἐν τοῖς κωνικοῖς. δυνάται οὖν καὶ ἁ α ζ ἴσον τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶς ν, καὶ τᾶς δ ζ. δυνάται δὲ καὶ ἁ θ η, ἴσον τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς μ, καὶ ὑπό τε τᾶς β η. ἐπεὶ κάθετος ἐστὶν ἁ θ η ἐπὶ τὰν διάμετρον, ἔχει καὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς α ζ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ η τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ν ποτὶ τὰν μ. ἐπεὶ ἴσαι ὑπόκεινται αἱ δ ζ, β η. ἔχει δὲ τὸ ἀπὸ τᾶς α ζ τετράγωνον, καὶ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς α κ, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ν ποτὶ τὰν μ. ἴσαι ἄρα ἐντὶ αἱ θ η, α κ. ἐντὶ δὲ ἴσαι καὶ αἱ β η, δ ζ. ὥστε ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τᾶν θ η, β η περιεχόμενον, τῷ ὑπὸ τᾶν α κ, δ ζ. ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ θ η β τρίγωνον τῷ δ α ζ τριγώνῳ, ὥστε καὶ τὰ διπλάσια. ἐστὶ δὲ τοῦ μὲν α δ ε τριγώνου ἐπίτριτον τὸ



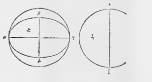
α δ ε τμῆμα. τοῦ δὲ θ β γ τριγώνου, ἐπίτριτον τὸ θ β γ τμῆμα. δῆλον οὖν ὅτι τὰ τμήματα ἴσα ἐντι, καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα εἰς αὐτά. εἰ δὲ μηδ᾽ ἑτέρα τᾶν τὰ τμήματα ἀποτεμνουσᾶν ποτ᾽ ὀρθὰς ἐντὶ τᾷ διαμέτρῳ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἀπολαφθείσας ἀπὸ τᾶς μετὰ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἴσας τᾷ διαμέτρῳ τᾶς τοῦ ἑνὸς τμάματος, καὶ ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ἀπολαφθείσας ποτ᾽ ὀρθὰς ἀχθείσας τᾷ διαμέτρῳ τὸ γενόμενον τμᾶμα, ἑκατέρῳ τῶν τμαμάτων ἴσον ἐσσεῖται. δῆλον οὖν ἐστὶ τὸ προτεθέν.

Πᾶν χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ τὸν κύκλον τὸν ἔχοντα διάμετρον ἴσαν τᾷ μείζονι διαμέτρῳ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ἐλάσσων διάμετρος αὐτᾶς ποτὶ τὰν μείζω, τουτέστι ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου διάμετρον. ἔστω γὰρ ὀξυγωνίου κώνου τομά, ἐφ᾽ ἇς τὰ α β γ δ. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μὲν μείζων ἔστω, ἐφ᾽ ἇς τὰ α γ, ἁ δὲ ἐλάσσων ἐφ᾽ ἇς τὰ β δ. ἔστω δὲ κύκλος περὶ διάμετρον τὰν α γ, δεικτέον ὅτι τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ποτὶ τὸν κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ β δ ποτὶ τὰν γ α, τουτέστι τὰν ε ζ. ὃν δὴ λόγον ἔχει ἁ β δ ποτὶ τὰν ε ζ, τοῦτον ἐχέτω ὁ κύκλος ἐν ᾧ τὸ ψ ποτὶ τὸν α ε γ ζ κύκλον. λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ ψ κύκλος τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ. εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ἴσος ὁ ψ κύκλος τῷ περιεχομένῳ χωρίῳ ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἔστω πρῶτον, εἰ δυνατόν, μείζων. δυνατὸν δή ἐστιν εἰς τὸν ψ κύκλον πολύγωνον ἐγγράψαι ἀρτιόγωνον, μεῖζον τοῦ α β γ δ χωρίου. νοείσθω δὴ ἐγγεγραμμένον. ἐγγεγράφθω δὴ καὶ εἰς τὸν α ε γ ζ κύκλον εὐθύγραμμον, ὅμοιον τῷ ἐν τῷ ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένῳ. καὶ ἀπὸ τᾶν γωνιᾶν αὐτοῦ κάθετοι ἄχθωσαν ἐπὶ τὰν α γ διάμετρον. ἐπὶ δὲ τὰ σαμεῖα καθ᾽ ἃ τέμνονται αἱ κάθετοι ταῖ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ, εὐθεῖαι ἐπεζεύχθωσαν. ἐσσεῖται δή τι εὐθύγραμμον, ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ ἐγγεγραμμένον, καὶ ἕξει τὸ αὐτὸ ποτὶ τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ α ε γ ζ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, τὸν αὐτὸν λόγον ὃν ἁ β δ ποτὶ τὰν ε ζ. ἐπεὶ γὰρ αἱ ε θ, κ λ κάθετοι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τέτμηνται κατὰ τὰ μ β, δῆλον ὅτι τὸ λ ε τραπέζιον ποτὶ τὸ θ μ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ θ ε ποτὶ τὰν β θ. διὰ ταῦτα δὲ καὶ τῶν ἄλλων τραπεζίων ἕκαστον τῶν ἐν τῷ κύκλῳ ποθ᾽ ἕκαστον τῶν τραπεζίων τῶν ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ε θ ποτὶ τὰν β θ. ἔχοντι δὲ καὶ



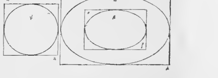
τὰ τρίγωνα τὰ ποτὶ τοῖς α, γ τὰ ἐν τῷ κύκλῳ, ποτὶ τὰ ἐν τᾷ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ τοῦτον τὸν λόγον. ἕξει οὖν καὶ ὅλον τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ α ε γ ζ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, ποτὶ ὅλον τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ε ζ ποτὶ τὰν β δ. ἔχει δὲ τὸ αὐτὸ τὸ εὐθύγραμμον καὶ ποτὶ τὸ ἐν τῷ ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, τοῦτον τὸν λόγον, διότι καὶ οἱ κύκλοι τοῦτον ἔχοντι τὸν λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, τῷ εὐθυγράμμῳ τῷ ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ ἐγγεγραμμένῳ, ὅπερ ἀδύνατον. μεῖζον γὰρ ἦν ὅλου τοῦ περιεχομένου χωρίου ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου τομᾶς. ἀλλ᾽ ἔστω, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων, πάλιν δὴ δυνατόν ἐστιν εἰς τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν ἐγγράψαι πολύγωνον ἀρτιόπλευρον μεῖζον τοῦ ψ κύκλου. ἐγγεγράφθω οὖν καὶ ἀπὸ τᾶν γωνιᾶν αὐτοῦ κάθετοι ἀχθεῖσαι ἐπὶ τὰν α γ ἐκβεβλήσθωσαν ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν. πάλιν οὖν ἐσσεῖταί τι ἐν τῷ α ε κύκλῳ εὐθύγραμμον ἐγγεγραμμένον, ὃ ἕξει ποτὶ τὰν ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ ἐγγεγραμμένον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ε ζ ποτὶ τὸν β δ. ἐγγεγραφέντος δὴ καὶ εἰς τὸν ψ κύκλον ὁμοίου αὐτῷ, δειχθήσεται τὸ ἐν τῷ ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον ἴσον ἐὸν τῷ ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ ἐγγεγραμμένῳ, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἔστιν οὖν οὐδὲ ἐλάσσων ὁ ψ κύκλος τοῦ χωρίου, τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς. δῆλον οὖν ὅτι τὸ εἰρημένον χωρίον ποτὶ τὸν α ε γ ζ κύκλον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ β δ ποτὶ τὰν ε ζ.

Πᾶν χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ πάντα κύκλον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν διαμέτρων τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τοῦ κύκλου διαμέτρου τετράγωνον. ἔστω γάρ τι χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἐν ᾧ τὸ χ, διάμετροι δὲ ἔστωσαν τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς αἱ α γ, β δ, μείζων δὲ ἁ α γ. καὶ κύκλος ἔστω, ἐν ᾧ τὸ ψ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἁ ε ζ. δεικτέον ὅτι τὸ χ χωρίον ποτὶ τὸν ψ κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν α γ, β δ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ε ζ τετράγωνον. περιγεγράφθω δὴ κύκλος περὶ διάμετρον τὰν α γ. τὸ δὴ χ χωρίον ποτὶ τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἁ α γ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν α γ, β δ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς α γ τετράγωνον. δέδεικται γὰρ ἔχον ὃν ἁ β δ ποτὶ τὰν α γ. ἔχει δὲ καὶ ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἁ α γ, ποτὶ τὸν κύκλον οὗ διάμετρος ἁ ε ζ, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς α γ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ε δ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ χ χωρίον ποτὶ τὸν ψ κύκλον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν α γ, β δ περιεχόμενον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ε ζ τετράγωνον.



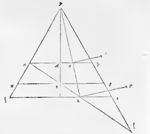
Τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ' ἄλλαλα, ὃν τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τᾶν διαμέτρων * τμαμάτων ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν ποτ' ἄλλαλα. ἔστω περιεχόμενα χωρία ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἐν οἷς τὰ α, β. ἔστω δὲ καὶ τὸ μὲν γ δ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν διαμέτρων τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τᾶς περιεχούσας τὸ α χωρίον, τὸ δὲ ε ζ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν διαμέτρων τᾶς ἑτέρας τομᾶς. δεικτέον ὅτι τὸ α χωρίον ποτὶ τὸ β τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ γ δ ποτὶ τὸ ε ζ. λελάφθω δὴ κύκλος τις, ἐν ᾧ τὸ ψ. ἀπὸ δὲ τᾶς διαμέτρου αὐτοῦ τετράγωνον ἔστω τὸ κ λ. ἔχει δὲ τὸ μὲν α χωρίον, ποτὶ τὸν ψ κύκλον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ γ δ ποτὶ τὸ κ λ. ὁ δὲ ψ κύκλος ποτὶ τὸ β χωρίον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ κ λ ποτὶ τὸ ε ζ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ α χωρίον ποτὶ τὸ β τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ γ δ ποτὶ τὸ ε ζ. ἐκ τούτου δὲ φανερόν, ὅτι τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ ὁμοιᾶν ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι δυνάμει ποτ' ἄλλαλα, ὃν αἱ ὁμόλογοι διάμετροι τᾶν τομᾶν.

* τᾶν τῶν



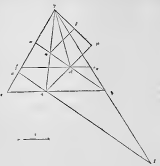
Ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς δοθείσας, καὶ γραμμᾶς ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἀνεστακούσας ὀρθᾶς ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστὶν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατόν ἐστι κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ πέρας τᾶς ἀνεστακούσας εὐθείας, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. δεδόσθω τις ὀξυγωνίου κώνου τομά, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτᾶς εὐθεῖα γραμμὰ ἀνεστακοῦσα ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστὶν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. διὰ δὲ τᾶς ἀνεστακούσας εὐθείας, καὶ τᾶς ἐλάσσονος διαμέτρου ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω, καὶ ἔστω ἐν αὐτῷ ἁ μὲν ἐλάσσων διάμετρος ἁ α β, τὸ δὲ κέντρον τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸ δ. ἁ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστακοῦσα ὀρθὰ ἁ γ δ. πέρας δὲ αὐτᾶς τὸ γ. ἁ δὲ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, νοείσθω περὶ διάμετρον τὰν α β ἐγγεγραμμένα ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὰν γ δ. δεῖ δὴ κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ γ σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἐπὶ τὰ α β εὐθεῖα ἀχθεῖσα ἐκβεβλήσθω, καὶ ἀπὸ τοῦ α διάχθω ἁ α ζ. ὥστε τὸ περιεχόμενον

ὑπὸ τᾶν α ε, ε ζ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ε γ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἡμισείας μείζονος διαμέτρου, ποτὶ τὸ ἀπὸ δ γ τετράγωνον. δυνατὸν δέ ἐστιν, ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ὁ λόγος ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶς α δ, δ β περιεχόμενον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς δ γ τετράγωνον. ἀπὸ δὲ τᾶς α ζ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ γ α ζ. ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ κύκλος γεγράφθω περὶ διάμετρον τὰν α ζ, ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου κῶνος ἔστω, κορυφὰν ἔχων τὸ γ σαμεῖον. ἐν δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, δειχθήσεται ἐοῦσα ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. εἰ μὴ ἐστὶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, ἀναγκαῖον εἶμεν τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ μή ἐστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. νοείσθω δὴ τὸ σαμεῖον, λελαμμένον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸ θ, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. καὶ ἀπὸ τοῦ θ κάθετος ἄχθω ἁ θ κ, ἐπὶ τὰν α β. ἐσσεῖται δὴ αὐτὰ ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ γ α ζ. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἐπὶ τὸ κ εὐθεῖα ἀχθεῖσα ἐκβεβλήσθω. συμπιπτέτω δὴ αὐτὰ τᾷ α ζ, κατὰ τὸ λ. καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τᾷ ζ α, ἁ λ μ, ἐν τῷ κύκλῳ τῷ περὶ τὰν α ζ. τὸ δὲ μ νοείσθω μετέωρον ἐπὶ τᾶς περιφερείας αὐτοῦ. ἄχθω δὲ καὶ παρὰ τὰν α β, διὰ μὲν τοῦ λ ἁ ξ ο. διὰ δὲ τοῦ ε, ἁ π ρ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τᾶν ε α, ε ζ περιεχόμενον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ε γ τετράγωνον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ἡμισείας τᾶς μείζονος διαμέτρου, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς δ γ. τὸ δὲ ἀπὸ τᾶς ε γ ποτὶ τὸ ὑπὸ ε π, ε ρ. καὶ ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς δ γ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α δ, δ β, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον τὸ ὑπὸ τᾶν α ε, ε ζ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν π ε, ε ρ, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἡμισείας τᾶς μείζονος διαμέτρου ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α δ, δ β. ἔστι δὲ ὡς μὲν τὸ ὑπὸ τᾶν α ε, ε γ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν π ε, ε ρ. οὕτω τὸ ὑπὸ τᾶν α λ, λ ζ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν λ ξ, λ ο. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τᾶς ἡμισείας τᾶς μείζονος διαμέτρου ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α δ, δ β, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ τετράγωνον, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α κ, κ β. τὸν αὐτὸν ἄρα ἔχει λόγον τὸ ὑπὸ τᾶν α λ, λ ζ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ξ λ, λ ο, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α κ, κ β. ἔχει δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ξ λ, λ ο ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς γ λ τετράγωνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν α κ, κ β ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς γ κ τετράγωνον. ἔχει ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α λ, λ ζ περιεχόμενον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς γ λ τετράγωνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ γ. τῷ δὲ ὑπὸ τᾶν α λ, λ ζ περιεχομένῳ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τᾶς λ μ τετράγωνον. ἐν ἡμικυκλίῳ γὰρ τῷ περὶ τὰν α ζ κάθετος ἄχθη ἁ λ μ. τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον τὸ ἀπὸ τᾶς λ μ τετράγωνον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς λ γ, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ γ. ὥστε ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τὰ γ θ μ σαμεῖα. ἁ δὲ γ μ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τοῦ κώνου. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ θ σαμεῖον ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται τοῦ κώνου. ὑπέκειτο δὲ μὴ εἶμεν, οὐκ ἄρα ἐστὶ σαμεῖον οὐδὲν ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ προειρημένου κώνου. ὅλα οὖν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ κώνου.



8 Ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς δοθείσας, καὶ γραμμᾶς μὴ ὀρθᾶς ἀνεστακούσας, ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐν ἐπιπέδῳ ἐστὶν ὀρθὸν ἀνεστακός, διὰ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ποτὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατόν ἐστι κῶνον εὑρεῖν, κορυφὰν ἔχοντα τὸ πέρας τᾶς ἀνεστακούσας εὐθείας, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἔστω δὲ διάμετρος μὲν τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἁ β α. κέντρον δὲ τὸ δ. καὶ ἁ δ γ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστακοῦσα, ὡς εἴρηται. ἁ δὲ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ νοείσθω περὶ διάμετρον τὰν α β ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ α β γ δ. δεῖ δὴ κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ γ σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά.

νου τομά. ἐν ᾧ δὴ ἐντὶ αἱ α γ, γ β. ἐπεὶ ἁ γ δ οὐκ ἐστὶν ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἔστω δὴ συνεστᾶσα ἐν τᾷ γ β. ἁ δὲ ν εὐθεῖα ἴσα ἔστω τᾷ ἡμισείᾳ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου, ἁ δή ἐστι συζυγὴς τᾷ α β. καὶ διὰ τοῦ δ ἄχθω ἁ ζ κ παρὰ τὰν ε β. ἀπὸ δὲ τᾶς ε β ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ α γ, γ β. καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ γεγράφθω περὶ διάμετρον τὰν ε β κύκλος, ἢ ἔλλειψις. εἰ μὲν ἴσον ἐστὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ν, τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ζ δ, δ κ, κύκλος. εἰ δὲ μή ἐστιν ἴσον, ὀξυγωνίου κώνου τομὰ τοιαύτα, ὥστε τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ε β τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ δ, δ κ. κῶνος λελάφθω κορυφὰν ἔχων τὸ γ σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ



ἐσσεῖται ὁ κύκλος, ἢ ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον γ τὰν ε β. δυνατὸν δέ ἐστι τοῦτο, ἐπειδὰ ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ μέσαν τὰν ε β ἀχθεῖσα ὀρθά ἐντι ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν ε β. ἐν ταύτᾳ δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ καὶ ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν α β. εἰ γὰρ μή ἐστιν, ἐσσεῖταί τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ οὐκ ἔσται ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. νοείσθω τὸ σαμεῖον λελαμμένον τὸ θ, ὃ οὐκ ἐστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, καὶ ἀπὸ τοῦ θ κάθετος ἄχθω ἁ κ θ ἐπὶ τὰν α β, ἁ δὲ γ κ ἐπιζευχθεῖσα, ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω τᾷ ε β κατὰ τὸ λ. διὰ δὲ τοῦ λ ἄχθω τις ἐν τῷ ὀρθῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰν ε β ποτ᾽ ὀρθὰς τᾷ ε β, ἁ λ μ. τὸ δὲ μ νοείσθω μετέωρον ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. ἄχθω δὲ καὶ διὰ τοῦ λ παρὰ τὰν α β ἁ π ρ. ἔστιν δὴ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τᾶς ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ δ, δ κ, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς λ μ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ε λ, λ β. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ δ, δ κ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α δ, δ β, οὕτως τὸ ὑπὸ ε λ, λ β ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν π λ, λ ρ. ἐσσεῖται οὖν ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ α δ, δ β περιεχόμενον, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς λ μ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν π λ, λ ρ. ἔχει δὲ ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α δ, δ β, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α κ, κ β. ἐπεὶ ἐν τᾷ αὐτᾷ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ κάθετοί ἐντι ἀγμέναι ἐπὶ διάμετρον τὰν α β, τὸν αὐτὸν ἄρα ἔχει λόγον τὸ ἀπὸ τᾶς λ μ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν π λ, λ ρ, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶς α κ, κ β. ἔχει δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν π λ, λ ρ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς γ λ τετράγωνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν α κ, κ β ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ γ. τὸν αὐτὸν οὖν λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς λ μ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς λ γ τετράγωνον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ γ. ὥστε ἐπ᾽ εὐθείας ἐντὶ τὰ γ, θ, μ σαμεῖα. ἁ δὲ γ μ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, δῆλον οὖν ἔτι καὶ τὸ θ σαμεῖον ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τοῦ κώνου. ὑπέκειτο δὲ μὴ εἶμεν. φανερὸν οὖν ἐστιν ὃ ἔδει δεῖξαι.

ι

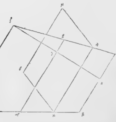
Ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς δοθείσας, καὶ γραμμᾶς ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἀνεστακούσας ἐν ἐπιπέδῳ, ὅ ἐστιν ἀπὸ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ὀρθὸν ἀνεστακὸς ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατόν ἐντι κύλινδρον εὑρεῖν τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ᾽ εὐθείας τᾷ ἀνεστακούσᾳ γραμμᾷ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἔστω τᾶς δοθείσας τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἑτέρα διάμετρος ἁ β α. κέντρον δὲ τὸ δ. ἁ δὲ γ δ γραμμὰ ἔστω ἀνεστακοῦσα ἀπὸ τοῦ κέντρου, ὡς εἴρηται. ἁ δὲ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ νοείσθω περὶ διάμετρον τὰν α β ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ, ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ α β, γ δ. δεῖ δὴ κύλιν-

δὴ κύλινδρον εὑρεῖν, τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ' εὐθείας τᾷ γδ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἀπὸ δὴ τῶν α, β σαμείων ἄχθω παρὰ τὰν γδ αἱ αζ, βη. ἁ δὴ ἑτέρα διάμετρος τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἤτοι ἴσα ἐντὶ τῷ διαστήματι τᾶν αζ, βη, ἢ μείζων ἢ ἐλάσσων. ἔστω δὴ πρότερον ἴσα τᾷ ζη. ἁ δὲ ζη ἔστω ποτ' ὀρθὰς τᾷ γδ. ἀπὸ δὲ τᾶς ζη, ἀνεστακέτω ἐπίπεδον ὀρθὸν ποτὶ τὰν γδ. καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ κύκλος, ἔστω περὶ διάμετρον τὰν ζη. καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος ἔστω, ἄξονα ἔχων τὰν γδ. ἐν δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ



τοῦ κυλίνδρου τούτου ἐστὶν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. εἰ γὰρ μὴ ἐστίν, ἐσσεῖται τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου. νοείσθω δή τι σαμεῖον λελαμμένον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸ θ, ὃ οὐκ ἐστὶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου. καὶ ἀπὸ τοῦ θ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν αβ ἁ θκ. ἐσσεῖται δὲ αὐτὰ ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ αβ, γδ. ἀπὸ δὲ τοῦ κ ἄχθω παρὰ τὰν γδ ἁ κλ, καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἀνεστακέτω ἁ λμ ποτ' ὀρθὰς τᾷ ζη ἐν τῷ κύκλῳ τῷ περὶ τὰν ζη. τὸ δὲ μ νοείσθω μετέωρον ἐν τᾷ περιφερείᾳ τοῦ ἡμικυκλίου τοῦ περὶ διάμετρον τὰν ζη. ἔχει δὴ λόγον τὸ τετράγωνον, τὸ ἀπὸ τᾶς θκ καθέτου, ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν ακ, κβ περιεχόμενον, ὃν τὸ ἀπὸ ζγ ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν αδ, δβ περιεχόμενον. ἐπεὶ ἴσα ἐστὶν ἁ ζη τᾷ ἑτέρᾳ διαμέτρῳ. ἔχει δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζλ, λη περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ ακ, κβ περιεχόμενον λόγον ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ζγ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ αδ δι' ἐλλείψεως. ἴσον οὖν ἐντὶ τὸ ὑπὸ τᾶς ζλ, λη περιεχόμενον, τῷ ἀπὸ τᾶς θκ τετραγώνῳ. ἔστι δὲ ἴσον καὶ τῷ ἀπὸ λμ, ἴσαι ἄρα ἐντὶ αἱ θκ, μλ κάθετοι. παράλληλοι οὖν ἐντὶ αἱ λκ, μθ. ὥστε καὶ αἱ δγ, μθ παράλληλοι ἐῶντι, καὶ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἄρα ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου ἁ θμ. ἐπεὶ ἀπὸ τοῦ μ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐόντος ἄκται παρὰ τὸν ἄξονα. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ θ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶν αὐτοῦ. ὑπέκειτο δὲ μὴ εἶμεν. φανερὸν οὖν ἐστὶν ὃ ἔδει δεῖξαι. δῆλον δή, ὅτι καὶ ὁ κύλινδρος ὁ περιλαμβάνων τὰν ἔλλειψιν, ὀρθὸς ἐσσεῖται. εἰ καὶ ἁ ἑτέρα διάμετρος ἴσα τῷ διαστήματι τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ἀγμένας παρὰ τὰν ἀνεστακοῦσαν εὐθεῖαν.

Ἔστω πάλιν ἑτέρα διάμετρος μείζων τᾶς ζη, καὶ ἴσα ἔστω ἁ πζ τᾷ ἑτέρᾳ διαμέτρῳ. ἀπὸ δὲ τᾶς πζ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθόν, ποτὶ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐντὶ ἁ βγδ. καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ κύκλος ἔστω περὶ διάμετρον τὰν πζ. ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος ἔστω, ἄξονα ἔχων τὰν δρ. ἐν



δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τούτου, διὰ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται οὖσα ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά.

Ἀλλ' ἔστω ἐλάσσων ἁ ἑτέρα διάμετρος τᾶς ζη, ᾧ δὴ μείζων δύναται ἁ ζγ τᾶς ἡμισείας τᾶς

ἑτέρας

ἑτέρας διαμέτρου. ἔστω τὸ ἀπὸ τᾶς γξ τετράγωνον. καὶ ἀπὸ τοῦ ξ ἀνεστακέτω γραμμὰ ἴσα τᾷ ἡμισέᾳ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου, ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ αβ, γδ, ἁ ξν. τὸ δὲ ν νοείσθω μετέωρον. ἁ δὲ γν ἔστω ἐν τᾷ γζ. ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ ζε, γν κύκλος γεγράφθω περὶ διάμετρον τὰν ζη. ἄξει δὲ οὗτος διὰ τοῦ ν, καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου κύλινδρος ἔστω ἄξονα ἔχων τὰν γδ. ἐν δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τούτου ἐστὶν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. εἰ γὰρ μή ἐστιν, ἐσσεῖταί τι σαμεῖον ἐπ' αὐτᾶς, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου. λελάφθω δή τι σαμεῖον



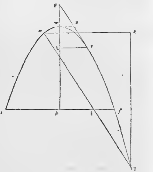
ἐπ' αὐτᾶς τὸ θ. καὶ ἁ θκ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν αβ. καὶ ἀπὸ τοῦ κ παρὰ τὰν γδ ἔστω ἁ κλ, καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τᾷ ζη ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ τῷ περὶ διάμετρον τὰν ζη, ἁ λμ. νοείσθω δὲ τὸ μ ἐπὶ τᾶς τοῦ ἡμικυκλίου τοῦ περὶ τὰν ζη. καὶ ἀπὸ τοῦ μ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν κλ ἐκβληθεῖσαν, ἁ μο. ἐσσεῖται δὲ αὐτὰ ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ αβ, γδ. ἐπεὶ ποτ' ὀρθάς ἐντι ἁ κλ τᾷ ζη, ἐσσεῖ δὴ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τᾶς μο ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς μλ, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς ξν ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς νγ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τᾶς μλ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ακ, κβ, οὕτως τὸ ἀπὸ γν ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς αδ. ἐπεὶ τὸ μὲν ἀπὸ τᾶς μλ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τᾶν κζ, κη περιεχομένῳ. τῷ δὲ ἀπὸ τᾶς γν τὸ ἀπὸ τᾶς γζ. ἐσσεῖ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς μο τετράγωνον ποτὶ ὑπὸ τᾶν ακ, κβ, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς νξ ποτὶ ἀπὸ τᾶς αδ. ἐντὶ δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κθ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ακ, κβ, ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς ξν ποτὶ ἀπὸ τᾶς αδ. ἐπεὶ ἴσα ἐστὶν ἁ ξν τᾷ ἡμισέᾳ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου. δῆλον οὖν ὅτι ἴσαι ἐντὶ αἱ μο, θκ κάθετοι. ὥστε ἴσαι αἱ κθ, θμ. ἐπεὶ δὲ ἁ μθ παρὰ τὸν ἄξονα ἐντὶ τοῦ κυλίνδρου, καὶ τὸ μ σαμεῖον ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ, ἀναγκαῖον καὶ τὰν μθ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ εἶμεν τοῦ κυλίνδρου. φανερὸν οὖν ὅτι καὶ τὸ θ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐντὶ αὐτοῦ. οὐκ ἦν δέ. δῆλον οὖν ὅτι ἀναγκαῖόν ἐστι τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ εἶμεν τοῦ κυλίνδρου.

Ὅτι μὲν πᾶς κῶνος ποτὶ κῶνον τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τε τοῦ τᾶν βάσεων λόγου, καὶ ἐκ τῶν ὑψέων, ἀποδέδεικται ὑπὸ τῶν πρότερον. ἁ αὐτὰ δὲ ἀπόδειξίς ἐντι. καὶ διότι πᾶν ἀπότμαμα κώνου ποτὶ ἀπότμαμα κώνου τὸν συγκείμενον λόγον ἔχει, ἔκ τε τοῦ τῶν βασίων λόγου, καὶ ἐκ τοῦ τῶν ὑψέων. καὶ ὅτι πᾶς τόμος κυλίνδρου, τριπλάσιός ἐστι τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τόμῳ, καὶ ὕψος ἴσον, ἁ αὐτὰ ἀπόδειξις, ἅπερ καὶ ὅτι ὁ κύλινδρος τριπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ κυλίνδρῳ, καὶ ὕψος ἴσον. ια

Εἴκα τὸ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ἢ παρὰ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀρθογωνίου κωνοειδέος τομὰ αὐτὰ ἁ περιλαμβάνουσα τὸ σχῆμα. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἐσσεῖται, ἁ κοινὰ τομὰ τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα, καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἀχθέντος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ τέμνον. εἰ δέ κα τμαθῇ τῷ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται, τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος. εἴκα τὸ ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ἢ παρὰ τὸν ἄξονα διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ἀμβλυγωνίου κώνου τομά. εἰ μὲν διὰ τοῦ ἄξονος αὐτὰ ἁ περιλαμβάνουσα τὸ σχῆμα, εἰ δὲ καὶ παρὰ τὸν ἄξονα ὁμοία αὐτᾷ. εἰ δὲ καὶ διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, οὐχ ὁμοία. διάμετρος δὲ τᾶς τομᾶς ἐσσεῖται, ἁ κοινὰ τομὰ τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα, καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. εἴκα τμαθῇ ὀρθῷ τῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸν ἄξονα ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται, τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος. εἴκα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποτερονοῦν ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ἢ παρὰ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. εἰ μὲν καὶ διὰ τοῦ ἄξονος, αὐτὰ ἁ περιλαμβάνουσα τὸ σχῆμα. εἰ δὲ καὶ παρὰ τὸν ἄξονα ὁμοία αὐτᾷ, διάμετρος δὲ τᾶς τομᾶς ἐσσεῖται ἁ κοινὰ τομὰ τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα, καὶ τοῦ ἀχθέν- ιβ

τος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. εἰ δὲ καὶ τμαθῇ τῷ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα κύκλος ἐσσεῖται, τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος. εἴκα τῶν εἰρημένων σχημάτων ὁποιονοῦν ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, αἱ ἀπὸ τῶν σαμείων τῶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος μὴ ἐπὶ τᾶς τομᾶς ἐόντων κάθετοι ἀγόμεναι ἐπὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, ἐντὸς πεσοῦνται τᾶς τοῦ σχήματος τομᾶς. τούτων δὲ πάντων φανεραί ἐντι αἱ ἀποδείξιες.

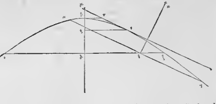
ιγ Εἴκα τὸ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ, μήτε διὰ τοῦ ἄξονος, μήτε παρὰ τὸν ἄξονα, μήτε ποτ᾽ ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἐσσεῖται ἁ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ κωνοειδεῖ, ἀπὸ τᾶς γενομένας τομᾶς τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα, καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. ἁ δὲ ἐλάσσων διάμετρος ἴσα ἐσσεῖται τῷ διαστήματι τᾶν ἀχθεισᾶν παρὰ τὸν ἄξονα, ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς μείζονος διαμέτρου. τετμάσθω γὰρ τὸ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ, ὡς εἴρηται. τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ἄλλῳ, διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. ἔστω τοῦ μὲν κωνοειδέος τομὰ ἁ α β γ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα ἁ γ α εὐθεῖα. ἄξων δὲ ἔστω τοῦ κωνοειδέος, καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ β δ. δεικτέον ὅτι ἁ τομὰ τοῦ κωνοειδέος, ἁ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου κατὰ τὰν α γ, ὀξυγωνίου ἐστὶ κώνου τομά. καὶ διάμετρος αὐτᾶς ἁ μείζων ἐστὶν ἁ α γ. ἁ δὲ ἐλάσσων διάμετρος ἴσα ἐντὶ ἁ λ α, τᾶς μὲν γ λ παρὰ τὰν β δ ἐούσας, τᾶς δὲ α λ καθέτου ἐπὶ τὰν γ λ. νοείσθω τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς τομᾶς λελαμμένον τὸ κ, καὶ ἀπὸ τοῦ κ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν γ α, ἁ κ θ. ἐσσεῖται οὖν ἁ κ θ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐστιν ἁ α γ β ὀρθογωνίου κώνου τομά. διότι καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. διὰ δὲ τοῦ



θ ἄχθω ἁ ε ζ ὀρθὰς ποιοῦσα γωνίας ποτὶ τὰν β δ. καὶ διὰ τᾶν ε ζ, κ θ εὐθειᾶν ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω. ἐσσεῖται δὲ τοῦτο ὀρθὸν ποτὶ τὰν β δ. τετμάσεται δὲ τὸ κωνοειδὲς σχῆμα ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ὥστε ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ δ. ἁ ἄρα κ θ ἴσον δυνασεῖται τῷ ὑπὸ ζ θ, θ ε. ἡμικύκλιον γάρ ἐστι τὸ ἐπὶ τᾶς ε ζ. καὶ ἁ κ θ κάθετος ἐοῦσα, μέσα γίνεται ἀνὰ λόγον τᾶν ὑπὸ τᾶν ε θ, θ ζ περιεχομένων. ἄχθω δὲ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἁ μὲν μ ν παρὰ τὰν α γ, ἐπιψαυέτω δὲ κατὰ τὸ ν. ἁ δὲ β τ παρὰ τὰν ε ζ. τὸ δὴ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν α θ, θ γ, ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ε θ, θ ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶν ν τ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς β τ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. τᾷ δὲ ν τ ἴσα ἐντὶ ἁ τ μ. διότι καὶ ἁ β ρ τᾷ β μ. ἔχει οὖν καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν α θ, θ γ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ θ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς τ μ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τ β. ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ καθέτου τετράγωνον, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α θ, θ γ περιεχόμενον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς β τ τετράγωνον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τ μ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιά ἐντι τὰ γ α λ, τ μ β τρίγωνα, ὁμοίως δειχθήσονται καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἄλλαν καθέτων τετράγωνα, τᾶν ἀγομένων ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν α γ, ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τᾶς α γ τμαμάτων, τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς α λ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς α γ. δῆλον οὖν ὅτι ἁ τομά ἐστιν ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετροι δὲ αὐτᾶς εἰσὶν ἁ μὲν μείζων ἁ α γ, ἁ δὲ ἐλάσσων ἴσα τᾷ α λ.

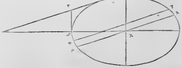
ιδ Εἴκα τὸ ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ συμπίπτοντι πάσαις ταῖς τοῦ κώνου πλευραῖς τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, μὴ ποτ᾽ ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. διά-

μά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἐσσεῖται, ἁ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀπὸ τᾶς γενομένας τομᾶς τῷ ἐπιπέδῳ, τῷ τε τέμνοντος τὸ σχῆμα καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. τετμάσθω γὰρ τὸ ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ, ὡς εἴρηται. καὶ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ τμαθέντος αὐτοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν κωνοειδέος τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓ ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, τοῦ δὲ τέμνοντος τὸ σχῆμα ἐπιπέδου ἁ ΑΓ εὐθεῖα. ἄξων δὲ τοῦ κωνοειδέος



καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ ΒΔ. νοείσθω δή τι ἐπὶ τᾶς τομᾶς λελαμμένον σαμεῖον τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν ΑΓ, ἁ ΚΘ. ἐσσεῖται δὴ αὐτὰ ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐντὶ ἁ ΑΒΓ κώνου τομά. διὰ δὲ τοῦ Θ ἄχθω ἁ ΕΖ ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΒΔ, καὶ διὰ τᾶν ΕΖ, ΚΘ εὐθειᾶν ἐπίπεδον ἄχθω, τέμνον τὸ κωνοειδές. τετμάσεται δὴ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ὥστε ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται, οὗ κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ Δ. ἁ ἄρα κάθετος ἁ ΚΘ ἴσον δυνασεῖται τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ΕΘ, ΘΖ. ἄχθω δὲ πάλιν ἁ ΜΝ παρὰ τὰν ΑΓ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Ν. ἁ δὲ ΒΤ παρὰ τὰν ΕΖ. τὸ δὴ περιεχόμενον ὑπὸ ΕΘ, ΘΖ ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΑΘ, ΘΓ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΤ πρὸς τὸ ἀπὸ τᾶς ΤΝ. ὥστε τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΘ καθέτου τετράγωνον ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΑΘ, ΘΓ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΤ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΤΝ. ὁμοίως οὖν δειχθησοῦντι, καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἀλλᾶν καθετᾶν τᾶν ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἀγομενᾶν, ἐπὶ τὰν ΑΓ ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς ΑΓ, ὧν αἱ κάθετοι ποιοῦντι τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΤ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΤΝ. καὶ ἐστὶν ἐλάσσων ἁ ΒΤ τᾶς ΤΝ. διότι καὶ ἁ ΜΤ ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ΤΝ. καὶ γὰρ ἁ ΜΒ, ἐλάσσων τᾶς ΒΡ. τοῦτο γὰρ ἐστὶν ἐν ταῖς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομαῖς συμπίπτοντι. δῆλον ὅτι ἁ τομά, ὀξυγωνίου κώνου τομά. καὶ διάμετρος αὐτᾶς μείζων ἁ ΑΓ. ὁμοίως καθέτου ἐούσας τᾶς ΝΡ ἐν τᾷ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾷ, διάμετρος ταύτας μείζων ἐστὶν ἁ ΓΛ.

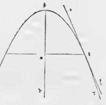
Εἴκα καὶ τὸ παραμακὲς σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ, μὴ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἐσσεῖται, ἁ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ σφαιροειδεῖ ἀπὸ τᾶς γενομένας τομᾶς τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα, καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. εἰ μὲν οὖν κατὰ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ἢ παρὰ τὸν ἄξονα δῆλον. τετμάσθω δὲ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ. τμαθέντος δὲ αὐτοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον τοῦ σφαιροειδέος τομά, ἔστω ἁ ΑΒΓΔ ὀξυγωνίου κώνου τομά. τοῦ δὲ τέμνοντος αὖ τὸ ἐπίπεδον, ἁ ΓΑ εὐθεῖα. ἄξων δὲ ἔστω 69



τοῦ σφαιροειδέος, καὶ διάμετρος τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἁ ΒΔ. κέντρον δὲ τὸ Χ. καὶ ἐλάσ-

σαν διάμετρος ἔστω ἁ π ρ. ἄχθω δὲ ἁ μὲν β τ ποτ᾽ ὀρθὰς τᾷ β δ, ἁ δὲ ν παρὰ τὰν α γ, ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὸ ν. ἄχθω δὴ καὶ ἁ ν λ διὰ τοῦ χ παρὰ τὰν α γ. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθησοῦντι τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν καθέτων τᾶν ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν α γ, ἀγομένας ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τᾶς α γ τμαμάτων, τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς β τ τετράγωνον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τ ν. ὅτι μὲν οὖν ἁ τομὰ ἐστὶν ὀξυγωνίου κώνου τομά, καὶ διάμετρος αὐτᾶς ἁ γ α, δῆλον. ὅτι δὲ μείζων, δεικτέον. τὸ γὰρ ὑπὸ τᾶν π χ, χ ρ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ μ χ, χ λ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς β τ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ν τ. ἐπεὶ παρὰ τὰς ἐπιψαυούσας ἐντὶ αἱ π ρ, μ λ. ἔλασσον δὲ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τᾶν π χ, χ ρ περιεχόμενον τοῦ ὑπὸ τᾶν μ χ, χ λ. ἐπεὶ καὶ ἁ χ π τᾶς χ λ. ἔλασσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς β τ τετράγωνον, τοῦ ἀπὸ τᾶς τ ν. ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν καθέτων τετράγωνα τῶν ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν α γ ἀγομέναν ἐλάσσονα ἐντὶ τῶν ὑπὸ τᾶν τμαμάτων τᾶς α γ περιεχομένων. δῆλον οὖν ὅτι μείζων ἐντὶ διάμετρος ἁ γ α, εἴκα τὸ ἐπιπλατυσφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ, τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτὰ ἐσσεῖται. τᾶν δὲ διαμέτρων ἐλάσσων ἐσσεῖται ἁ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ σφαιροειδεῖ. ἔστι αὐτῶν δὲ φανερὸν ἐν πᾶσι τοῖς σχημάτεσσιν, ὅτι εἴκα παραλλήλοις ἐπιπέδοις τμαθῇ, αἱ αὐτῶν τομαὶ ὁμοῖαι ἐσσοῦνται. τὰ γὰρ τετράγωνα τᾶν ἀπὸ τῶν καθέτων ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων τὼς αὐτὼς λόγως ἑξοῦντι.

ιε [15] Εἴκα τῷ ὀρθογωνίῳ κωνοειδεῖ ἀπὸ παντὸς ὁτουοῦν σαμείου τῶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κωνοειδέος τᾶν ἀγομέναν εὐθειᾶν παρὰ τὸν ἄξονα, αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι, ἐφ᾽ ἃ ἐντὶ τὰ κυρτὰ αὐτοῦ ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ κωνοειδέος, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός. ἀχθέντος γὰρ ἐπιπέδου διά τε τοῦ ἄξονος καὶ τοῦ σαμείου, ἀφ᾽ οὗ ἁ παράλληλος ἄγεται τῷ ἄξονι τομὰ ἐσσεῖται ὀρθογωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ὁ ἄξων τοῦ κωνοειδέος. ἐν δὲ τᾷ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾷ, ἀπὸ παντὸς σαμείου τοῦ ἐπὶ τᾶς τομᾶς ἀγομέναν παρὰ τὰν διάμετρον εὐθειᾶν, αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι ἐφ᾽ ἃ ἐντὶ τὰ κυρτὰ αὐτᾶς, ἐκτὸς πίπτοντι, αἱ δὲ ἐπὶ τὰ θάτερα ἐντός. δῆλον οὖν τὸ προτεθέν. ἐν τῷ ἀμβλυγωνίῳ κωνοειδεῖ ἀπὸ παντὸς σαμείου τῶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ τᾶν ἀγομέναν εὐθειᾶν παρά τινα γραμμάν, ἃ ἐστὶν ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀγομένας διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι, ἐφ᾽ ἃ ἐντὶ τὰ κυρτὰ αὐτοῦ ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ κωνοειδέος, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός. ἀχθέντος γὰρ ἐπιπέδου διά τε τᾶς εὐθείας τᾶς ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀγομένας διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, καὶ διὰ τοῦ σαμείου ἀφ᾽ οὗ ἄγεται ἁ εὐθεῖα, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ἀμβλυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀγομένα. ἐν δὲ τᾷ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾷ ἀπὸ παντὸς σαμείου τοῦ ἐπὶ τᾶς τομᾶς τᾶν ἀγομέναν εὐθειᾶν παρὰ τὰν οὕτως ἀγμέναν γραμμάν, αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι, ἐφ᾽ ἃ ἐστὶν αὐτᾶς τὰ κυρτὰ ἐκτὸς πίπτοντι, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός. εἴκα τοῦ κωνοειδέων σχημάτων ἐπίπεδον ἐφάπτηται, μὴ τέμνον τὸ κωνοειδές, καθ᾽ ἓν μόνον ἅψεται σαμεῖον. καὶ τὸ διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον.



ἐφαπτέσθω γὰρ εἰ δυνατὸν κατὰ πλείονα σαμεῖα. λαφθέντων δὲ δύο σαμείων καθ᾽ ἃ ἅπτεται τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον τοῦ κωνοειδέος, καὶ ἀφ᾽ ἑκατέρου παρὰ τὸν ἄξονα εὐθειᾶν ἀχθεισᾶν, ἀπὸ δὲ τᾶν ἀχθεισᾶν παρὰ τὸν ἄξονα ἐπίπεδον ἐκβληθέν, ἤτοι διὰ τοῦ ἄξονος, ἢ παρὰ τὸν ἄξονα ἐσσεῖται ἀγμένον. ὥστε τὰν τομὰν ποιήσει κώνου τομάν, καὶ τὰ σαμεῖα ἐσσοῦνται ἐν τᾷ τοῦ κώνου τομᾷ. ἐπεὶ οὖν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐντί, καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. ἁ οὖν μεταξὺ τῶν σαμείων εὐθεῖα ἐντὸς ἐσσεῖται τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ὥστε καὶ τᾶς τοῦ κωνοειδέος ἐπιφανείας ἐντὸς ἐσσεῖται. ἔστι δὲ ἁ εὐθεῖα αὐτὰ ἐν τῷ ἐπιψαύοντι ἐπιπέδῳ. διότι καὶ τὰ σαμεῖα. τοῦ ἄρα ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου ἐσσεῖταί τι ἐντὸς τοῦ κωνοειδέος, ὅπερ ἀδύνατον. ὑπέκειτο γάρ, μὴ τέμνειν. καθ᾽ ἓν ἄρα μόνον ἅψεται σαμεῖον. ὅτι δὲ καὶ διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπιψαῦον κατὰ τὰν κορυφὰν τοῦ κωνοειδέος, ἐφάπτεται δῆλον. ἀχθέντων γὰρ διὰ τοῦ ἄξονος δύο ἐπι-

δύο ἐπιπέδων τοῦ κωνοειδέος αἱ τομαὶ ἐσσοῦνται κώνων τομαὶ, διαμέτρους ἔχουσαι τὸν ἄξονα. τοῦ δὲ ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου αἱ εὐθεῖαι ἐπιψαύοντι τῶν τῶν κώνων τομῶν κατὰ τὸ πέρας τᾶς διαμέτρου ὀρθὰς ποιοῦντι γωνίας ποτὶ τὰν διάμετρον. ἐσσοῦνται οὖν ἐν τῷ ἐπιψαύοντι ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ὀρθὸν οὖν ἐσσεῖται ποτὶ τὸν ἄξονα τὸ ἐπίπεδον. ὥς τε καὶ πρὸς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος. ἀλλὰ ἔστω μὴ κατὰ τὰν κορυφὰν τοῦ κωνοειδέος ἐπιψαῦον τὸ ἐπίπεδον, ἄχθω δὴ ἐπίπεδον διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος. καὶ τοῦ μὲν κωνοειδέος τομὰ, ἔστω ἁ β γ κώνου τομά. ἄξων δὲ ἔστω καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ β δ. τοῦ δὲ ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου τομὰ, ἔστω ἁ ε θ ζ εὐθεῖα, τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς ἁπτομένα κατὰ τὸ θ. ἀπὸ δὲ τοῦ θ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν β δ, ἁ θ κ καὶ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθὸν ἐπὶ τὸν ἄξονα. ποιήσει δὲ τοῦτο τὰν τομὰν κύκλον, οὗ κέντρον τὸ κ. ἁ δὲ τομὰ τούτου τοῦ ἐπιπέδου καὶ τοῦ ἐπιψαύοντος ἐσσεῖται ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου, ὀρθὰς ἄρα ποιήσει γωνίας ποτὶ τὰν θ κ. ὥς τε ὀρθὰ ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, τῷ ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ κ θ, β δ. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ἐπεὶ καὶ αἱ ἐν αὐτῷ εὐθεῖαι.

Εἴκα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποτερονοῦν ἐπίπεδον ἅπτηται μὴ τέμνον τὸ σχῆμα, καθ' ἓν μόνον ἅψεται σαμεῖον, καὶ τὸ διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον. ἁπτέσθω γὰρ κατὰ πλείονα σαμεῖα. λαφθέντων δὲ τῶν σαμείων καθ' ἃ ἅπτεται τὸ ἐπίπεδον τοῦ σφαιροειδέος, καὶ ἀφ' ἑκατέρου αὐτῶν παρὰ τὸν ἄξονα εὐθεῖαι ἀχθῶσι, καὶ διὰ τῶν ἀχθεισῶν ἐπιπέδου ἐκβληθέντος ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. καὶ τὰ σαμεῖα ἐσσοῦνται ἐν τᾷ τοῦ κώνου τομᾷ. ἁ οὖν μεταξὺ τῶν σαμείων εὐθεῖα ἐντὸς ἐσσεῖται τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς. ὥς τε καὶ τᾶς τοῦ σφαιροειδέος ἐπιφανείας ἐντὸς ἐσσεῖται. ἔστι δὲ ἁ εὐθεῖα ἐν τῷ ἐπιψαύοντι ἐπιπέδῳ, διότι καὶ τὰ σαμεῖα. τοῦ οὖν ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου, ἐσσεῖται τι ἐντὸς τοῦ σφαιροειδέος. οὐκ ἔστι δὲ, ὑπέκειτο γὰρ μὴ τέμνειν. δῆλον οὖν ὅτι καθ' ἓν σαμεῖον μόνον ἅψεται. ὅτι δὲ τὸ διὰ τᾶς ἁφᾶς, καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν, ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐπιψαῦον, ὁμοίως δειχθήσεται τοῖς ἐπὶ τοῦ κωνοειδέων σχημάτων. εἴκα τοῦ σφαιροειδέων σχημάτων ὁποιονοῦν ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ τᾶς γενομένας τομᾶς ἐπιψαύουσά τις ἀχθῇ εὐθεῖα, καὶ διὰ τᾶς ἐπιψαυούσας ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν ποτὶ τὸ τέμνον, ἐπιψαύσει τοῦ σχήματος κατὰ τὸ αὐτὸ σαμεῖον, καθ' ὃ καὶ ἁ εὐθεῖα ἐπιψαύει τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς. οὐ γὰρ ἅψεται κατ' ἄλλο σαμεῖον τᾶς ἐπιφανείας αὐτοῦ. εἰ δὲ μὴ, ἁ ἀπὸ τοῦ σαμείου κάθετος ἀγομένα ἐπὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον πεσεῖται ἐκτὸς τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς. ἐπεὶ γὰρ τὰν ἐπιψαύουσαν πεσεῖται, ἐπεὶ ὀρθά ποτ' ἄλλαλα ἐντὶ τὰ ἐπίπεδα, ὅπερ ἀδύνατον, ἐδείχθη γὰρ ὅτι ἐντὸς πεσεῖται.

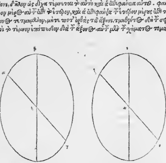
Εἴκα τῶν σφαιροειδέων τινὸς σχήματος δύο ἐπίπεδα παράλληλα ἐπιψαύοντι, ἁ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδέος πορεύσεται. ὅτι μὲν οὖν κατ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι τὰ ἐπίπεδα ἐντὶ, δῆλον. ἀλλ' ἔστω μὴ ποτ' ὀρθάς. τὸ δὴ ἐπίπεδον τὸ ἀχθὲν διὰ τοῦ ἄξονος καὶ τᾶς ἁφᾶς τᾶς ἑτέρας, ὀρθὸν ἐσσεῖται πρὸς τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον. ὥς τε καὶ ποτὶ τὸ παράλληλον αὐτῷ. ἀναγκαῖον ἄρα τὸ αὐτὸ εἶμεν ἐπίπεδον, τὸ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ἑκατέρας ἁφᾶς ἀγμένον. εἰ δὲ μὴ ἐσσοῦνται δύο ἐπίπεδα ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ὀρθὰ διὰ τᾶς αὐτᾶς γραμμᾶς ἀγμένα οὐκ ἐούσας ὀρθᾶς ποτὶ τὸ ἐπίπεδον. ὑπέκειτο γὰρ ὁ ἄξων μὴ εἶμεν ὀρθὸς ποτὶ τὰ παράλλαλα ἐπίπεδα. ἐν τῷ αὐτῷ ἄρα ἐσσοῦνται ἐπιπέδῳ ὅ τε ἄξων καὶ αἱ ἁφαὶ, καὶ τετμηκὸς ἐσσεῖται τὸ σφαιροειδὲς διὰ τοῦ ἄξονος. ἁ οὖν τομὰ ἐσσεῖται, ὀξυγωνίου κώνου τομά. αἱ δὲ τῶν ἐπιψαυουσῶν ἐπιπέδων τομαὶ παράλληλοι ἐσσοῦνται αἱ ἐπιψαύουσαι τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὰς ἁφὰς τῶν ἐπιπέδων. εἰ δέ κα δύο εὐθεῖαι ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐπιψαύοντι παράλληλοι ἐοῦσαι, τὸ τε κέντρον τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, καὶ αἱ ἁφαὶ ἐπ' εὐθείας ἐντί.

Εἴκα τοῦ σφαιροειδέων σχημάτων ὁποτερονοῦν δύο παράλληλα ἐπίπεδα ἀχθῇ ἐπιψαύοντα, ἀχθῇ δὲ καὶ ἐπίπεδον διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδέος παρὰ τὰ ἐπιψαύοντα, αἱ διὰ τᾶς γενομένας τομᾶς ἀγόμεναι παρὰ τὰν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ σφαιροειδέος. ὑποκείσθω τὰ εἰρημένα, καὶ λελάφθω τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς γενομένας τομᾶς. καὶ διὰ τοῦ γενομένου σαμείου, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσας ἐπίπεδον ἄχθω. τέμνει δὲ τοῦτο τὸ σφαιροειδὲς καὶ τὰ παράλλαλα ἐπίπεδα. ἔστω οὖν ἁ μὲν τοῦ



σφαιροειδέος τομὰ ἁ α β γ δ ὀξυγωνίου κώνου τομά. αἱ δὲ τῶν ἐπιπέδων τῶν ἐπιψαυόντων τομαί, αἱ ε ζ, η θ εὐθεῖαι, τὸ δὲ ἁφθὲν σαμεῖον, τὸ α. ἁ δὲ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα ἔστω ἁ β δ. πεσεῖται δὴ αὕτα διὰ τοῦ κέντρου. ἁ δὲ τοῦ παραλλήλου ἐπιπέδου τοῖς ἐπιψαυόντεσσιν ἐπιπέδοις τομὰ ἁ γ α. ἐσσεῖται δὲ αὕτα διὰ τοῦ κέντρου ἀγομένα, ἐπεὶ καὶ τὸ ἐπίπεδον. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ἁ α β γ δ, ἤτοι κύκλος ἢ ὀξυγωνίου κώνου τομά, καὶ ἐπιψαύοντι αὐτᾶς αἱ δύο εὐθεῖαι αἱ ε ζ, η θ. διὰ δὲ τοῦ κέντρου παράλληλος αὐταῖς ἁ α γ. δῆλον ὡς αἱ ἀπὸ τῶν α γ ἀγόμεναι σαμείων παρὰ τὰν β δ ἐπιψαύοντι τᾶς τομᾶς, ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ σφαιροειδέος. εἰ δὲ καὶ τὸ παράλληλον ἐπίπεδον τοῖς ἐπιψαυόντεσσι σαμείοις, μὴ διὰ τοῦ κέντρου ἀγμένον, ἢ ὡς τὸ κ λ. δῆλον ὡς τὰν διὰ τᾶς τομᾶς τὰν γινομέναν εὐθεῖαν, αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ γινόμεναι τῷ ἐλάσσονι τμάματι, ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ σφαιροειδέος, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός.

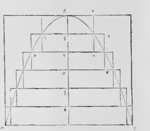
κʹ Πᾶν σχῆμα σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθὲν διὰ τοῦ κέντρου, δίχα τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου, καὶ αὐτὸ καὶ ἁ ἐπιφάνεια αὐτοῦ. τετμάσθω γὰρ τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου, ἤτοι δὴ καὶ διὰ τοῦ ἄξονος ἐσσεῖται τετμαμένον, ἢ ποτ᾽ ὀρθὰς τῷ ἄξονι. εἰ μὲν οὖν διὰ τοῦ ἄξονος τέμνεται, ἢ ποτ᾽ ὀρθὰς τῷ ἄξονι, δῆλον ὡς δίχα τέμνεται τό τε αὐτὸ καὶ ἁ ἐπιφάνεια αὐτοῦ. φανερὸν γὰρ ὅτι ἐφαρμόζει τὸ ἕτερον μέρος αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἕτερον, καὶ ἁ ἐπιφάνεια τοῦ ἑτέρου μέρεος ἐπὶ τὰν ἑτέρου. ἀλλ᾽ ἔστω μὴ διὰ τοῦ ἄξονος τετμαμένον, μήτε ποτ᾽ ὀρθὰς τῷ ἄξονι. τμαθέντος δὴ τοῦ σφαιροειδέος ἐπιπέδῳ ὀρθῷ, ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον διὰ τοῦ ἄξονος, αὐτοῦ μὲν τοῦ σχήματος τομὰ ἔστω ἁ α β γ δ ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἔστω καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδέος, ἁ β δ, καὶ κέντρον τὸ θ. τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ τετμακότος διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδέος, ἔστω τομὰ ἁ α γ εὐθεῖα. λελάφθω δὴ καὶ ἄλλο σφαιροειδές, ἴσον καὶ ὅμοιον τούτῳ, καὶ τμαθέντος αὐτοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ τομά, ἔστω ἁ ε ζ η ν ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδέος ἁ ε η, καὶ κέντρον τὸ κ. καὶ διὰ τοῦ κ ἄχθω ἁ ζ ν γωνίαν ποιοῦσα τὰν κ, ἴσαν τᾷ θ. ἀπὸ δὲ τᾶς ζ ν ἐπίπεδον ἔστω ἀνεστακὸς ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ ε ζ η ν τομά. ἐντὶ δὴ αἱ τῶν ὀξυγωνίων κώνων τομαί, αἱ α β γ δ, ε ζ η ν, ἴσαι καὶ ὅμοιαι ἀλλήλαις. ἐφαρμόζοντι οὖν ἐπ᾽ ἀλλάλας τεθείσας τᾶς ε η ἐπὶ τὰν β δ, καὶ ἁ ζ ν ἐπὶ τὰν α γ. ἐφαρμόζει δὲ καὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν ν ζ τῷ ἐπιπέδῳ τῷ κατὰ τὰν α γ. ἐπεὶ ἀπὸ τᾶς αὐτᾶς γραμμᾶς ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἀμφότερα ἐντί, ἐφαρμόζει οὖν καὶ τὸ τμᾶμα τὸ ὑπὸ ἐπιπέδου ἀποτεμνόμενον τοῦ κατὰ τὰν ν ζ, ἀπὸ τοῦ σφαιροειδέος τὸ ἐπὶ τὰς τῷ ἑτέρῳ τμάματι τῷ ἀποτεμνομένῳ ἀπὸ τοῦ ἑτέρου σφαιροειδέος, ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὰν α γ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ β, καὶ λοιπὸν τμᾶμα ἐπὶ τὸ λοιπόν. καὶ ἁ ἐπιφάνεια τῶν τμαμάτων ἐπὶ τὰς ἐπιφανείας. πάλιν δὲ καὶ τεθείσας τᾶς ε η ἐπὶ τὰν β δ οὕτως, ὥστε τὸ μὲν ε κατὰ τὸ δ κεῖσθαι, τὸ δὲ η κατὰ τὸ β. τὰ δὲ μεταξὺ τῶν ν ζ σαμείων γραμμὰν ἐπὶ τὰν μεταξὺ τῶν α γ σαμείων. δῆλον ὡς αἵ τε τῶν ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ ἐφαρμόζοντι ἐπ᾽ ἀλλάλας. καὶ τὸ μὲν ζ ἐπὶ τὸ γ πεσεῖται, τὸ δὲ ν ἐπὶ τὸ α. ὁμοίως καὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν ν ζ, ἐφαρμόζει τῷ ἐπιπέδῳ τῷ κατὰ τὰν α γ, καὶ τῶν τμαμάτων τῶν ἀποτεμνομένων ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὰν ν ζ, τὸ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ η ἐφαρμόζει τῷ τμάματι, τῷ ἀποτεμνομένῳ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὰν α γ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ β. τὸ δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ ε τῷ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ δ. ἐπεὶ δὲ τὸ αὐτὸ τμᾶμα ἑκατέρῳ τῶν τμαμάτων ἐφαρμόζει, δῆλον ὅτι ἴσα ἐντὶ τὰ τμάματα. διὰ ταῦτα δὲ καὶ αἱ ἐπιφάνειαι.



Τμάματος

κα

Τμάματος δοθέντος ὁποτερουοῦν τῶν κωνοειδέων, ἀποτεμνομένου ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἢ τῶν σφαιροειδέων ὁποτερουοῦν, μὴ μείζονος ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, ὁμοίως ἀποτεμνομένου, δυνατόν ἐστι τῷ τμάματι στερεὸν ἐγγράψαι, καὶ ἄλλο περιγράψαι ἐκ κυλίνδρων ἴσον ὕψος ἐχόντων τῶν συγκειμένων. ὥστε τὸ περιγραφόμενον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ἐλάσσονι ὑπερέχειν παντὸς τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. δεδόσθω τμᾶμα, οἷον ἐστὶ τὸ αβγ. τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος τμάματος, τομὰ ἔστω ἁ αβγ κώνου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτέμνοντος τὸ τμᾶμα ἁ αγ εὐθεῖα. ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμάματος καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς, ἁ βδ. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται τὸ ἀποτέμνον ἐπίπεδον ὀρθὸν εἶμεν ἐπὶ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ κύκλος ἐστί, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἁ γα. ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος ἔστω, ἄξονα ἔχων τὸν βδ. πεσεῖται δὲ ἁ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἐκτὸς τοῦ τμάματος. ἐπεὶ ἐστὶ δὲ ἤτοι κωνοειδές, ἢ σφαιροειδὲς μὴ μεῖζον τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, τοῦ δὴ κυλίνδρου τούτου ἀεὶ δίχα τεμνομένου ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἐσσεῖται ποτὲ τὸ καταλειπόμενον ἔλασσον τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. ἔστω δὲ τὸ καταλελειμμένον ἀπ᾽ αὐτοῦ κύλινδρος, ἔχων βάσιν τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὸν εδ, ἔλασσον τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. διαιρήσθω δὴ ἁ βδ εἰς τὰς ἴσας τᾷ εδ, κατὰ τὰ ρ ο π ξ καὶ ἀπὸ τᾶν διαιρεσίων ἄχθων εὐθεῖαι παρὰ τὰν αγ. ἔστε ποτὶ τὰν τοῦ κώνου τομάν. ἀπὸ δὲ τᾶν ἀχθεισᾶν ἐπίπεδα ἀνεστακέτω ὀρθὰ ποτὶ τὰν βδ. ἐσσοῦνται δὴ αἱ τομαὶ κύκλοι, τὰ κέντρα ἔχοντες ἐπὶ τᾶς βδ. ἐφ᾽ ἑκάστου δὴ τῶν κύκλων δύο κύλινδροι ἀναγεγράφθω, ἑκάτερος ἔχων ἄξονα ἴσον τῷ εδ, ὁ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τοῦ κυλίνδρου ἐφ᾽ ἅ ἐστι τὸ δ, ὁ δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἐφ᾽ ἅ ἐστι τὸ β. ἐσσεῖται δή τι ἐν τῷ τμάματι σχῆμα στερεὸν ἐγγεγραμμένον ἐκ τῶν κυλίνδρων συγκείμενον τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀναγραφέντων, ἐφ᾽ ἅ ἐστι τὸ δ. καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον, καὶ συγκείμενον ἐκ τε τῶν κυλίνδρων τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀναγραφέντων τῶν ἐφ᾽ ἃ τὸ β ἐστι. λοιπὸν δὲ δεῖξαι, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου ὑπερέχει ἐλάσσονι τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. ἕκαστος δὴ τῶν κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι ἴσος ἐστὶ τῷ κυλίνδρῳ τῷ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἀναγραφομένῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ β, ὡς ὁ μὲν θη τῷ θι, ὁ δὲ κλ τῷ κμ. καὶ οἱ ἄλλοι ὡσαύτως. καὶ πάντες δὲ οἱ κύλινδροι πᾶσιν ἴσοι εἰσίν. δῆλον οὖν ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ὑπερέχει τῷ κυλίνδρῳ, τῷ βάσιν ἔχοντι τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὰν εδ. οὗτος δέ ἐστιν ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος.

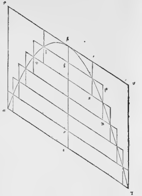


κβ

Τμάματος δοθέντος ὁποτερουοῦν τῶν κωνοειδέων ἀποτετμημένου ἐπιπέδῳ μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἢ τοῦ σφαιροειδέος ὁποτερουοῦν μὴ μείζονος ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, ὁμοίως ἀποτετμημένου, δυνατόν ἐστιν εἰς τὸ τμᾶμα στερεὸν ἐγγράψαι ἐκ κυλίνδρων τμαμάτων ὕψος ἴσον ἐχόντων τῶν συγκειμένων. ἔστω τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. δεδόσθω τμᾶμα οἷον εἴρηται. τμαθέντος δὲ τοῦ σχήματος ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ, ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμηκὸς τὸ δοθὲν τμᾶμα, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ αβγδ κώνου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμηκότος τὸ τμᾶμα ἁ γα εὐθεῖα. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμηκὸς τὸ τμᾶμα μὴ εἶμεν ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ αγ. ἁ δὲ φυ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἐπιψαυέτω δὲ κατὰ τὸ β, καὶ ἀπὸ τᾶς φυ ἀνεστακέτω ἐπίπεδον παράλληλον τῷ κατὰ τὰν αγ, ἐπιψαύσει δὴ τοῦ σχήματος κατὰ τὸ β. καὶ εἰ μέν ἐστι τὸ τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ἀπὸ τοῦ β ἄχθω παρὰ τὸν ἄξονα ἁ βδ. εἰ δὲ ἀμβλυγωνίου, ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδὲς εὐθεῖα ἀχθεῖσα ἐπὶ τὸ β ἐκβεβλήσθω, ἁ βδ. εἰ δὲ σφαιροειδέος ἐπὶ τὸ β ἀχθεῖσα εὐθεῖα ἀπὸ κέντρου ἐκβεβλήσθω ἁ βδ. δῆλον δὲ ὅτι τέμνει ἁ βδ δίχα τὰν αγ. ἔστιν οὖν τὸ μὲν β κορυφὰ τοῦ τμάματος, ἁ δὲ βδ

[illegible]

εὐθεῖα ἄξων. ἔστι δὴ καὶ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ. ἁ γραμμὰ ἁ ΒΔ ἄξων τοῦ κ-
τος ἀνεστακοῦσα ἐν ὀρθῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, διὰ τᾶς ἑ-
τέρας διαμέτρου ἐόντος τοῦ ἐπιπέδου. δυνατὸν οὖν ἐστι κύλινδρον εὑρεῖν ἄξονα ἔχοντα τὰν ΒΔ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ. πεσεῖται δὲ ἁ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἐκτὸς τοῦ τμάματος. ἐπεὶ ἐστιν ἤτοι κωνοειδέος ἢ σφαιροειδέος τμᾶμα, καὶ ὁ μείζων ἐστὶν ἡμίσεως τοῦ σφαιροειδέος. ἐσσεῖται δή τις κυλίνδρου τόμος, βάσιας μὲν ἔχων τὰς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομάς, τὰν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΒΔ. τοῦ μὲν τόμου δίχα τεμνομένου ἐπιπέδοις παραλλήλοις τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰν ΑΓ, ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον ἔλασσον τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. Ἔστω τόμος βάσιν μὲν ἔχων τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΕΔ, ἔλασσον τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. διῃρήσθω δὴ ἁ ΔΒ εἰς τὰς ἴσας τᾷ ΔΕ. καὶ ἀπὸ τῶν διαιρέσεων ἄχθων εὐθεῖαι παρὰ τὰν ΑΓ ἔστε ποτὶ τὰν τοῦ κώνου τομάν. ἀπὸ δὲ τᾶν ἀχθεισᾶν ἐπίπεδα ἀνεστακότων παράλληλα τῷ κατὰ τὰν ΑΓ ἐπιπέδῳ,

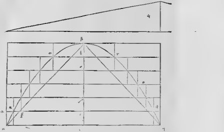


τεμοῦντι δὴ ταῦτα τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ τμάματος, καὶ ἐσσοῦνται ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ ὁμοῖαι τᾷ περὶ τὰν ΑΓ διάμετρον. ἐπεὶ παράλληλα ἐντὶ τὰ ἐπίπεδα. ἐφ' ἑκάστης δὴ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἀναγεγράφθωσαν κυλίνδρου τομοὶ δύο, ὁ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ τῷ Δ, ὁ δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Β, ἄξονα ἔχοντες ἴσον τᾷ ΔΕ. ἐσσοῦνται δή τινα σχήματα στερεὰ τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμάματι, τὸ δὲ περιγεγραμμένον ἐκ κυλίνδρου τομῶν ἴσον ὕψος ἐχόντων συγκείμενα. λοιπὸν δέ ἐστι δεῖξαι, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ἔλασσον ὑπερέχει τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. δειχθήσεται δὲ ὁμοίως τῷ πρότερον, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ὑπερέχει τῷ τόμῳ, τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομάν, τὰν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΕΔ. οὗτος δέ ἐστιν ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος.

κγ

Τούτων προγεγραμμένων ἀποδεικνύωμες τὰ προβεβλημένα τῶν σχημάτων. πᾶν τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος ἀποτετμημένον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα. ἔστω γὰρ τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ἀποτετμημένον ὀρθῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸν ἄξονα, καὶ τμαθέντος αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος, τᾶς μὲν ἐπιφανείας τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓ ὀρθογωνίου κώνου τομά. τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτέμνοντος τὸ τμᾶμα ἁ ΓΑ εὐθεῖα. ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμάματος ἁ ΒΔ. ἔστω δὲ καὶ κῶνος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. οὗ κορυφὰ τὸ Β. δεικτέον ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ κώνου τούτου. ἐκκείσθω γὰρ κῶνος ὁ Ψ, ἡμιόλιος ὢν τοῦ κώνου, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΒΔ. ἔστω δὲ καὶ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΒΔ. ἐσσεῖται οὖν ὁ Ψ κῶνος ἥμισυς ὅλου τοῦ κυλίνδρου. ἐπείπερ ἡμιόλιός ἐστιν ὁ Ψ κῶνος τοῦ αὐτοῦ κώνου. λέγω, ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος ἴσον ἐστὶ τῷ Ψ κώνῳ. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζόν ἐντι ἢ ἔλασσον. ἔστω δὴ πρότερον εἰ δυνατόν, μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ σχῆμα στερεὸν εἰς τὸ τμᾶμα, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων, ὕψος ἴσον ἐχόντων τῶν συγκειμένων, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ

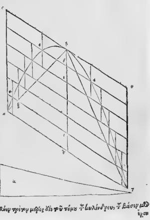
μα τοῦ ψ κώνου. καὶ ἔστω τῶν κυλίνδρων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν, ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν α γ, ἄξονα δὲ τὴν ε δ. ἐλάχιστος δὲ, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ς τ, ἄξονα δὲ τὰν β θ.



 τῶν δὲ κυλίνδρων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγραφὲν σχῆμα, μέγιστος μὲν ἔστω, ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, τὸν περὶ διάμετρον τὰν κ λ. ἄξονα δὲ τὰν δ ε. ἐλάχιστος δὲ ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ς τ, ἄξονα δὲ τὰν θ ι. ἐκβεβλήσθω δὲ τὰ ἐπίπεδα πάντων τῶν κυλίνδρων ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν β δ. ἐσσεῖται δὴ ὅλος κύλινδρος διαιρημένος εἰς κυλίνδρους, τῷ μὲν πλήθει ἴσους τοῖς κυλίνδροις τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τῷ δὲ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν. καὶ ἐπεὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα περὶ τὸ τμᾶμα, ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ κώνου, δῆλον ὅτι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ τμάματι μεῖζόν ἐστι τοῦ ψ κώνου. ὁ δὴ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἔχων ἄξονα τὰν δ ε, ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δ ε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἁ δ α ποτὶ τὰν κ ε δύναμει. οὗτος δέ ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει ἁ β δ ποτὶ τὰν β ε, καὶ τῷ ὃν ἔχει ἁ δ α ποτὶ τὰν ε ξ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ὁ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ε ζ ποτὶ τὸν δεύτερον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἁ π ε, τουτέστιν ἁ δ α ποτὶ τὰν ζ ε. καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων τὸν αὐτὸν, ἕξει τὸν αὐτὸν λόγον ὃν ἁ ἡμίσεια τᾶς διαμέτρου τᾶς βάσεως αὐτῶν ποτὶ τὰν ἀπολελαμμέναν ἀπ' αὐτᾶς μεταξὺ τῶν α β, β δ εὐθειᾶν. καὶ πάντες οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ κυλίνδρῳ, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξων δέ ἐστιν ἁ δ γ εὐθεῖα ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον, ὃν πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἳ ἐν ταῖς βάσεσι εἰσὶ τῶν εἰρημένων κυλίνδρων, ποτὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἀπολελαμμένας ἀπὸ τᾶς μεταξὺ τᾶν α β, β δ. αἱ δὲ εἰρημέναι εὐθεῖαι τῶν εἰρημένων χωρὶς τᾶν α δ μείζων ἐντὶ ἢ διπλάσιαι. ὥστε καὶ οἱ κύλινδροι πάντες οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, οὗ ὁ ἄξων ὁ δ ι μείζονές ἐντι, ἢ διπλάσιοι τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. πολλῷ ἄρα καὶ ὁ ὅλος κύλινδρος, οὗ ὁ ἄξων ἁ δ β, μείζων ἐντὶ ἢ διπλασίων τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. τοῦ δὲ ψ κώνου ἦν διπλασίων, ἔλασσον ἄρα τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ψ κώνου, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ μεῖζον. οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ κωνοειδὲς τοῦ ψ κώνου. ὁμοίως δὲ οὐδὲ ἔλασσον. πάλιν γὰρ ἐγγεγράφθω τὸ σχῆμα, καὶ περιγεγράφθω, ὥστε ὑπερέχειν ἕκαστον ἔλασσον. ἢ πάλιν κων ὑπερέχει ὁ ψ κῶνος τοῦ κωνοειδέος. καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμάματος, καὶ τὸ ἐγγραφὲν τοῦ περιγραφέντος ἐλάσσονι λείπεται, ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ ψ κώνου, δῆλον ὡς ἔλασσόν ἐστι τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ψ κώνου. πάλιν δὲ ὁ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δ ε, ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἔχοντα ἄξονα τᾷ ε δ, τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς α δ τετράγωνον ποτὶ τὸ αὐτό. ὁ δὲ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ε ζ, ποτὶ τὸν δεύτερον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ε ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ δ α ποτὶ τὰν κ ε δύναμει. οὗτος δέ ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει ἁ β δ ποτὶ τὰν β ε, καὶ τῷ ὃν ἔχει ὁ δ α ποτὶ τὰν ε ξ, καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος

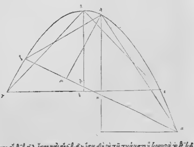
τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσον τᾷ δε, ποτὶ ἕκαστον τῶν κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, ἄξονα ἐχόντων τὸν αὐτὸν, ἕξει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ἡμίσεια τᾶς βάσεως αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἀπολελαμμέναν ἀπ' αὐτᾶς μεταξὺ ταῦ α β, β δ εὐθειᾶν. καὶ πάντες γοῦν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὧν ἄξων ἐστὶν ἁ β δ εὐθεῖα, ποτὶ πάντας τοὺς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον ὃν πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι ποτὶ πάσας τὰς εὐθείας. αἱ δὲ εὐθεῖαι πᾶσαι αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων οἱ βάσεις ἐντὶ τῶν κυλίνδρων πρὸς τὰν εὐθεῖαν πάσαν τὰν ἀπολελαμμέναν ἀπ' αὐτᾶν σὺν τᾷ α δ ἐλάσσονες ἐντὶ, ἢ διπλάσιαι. δῆλον οὖν ὅτι καὶ οἱ κύλινδροι πάντες οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ἐλάσσονές ἐντι ἢ διπλάσιοι τῶν κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν β δ, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλάσιον τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἐστὶ δὲ, ἀλλὰ μείζων ἢ διπλάσιος. τοῦ γὰρ ψ κώνου διπλάσιον ἐστί. τὸ δὲ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον ἐδείχθη τοῦ ψ κώνου. οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ ἔλασσον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ ψ κώνου. ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδὲ μεῖζον, ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

κδ Καὶ τοίνυν εἴκα μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα ἐπιπέδῳ ἀποτμαθῇ τὸ τμᾶμα ἀπὸ τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ὁμοίως ἡμιόλιον ἐσσεῖται τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἔστω τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος ἀποτετμημένον ὡς εἴρηται. καὶ τμαθέντος αὐτοῦ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτέμνον τὸ σχῆμα, τοῦ μὲν σχήματος ἔστω ἁ α β γ ὀρθογωνίου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμηκότος τὸ τμᾶμα ἁ α γ εὐθεῖα. παρὰ δὲ τὰν α γ ἁ φ υ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὸ β, καὶ ἁ β δ ἄχθω παρὰ τὸν ἄξονα. τέμνει δὴ αὕτα δίχα τὰν α γ. ἀπὸ δὲ τᾶς φ υ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω παράλληλον κατὰ τῷ τὰν α δ. ἐπιψαύει δὲ τοῦτο τὸ κωνοειδὲς κατὰ τὸ β. καὶ ἐσσεῖται τοῦ τμήματος κορυφὰ τὸ β σαμεῖον, ἄξων δὲ ἁ β δ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν α γ, οὐ ποτ' ὀρθάς ἐὸν τῷ ἄξονι τέτμηκε τὸ κωνοειδὲς, ἁ τομὰ ἐστὶν ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἁ α γ, ἔστω δὴ ὀξυγωνίου τομὰς περὶ διάμετρον τὰν γ α, καὶ γραμμᾶς τᾶς β δ, ἅ ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἀνεστακούσης ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ἀνεστακότι ἀπὸ διαμέτρου ποτὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐστὶν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατόν ἐστι κύλινδρον εὑρεῖν τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ' εὐθείας τᾷ β δ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. δυνατὸν δὲ ἐστὶ καὶ κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ β σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἐσσεῖται. τόμος κυλίνδρου τις, βάσιν ἔχων τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν, τὰν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν β δ. καὶ ἀπότμημα κώνου βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τόμῳ καὶ τῷ τμήματι, ἄξονα δὲ τὸν αὐτόν. δεικτέον ὅτι τὸ κωνοειδὲς τμᾶμα, ἡμιόλιον ἐστὶ τούτου τοῦ κώνου. ἔστω δὴ ὁ ψ κῶνος ἡμιόλιος τοῦ ἀποτμήματος τούτου. ἐσσεῖται δὴ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου, ὁ βάσιν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, διπλάσιος τοῦ ψ κώνου. οὗτος γὰρ ἡμιόλιος ἐστὶ τοῦ ἀποτμήματος τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τὸ δὲ ἀπότμημα τοῦ κώνου, τὸ εἰρημένον τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τόμου τοῦ κυλίνδρου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος



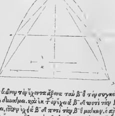
σιν τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἀναγκαῖον δέ ἐστι τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα ἴσον εἶμεν τῷ τοῦ κώνου. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω δὴ πρότερον εἰ δυνατὸν μεῖζον, ἐγγεγράφθω δή τι εἰς τὸ τμᾶμα στερεὸν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων τομῶν ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενα. ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἔλασσονι ἢ ᾧ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ τοῦ κώνου. καὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν τομῶν ἐκβεβλήσθω ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ τόμου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. πάλιν δὴ ὁ πρᾶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δε, ποτὶ τὸν πρᾶτον τόμον τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς αδ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κε. οἱ γὰρ τόμοι οἱ ἴσον ὕψος ἔχοντες τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ' ἀλλάλους ταῖς βάσεσιν. αἱ δὲ βάσεις αὐτῶν ἐπεὶ ὅμοιαι ἐντὶ ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ, τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ὃν αἱ ὁμόλογοι διάμετροι αὐταῖς δυνάμει. ἡμίσεαι δ' ἐντὶ τῶν ὁμολόγων διαμέτρων, αἱ αδ, κε. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ αδ ποτὶ τὰν κε δυνάμει, τοῦτον ἔχει ἁ βδ ποτὶ τὰν βε δυνάμει. ἐπεὶ ἁ μὲν βδ παρὰ τὰν διάμετρόν ἐστιν, αἱ δὲ αδ, κε παρὰ τὰν κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ βδ ποτὶ τὰν βε, τοῦτον ἔχει ἁ αδ ποτὶ τὰν εξ. ἕξει οὖν ὁ πρᾶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ποτὶ τὸν πρᾶτον τόμον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ αδ ποτὶ τὰν εξ, ὁ τῶν ἄλλων τομῶν ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ἄξονα ἴσον ἔχοντα τᾷ δε, πὸς ἕκαστον τῶν τομῶν τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἄξονα ἐχόντων, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν ἁ ἡμίσεα τᾶς διαμέτρου τῶν βάσεων αὐτῶν ποτὶ τὰν ἀπολελαμμέναν ἀπ' αὐτᾶς μεταξὺ τῶν αβ, βδ. δειχθήσεται οὖν ὁμοίως τοῖς πρότερον τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐὸν τοῦ τοῦ κώνου, ὁ δὲ τοῦ κυλίνδρου τόμος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, μείζων ἐὼν ἢ διπλάσιος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. ὥστε καὶ τοῦ τοῦ κώνου μείζων ἐσεῖται ἢ διπλάσιος. οὐκ ἔστι δὲ, ἀλλὰ διπλάσιος. οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ τοῦ κώνου. διὰ τῶν αὐτῶν δὲ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἔλασσον. ἐστὶ δῆλον οὖν ὅτι ἴσον. ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

Εἴκα ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα ἀποτμηθέωντι ἐπιπέδοις, τὸ μὲν ἑτέρῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ δὲ ἑτέρῳ μὴ ὀρθῷ. ἔωντι δὲ οἱ τῶν τμαμάτων ἄξονες ἴσοι, ἴσα ἐσσοῦνται τὰ τμάματα. ἀποτετμάσθω γὰρ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα, ὡς εἴρηται. τμαθέντος δὲ τοῦ κωνοειδέος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τοῦ μὲν κωνοειδέος ἔστω τομὰ ἁ βγ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ βδ. τῶν δὲ ἐπιπέδων αἱ αζ, εγ εὐθεῖαι, τοῦ μὲν ὀρθοῦ ποτὶ τὸν ἄξονα ἁ εγ, τοῦ δὲ μὴ ὀρθοῦ ἁ ζα. ἄξονες δὲ ἔστω τῶν τμαμάτων αἱ βθ, κλ ἴσαι ἀλλάλαις, κορυφαὶ δὲ τὰ β, λ. δεικτέον ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ τμᾶμα κωνοειδέος, οὗ κορυφὰ τὸ β, τῷ τμάματι τοῦ κωνοειδέος οὗ κορυφὰ τὸ λ. ἐπεὶ γὰρ ἀπὸ τᾶς αὐτᾶς ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς δύο τμάματα ἐντὶ ἀφῃρημένα, τὸ τε αλζ, καὶ τὸ εβγ. καὶ ἐντὶ αὐτῶν διάμετροι ἴσαι αἱ κλ, θβ, ἴσον ἐστὶ τὸ τρίγωνον τὸ αλκ τῷ εθβ. δέδεικται γὰρ ὅτι τὸ αλζ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ εβγ τριγώνῳ. ἄχθω δὴ ἁ αχ κάθετος ἐπὶ τὰν κλ ἐκβληθεῖσαν. καὶ ἐπεὶ ἴσαι αἱ βθ, κλ, ἴσαι καὶ αἱ εθ, αχ. ἔστω δὴ ἐν τῷ τμάματι οὗ κορυφὰ τὸ β, κῶνος.



νος ἐγγεγραμμένος ταὐ αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ὧν δὲ τῷ τμήματι ἁ κορυφὰ τὸ λ, ἀπότμημα κώνου τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἄχθω δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ λ κάθετος ἐπὶ τὰν δζ ἁ λμ, ἐσσεῖται δὴ αὕτα ὕψος τοῦ ἀποτμήματος τοῦ κώνου οὗ κορυφὰ τὸ λ. τὸ δὲ ἀπότμημα τοῦ κώνου, οὗ κορυφὰ τὸ λ, καὶ ὁ κῶνος οὗ κορυφὰ τὸ β τὸν συγκείμενον λόγον ἔχοντι ποτ' ἄλλαλα ἔκτε τοῦ τῶν βάσεων λόγου, καὶ ἐκ τοῦ τῶν ὕψεων. τὸν συγκείμενον οὖν ἔχοντι λόγον, ἔκτε τοῦ ὃν ἔχει τὸ περιεχόμενον χωρίον, ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, τᾶς περὶ διάμετρον τὰν αζ ποτὶ τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν εγ. καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἁ λμ ποτὶ τὰν βθ. τὸ δὲ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ τὸν αὐτὸν κύκλον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν διαμέτρων ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς εγ. ἔχει καὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου οὗ κορυφὰ τὸ λ, πρὸς τὸν κῶνον οὗ κορυφὰ τὸ β τὸν συγκείμενον λόγον ἔκτε τοῦ ὃν ἔχει ἁ πα ποτὶ τὰν εθ. καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ λμ, ποτὶ τὰν βθ. ἁ μὲν γὰρ κα ἡμίσεά ἐντι τᾶν διαμέτρων τᾶς βάσιος τᾶς τοῦ ἀποτμήματος τοῦ κώνου, οὗ κορυφὰ τὸ λ. ἁ δὲ εθ ἡμίσεα τᾶς διαμέτρου τᾶς βάσεως τοῦ κώνου. αἱ δὲ λμ, βθ ὕψεα ἐντὶ αὐτῶν. ἔχει δὲ ἁ λμ ποτὶ τὰν βθ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ ποτὶ τὰν κλ. ἐπεὶ ἁ βθ ἴσα ἐστὶ τᾷ κλ. ἔχει δὲ καὶ ἁ λμ ποτὶ τὰν κλ, ὃν ἁ χα ποτὶ τὰν ακ ἔχει, καὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου ποτὶ τὸν κῶνον τὸν συγκείμενον λόγον ἔκτε τοῦ ὃν ἔχει ἁ ακ ποτὶ τὰν αχ. ἴσα γάρ ἐστιν ἁ αχ τᾷ εθ. καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἁ λμ ποτὶ τὰν βθ. ὁ δὲ ἐκ τῶν εἰρημένων λόγος ὁ τοῦ ακ πρὸς αχ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ λκ πρὸς λμ. τὸ ἄρα ἀπότμημα πρὸς τὸν κῶνον λόγον ἔχει, ὃν ἁ λκ ποτὶ τὰν λμ. καὶ τῷ ὃν ἔχει ἁ λμ ποτὶ τὰν βθ. ἴσα δὲ ἁ βθ τᾷ κλ. δῆλον οὖν, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου οὗ κορυφὰ τὸ λ, τῷ κώνῳ οὗ κορυφὰ τὸ β. φανερὸν οὖν ὅτι καὶ τὰ τμάματα ἴσα ἐντὶ ἑτέρου αὐτῶν. ἐπεὶ τὸ μὲν ἡμιόλιον ἐστὶ τοῦ κώνου, τὸ δὲ ἕτερον ἡμιόλιον τοῦ ἀποτμήματος τοῦ κώνου ἴσων ἐόντων.

κε Εἴκα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα ἀποτμηθέντι ἐπιπέδοις ὁπωσοῦν ἀγμένοις, τὰ τμάματα ποτ' ἄλλαλα τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον τοῖς τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ τῶν ἀξόνων αὐτοῖς. ἀποτετμήσθω γὰρ τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα, ὡς ἔτυχεν. ἔστω δὲ τοῦ μὲν τοῦ ἑτέρου τμάματος ἄξονι ἴσα ἁ κ, τοῦ δὲ τοῦ ἑτέρου ἴσα ἁ λ. δεικτέον ὅτι τὰ τμάματα τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ' ἄλλαλα τοῖς ἀπὸ τῶν κ, λ τετραγώνοις. τμαθέντος δὴ τοῦ κωνοειδέος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ τμάματος, ἔστω τομὰ ἁ αβγ ὀρθογωνίου κώνου τομά. ἄξων δὲ ἁ βδ. καὶ ἀπολελάφθω ἁ βδ τᾷ κ ἴσα. καὶ διὰ τοῦ δ ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα. τὸ δὲ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὰν βδ, ἴσον ἐντὶ τῷ τμάματι τῷ ἄξονα ἔχοντι ἴσον τᾷ κ. εἰ μὲν οὖν καὶ ἁ κ ἴσα ἐστὶ τᾷ λ, φανερὸν ὅτι καὶ τὰ τμάματα ἴσα ἐσσοῦνται ἀλλάλοις ἑκάτερον γὰρ αὐτῶν καὶ τῷ αὐτῷ καὶ τὰ τετράγωνα, τὰ ἀπὸ τῶν κ, λ ἴσα, ὥστε τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον τὰ τμάματα τοῖς τετραγώνοις, τοῖς ἀπὸ τῶν ἀξόνων. εἰ δὲ μὴ ἴσα ἐστὶν ἁ λ τᾷ κ, ἔστω ἁ λ ἴσα τᾷ βθ. καὶ διὰ τοῦ θ ἐπίπεδον ἄχθω ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα. τὸ δὲ τμᾶμα τὸ βάσιν ἔχον τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν εζ, ἄξονα δὲ τὰν βθ, ἴσον ἐστὶ τῷ τμάματι τῷ ἔχοντι ἄξονα ἴσον τῷ λ. ἐγγεγράφθωσαν δύο κῶνοι βάσιν μὲν ἔχοντες τοὺς κύκλους τοὺς περὶ διαμέτρους τὰς αγ, εζ, κορυφὴν δὲ τὸ β σαμεῖον.

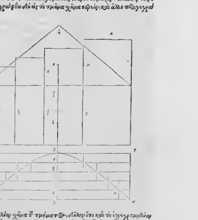


ὁ δὲ κῶνος ὁ ἔχων ἄξονα τὰν βδ, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν βθ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκτε τοῦ ὃν ἔχει ἁ αδ ποτὶ τὰν θε δυνάμει. καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἁ βδ ποτὶ τὰν βθ μάκει. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ δα ποτὶ τὰν θε δυνάμει, τοῦτον ἔχει ἁ βδ ποτὶ τὰν βθ μάκει. ὁ ἄρα κῶνος ὁ ἔχων ἄξονα τὰν βδ ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν βθ, τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκτε τοῦ ὃν ἔχει ἁ δβ ποτὶ τὰν θβ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἁ δβ ποτὶ τὰν βθ. οὗτος δὲ ἐστὶν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς δβ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θβ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ὁ κῶνος ἄξονα ἔχων τὰν βδ, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἄξονα ἔχοντα τὰν θβ, τοῦτον ἔχει

τὸν

τὸν λόγον τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος τὸ ἄξονα ἔχον τὰν δ β, ποτὶ τὸ τμᾶμα τὸ ἄξονα ἔχον τὰν θ β. ἑκατέρον γὰρ ἡμιόλιόν ἐστι. καὶ ἐστὶ τῷ μὲν τμήματι τῷ ἄξονα ἔχοντι τὰν β δ, ἴσον τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, τὸ ἄξονα ἔχον ἴσον τᾷ κ. τῷ δὲ τμήματι τῷ ἄξονα ἔχοντι τὰν θ β, ἴσον τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος τὸ ἄξονα ἔχον ἴσαν τᾷ λ. καὶ τᾷ μὲν β δ ἴσα ἁ κ, τᾷ δὲ θ β ἴσα ἁ λ. δῆλον ὦν, ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος τὸ ἄξονα ἔχον ἴσον τᾷ κ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ποτὶ τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, τὸ ἄξονα ἔχον ἴσον τᾷ λ, ὃν τὸ τετράγωνον ε, τὸ ἀπὸ τᾶς κ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς λ.

Πᾶν τμᾶμα ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἀποτετμημένον ἐπιπέδῳ καὶ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα ποτὶ τὸν κῶνον, τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ὕψος ἴσον, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα ἴσα τῷ τε ἄξονι τοῦ τμήματος, καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι, ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις, τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος, καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι. ἔστω τὸ τμᾶμα ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος, ἀποτετμημένον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα. καὶ τμαθέντος αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος, ἁ τομὰ ἔστω αὐτοῦ μὲν τοῦ κωνοειδέος ἁ α β γ ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτέμνοντος τὸ τμᾶμα εὐθεῖα ἁ α γ. ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμάματος ἁ β δ. ἁ δὲ ποτεοῦσα τῷ ἄξονι ἔστω ἁ β θ. καὶ τᾷ β θ ἴσα ἁ ζ θ, καὶ ἁ ζ η. δεικτέον ὅτι τὸ τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, λόγον ἔχει ὃν ἁ η δ ποτὶ τὰν δ. ἔστω δὲ κύλινδρος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ ἔστωσαν αἱ φ α, γ υ. ἔστω δὴ καὶ κῶνός τις ἐν ᾧ τὸ ψ. καὶ ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὰν β δ, τοῦτον ἐχέτω τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ η δ ποτὶ τὰν δ ζ. φαμὶ δὴ τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος ἴσον εἶμεν τῷ ψ κώνῳ, αἰ γε μὴ ἐστὶν ἴσον, ἤτοι μεῖζον ἢ ἔλασσον ἐστίν. ἔστω πρότερον εἰ δυνατόν, μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τμᾶμα σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥς τε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἔλασσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ ψ κώνου. διήχθω δὴ τὰ ἐπίπεδα πάντων τῶν κυλίνδρων ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ. ἄξονα δὲ τὰν β δ. ἐσσεῖται δὴ ὅλος ὁ κύλινδρος διῃρημένος εἰς κυλίνδρους, τῷ μὲν πλήθει ἴσους τοῖς κυλίνδροις τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τῷ δὲ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν. καὶ ἐπεὶ ἔλασσονι ὑπερέχει τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ



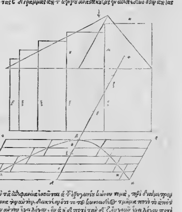
κώνου, καὶ μεῖζόν ἐστι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμήματος, δῆλον ὅτι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζόν ἐστι τοῦ ψ κώνου. ἔστω δὴ τρίτον μέρος τᾶς β δ, ἁ β ρ. ἐσσεῖται ὦν ἁ η δ τριπλασία τᾶς ζ ρ. ἐπεὶ ὁ μὲν κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν β δ, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ η δ ποτὶ τὰν θ ρ. ἔχει δὲ καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος ποτὶ τὸν ψ κῶνον ὃν ἁ ζ δ ποτὶ τὰν η δ. ἐξ ἴσου ἀμείβοιεν, ὁμοίως τῶν λόγων τεταγμένων τὸν αὐτὸν λόγον ὁ κύλινδρος ὁ εἰρημένος ποτὶ τὸν ψ κῶνον, ὃν ἁ ζ δ

ποτὶ

ποτὶ τὰν θρ. ἔστω δὲ αἱ γραμμαὶ κείμεναι ἐφ' αὐτᾶς ξ, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι τοῖς τμαμάτεσσι τοῖς
ἐν τᾷ βδ εὐθείᾳ, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ ζβ. καὶ παρ' ἑκάσταν αὐτᾶν παραπεπτωκέτω χωρί-
ον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ. καὶ τὸ μὲν μέγιστον ἔστω ἴσον τῷ ὑπὸ ζδ, β. τὸ δὲ ἐλάχιστον ἴσον
τῷ ὑπὸ ζο, β. αἱ δὲ πλευραὶ τῶν ὑπερβλημάτων τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχόντων. καὶ γὰρ αἱ ἴσαι αὐ-
ταῖς αἱ ἐπὶ τᾶς βδ εὐθείας, τῷ ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχοντι. καὶ ἔστω ἁ μὲν τοῦ μεγίστου ὑπερβλήμα-
τος πλευρὰ, ἐφ' ἇς τὸ μ, ἴσα τᾷ βδ. ἁ δὲ τοῦ ἐλαχίστου ἴσα τᾷ βο. ἔστω δὲ καὶ ἄλλα χωρία ἐν οἷς τὸ
ω, τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, τῷ ὑπὸ τᾶν ζδ, β. ὁ δὴ κύλιν-
δρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὰν δε, ποτὶ τὸν κύλιν-
δρον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν πλ, ἄξονα δὲ τὰν δε, τὸν αὐτὸν ἔχει
λόγον ὃν ἁ δα ποτὶ τὰν κε δυνάμει. οὗτος δ' ἐστὶν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζδ, β,
ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζε, βε. ἐν πάσᾳ γὰρ τᾷ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾷ τοῦτο συμβαίνει. ἁ
γὰρ διπλασία τᾶς ποτεούσας, τουτέστι τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου, πλαγία ἐστὶ τοῦ εἴδεος πλευρά. καὶ ἐστὶ τῷ μὲν
ὑπὸ τᾶν ζδ, βδ περιεχομένῳ ἴσον τὸ ξμ χωρίον, τῷ δὲ ὑπὸ τᾶν ζε, βε ἴσον ἐστὶ τὸ ξν. ἁ γὰρ ξ ἴσα
ἐστὶ τᾷ ζβ, ἁ δὲ ν τᾷ βε, ἁ δὲ μ τᾷ βδ. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν
περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὰν δε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν βάσιν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν
περὶ διάμετρον τὰν πλ, ἄξονα δὲ τὰν δε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ω χωρίον ποτὶ τὸ ξμ. ὁμοί-
ως δὲ δειχθήσεται καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἔχων τὰν ἴ-
σαν τᾷ δε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα τὸν αὐτὸν ἄξονα τοῦτον
ἔχων τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ω χωρίον ποτὶ τὸ ὁμόλογον τῶν περὶ τὰν νξ παραπεπτωκότων ὑπερβαλ-
λόντων τετραγώνῳ. ἐντὶ δή τινα μεγέθεα οἱ κύλινδροι, οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὧν ἕκαστος ἄξονα
ἔχει ἴσον τᾷ δε, καὶ ἄλλα μεγέθεα τὰ χωρία ἐν οἷς τὸ ω, ἴσα τούτοις τῷ πλήθει, κατὰ δύο μεγέθεα
τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον. ἐπεὶ οἵ τε κύλινδροι ἴσοι ἐντὶ ἀλλάλοις, καὶ τὰ ω χωρία ἴσα ἀλλάλοις.
λέγονται δὲ τῶν δὲ κυλίνδρων τινὲς ποτὶ ἄλλους κυλίνδρους ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. ὁ δ' ἔσχα-
τος οὐδὲ πρὸς ἓν λέγεται. καὶ τῶν χωρίων ἐν οἷς τὰ ω ποτὶ ἄλλα χωρία τὰ παρὰ τὰν ξ παραπεπτωκότα
ὑπερβάλλοντα εἴδει τετραγώνῳ, τὰ δὲ ὁμόλογα ἐν τοῖς λόγοις. τὸ δὲ ἔσχατον οὐδὲ πρὸς ἓν λέγεται. δῆλον
ὦν, ὅτι καὶ πάντες οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν ἐγγεγραμ-
μένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα χωρὶς τοῦ
μεγίστου. δεικτέον δὲ, ὅτι πάντα τὰ ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζω
λόγον ἔχοντι, ἢ ὃν ἁ νξ ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις, τᾷ τε ἡμίσειᾳ τᾶς ξ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς
ν. ὥστε καὶ ὅλος ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μείζονα ἔχει λόγον, ἢ ὃν ἁ ζδ ποτὶ
τὰν θρ, ὃν ὅλος κύλινδρος ἔχων ἐδείχθη ποτὶ τὸν ψ κῶνον. μείζονα οὖν ἔχει λόγον ὁ ὅλος κύλινδρος
ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν ψ κῶνον. ὥστε μείζων ἐστὶν ὁ ψ κῶνος τοῦ ἐγγεγραμμένου
σχήματος, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον τοῦ ψ κώνου. οὐκ ἄρα μεῖζον
τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τοῦ ψ κώνου. οὐδὲ μὴν ἔλασσον. ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν ἔλασσον. πάλιν οὖν
ἐγγεγράφθω εἰς τὸ τμῆμα στερεὸν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγ-
κείμενον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέ-
χει ὁ κῶνος τοῦ τμάματος, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἔλασσον ἐστὶ τὸ ἐγγε-
γραμμένον σχῆμα τοῦ τμάματος, καὶ ἐλάσσονι ὑπερέχει τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου,
ἢ ὁ ψ κῶνος τοῦ τμάματος, δῆλον ὅτι καὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ψ κώνου.
πάλιν δὲ ὅτι κύλινδρος ὁ πρῶτος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δε, ποτὶ τὸν πρῶ-
τον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δε, τὸν αὐτὸν ἔχει λό-
γον ὃν τὸ ω χωρίον ποτὶ τὸ ξν. ἴσον γὰρ ἑκάτερον. καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ
ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ δε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχή-
ματι κατ' αὐτὸν ἐόντα, καὶ ἄξονα ἔχοντα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον ὃν τὸ ω χωρίον ποτὶ τὸ
ὁμόλογον τῶν παρὰ τὰν ξ παραβλημάτων σὺν τῷ ὑπερβλήματι, διὰ τὸ ἕκαστον τῶν περιγεγραμ-
μένων χωρὶς τοῦ μεγίστου, ἴσον εἶν ἑκάστῳ τῶν ἐγγεγραμμένων σὺν τῷ μεγίστῳ. ἕξει οὖν καὶ ὁ ὅλος κύλιν-
δρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν πάντα τὰ ω χωρία ποτὶ τὰ παραβλή-
ματα σὺν τοῖς ὑπερβλήμασι. δέδεικται δὲ πάλιν πάντα τὰ ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ ἕτε-
ρα ἐλάσσω λόγον ἔχοντα τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξν ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις, τᾷ τε ἡμίσειᾳ τᾶς ξ καὶ
τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ν. ὥστε καὶ ὅλος ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἐλάσσονα
λόγον ἕξει, ἢ ἁ ζδ ποτὶ τὰν θρ. ἀλλ' ὡς ἁ ζδ ποτὶ τὰν θρ, ὁ ὅλος κύλινδρος ποτὶ τὸν ψ
κῶνον.

λάσσονα τὸν λόγον ἔχει ὁ αὐτὸς κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸ ψ. ὥστε μεῖζον δεῖ τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ψ κώνου, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ ἔλασσον ἐὸν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ψ κώνου. οὐκ ἄρα ἔλασσον δεῖ τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τοῦ ψ κώνου. ἐπεὶ δὲ οὔτε ἔλασσον δεῖ, δέδεικται ὃν τὸ προτεθέν.

Καὶ τοίνυν εἴκα μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ ἀποτμηθῇ τὸ τμῆμα τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος, ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα, τῷ τε ἄξονι τοῦ τμήματος, καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι, ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τῷ τε ἄξονι καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι. ἔστω γὰρ τμῆμα ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἀποτετμημένον ἐπιπέδῳ ὡς εἴρηται, τμηθέντος δὲ ἐπιπέδῳ τοῦ σχήματος ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτεμὸν τὸ τμῆμα, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ Β Γ ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμηκότος τὸ τμῆμα, ἁ Γ Α εὐθεῖα. κορυφὰ δὲ ἔστω τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, τὸ Θ. ἄχθω διὰ τοῦ Β παρὰ τὰν Α Γ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἁ Φ Υ. ἐπιψαυέτω δὲ κατὰ τὸ Β. ἁ δὲ ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω, τέμνει δὴ τὰν Α Γ δίχα. καὶ ἐσσεῖται κορυφὰ μὲν τοῦ τμήματος τὸ Β σαμεῖον, ἄξων δὲ ἁ Β Δ. ἁ δὲ ποτεοῦσα τῷ ἄξονι ἁ Β Θ. τᾷ δὲ Β Θ ἴσα ἔστω ἁ Θ Ζ, καὶ ἁ Ζ Η. διὰ δὲ τᾶς Φ Υ, ἐπίπεδον ἀνεστακέτω τι παράλληλον τῷ κατὰ τὰν Α Γ. ἐπιψαυσεῖ δὴ τοῦ κωνοειδέος κατὰ τὸ Β. καὶ ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν Α Γ οὐκ ἐὸν ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα τέτμηκε τὸ κωνοειδές, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἁ Γ Α. εὐθείας δὴ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς περὶ διάμετρον τὰν Α Γ, καὶ τᾶς Β Δ γραμμᾶς ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστακούσας ἐν ἐπιπέδῳ ὃ δεῖ ἀπὸ τᾶς διαμέτρου ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. δυνατὸν δὴ κύλινδρον εὑρεῖν, τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ' εὐθείας τᾷ Β Δ, ἐν οὗ τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, περὶ διάμετρον τὰν Α Γ. εὑρεθέντος δὲ ἐσσεῖται τις κυλίνδρου τόμος, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἁ δὲ ἑτέρα βάσις αὐτοῦ ἐσσεῖται τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τῶν Φ Υ. πάλιν δὲ καὶ κῶνον εὑρεῖν δυνατόν ἐστι, κορυφὰν



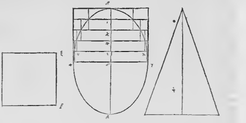
ἔχοντα τὸ Β σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, περὶ διάμετρον τὰν Α Γ. εὑρεθέντος οὖν, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, δεικτέον ὅτι τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τὸ εἰρημένον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ Η Δ ποτὶ τὰν Δ Ζ. ὃν γὰρ αὖ ἔχει λόγον ποτὶ τοῦτον ἔχει ὁ ψ κῶνος ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου. εἰ οὖν μὴ δεῖ ἴσον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τῷ ψ. εἰ γὰρ μὴ δυνατόν, δεῖ μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα σχῆμα, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων τομέων ἴσον ὕψος ἐχόντων συγκείμενα. ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τοῦ ψ κώνου. ἐπεὶ οὖν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐὸν τοῦ τμήματος, ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ἢ τὸ τμῆμα τοῦ ψ κώνου, δῆλον ὅτι μεῖζον δεῖ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ψ

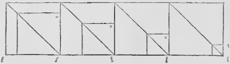
τοῦ τοῦ κώνου. διήχθω δὴ τὰ ἐπίπεδα τῶν τόμων τῶν ἐγγεγραμμένων ἐν τῷ σχήματι πάντα ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ τόμου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. καὶ ἁ τε β ε τρίτον μέρος ἔστω τᾶς β δ. καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευάσθω. πάλιν δὴ ὁ πρῶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δ ε, ποτὶ τὸν πρῶτον τόμον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δ ε, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς α δ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ ε. οἱ γὰρ τόμοι οἱ ἴσον ὕψος ἔχοντες, τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ' ἀλλήλους, ὅνπερ αἱ βάσεις αὐτῶν. ἐπεὶ ὅμοιαι ἐντὶ ὀξυγωνίου κώνου τομαί, τὸν αὐτὸν οὖν λόγον ἔχοντι ποτ' ἀλλήλους, ὃν αἱ ὁμόλογοι διάμετροι αὐτᾶν δυνάμει. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς α δ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ ε, τοῦτον ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν ζ δ β περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε β. ἐπεί ἐστιν ἁ μὲν ζ δ ἀγμένα διὰ τοῦ θ, καθ' ἃς ἔγγιστα συμπίπτοντι. αἱ δὲ α δ, κ ε παρὰ τὰν κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσαν, ἔστι δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τᾶν ζ δ β περιεχόμενον ἴσον τῷ ω χωρίῳ, τὸ δὲ ὑπὸ τᾶν ζ ε β τῷ ξ μ. ἔχει οὖν ὁ πρῶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δ ε ποτὶ τὸν πρῶτον τόμον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δ ε τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ω χωρίον ποτὶ τὸ ξ μ. καὶ τῶν ἄλλων δὲ τόμων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ δ ε ποτὶ τὸν τόμον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι κατ' αὐτὸν ἐόντα, καὶ ἄξονα ἔχοντα ἴσαν τᾷ δ ε, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ὃν τὸ ω χωρίον ποτὶ τὸ ὁμόλογον τῶν παρὰ τὰν ξ παραπεπτωκότων ὑπερβαλλόντων εἴδει τετραγώνῳ. πάλιν οὖν ἐντί τινα μεγέθεα οἱ ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ, καὶ ἄλλα μεγέθεα τὰ χωρία ἐν οἷς τὸ ω ἴσα τῷ πλήθει τοῖς τόμοις, καὶ κατὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι αὐτοῖς. λέγονται δὲ οἱ τόμοι, ποτ' ἄλλως τόμως τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. ὁ δὲ ἔσχατος τόμος οὐδὲ ποθὲν λέγεται. τὰ δὲ ω χωρία ποτ' ἄλλα χωρία παρὰ τὰν ξ παραπεπτωκότα τὰ ὑπερβάλλοντα εἴδεσι τετραγώνοις, τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς λόγοις. τὸ δὲ ἔσχατον οὐδὲ ποθὲν λέγεται. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ πάντες οἱ τόμοι ποτὶ πάντας τοὺς αὐτοὺς ἕξουντι λόγον, ὃν πάντα τὰ ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα, χωρὶς τοῦ μεγίστου. πάντα δὲ τὰ ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα, χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζονα λόγον ἔχοντι, ἢ ὃν ἁ γ ξ ν ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις, τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς ξ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ν. μείζονα οὖν λόγον ἔχει ὅλος ὁ τόμος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξ ν ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις, τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς ξ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ν. ὥστε καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ζ δ ποτὶ τὰν θ ε. μείζονα οὖν ἔχει λόγον ὁ ὅλος τόμος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν τοῦ κῶνον, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ μεῖζον ἐὸν τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τοῦ κώνου. οὐκ ἔστιν οὖν μεῖζον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τοῦ τοῦ κώνου. εἰ δὲ ἔλασσον ἐστὶ τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τοῦ τοῦ κώνου, ἐγγραφέντος εἰς τὸ τμῆμα σχήματος στερεοῦ, καὶ ἄλλου περιγραφέντος ἐκ κυλίνδρων τομῶν ἴσον ὕψος ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ τοῦ κῶνος τοῦ τμάματος. πάλιν ὁμοίως δειχθήσεται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον ἐὸν τοῦ τοῦ κώνου, καὶ ὁ τοῦ κυλίνδρου τόμος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι ποτὶ τὸν τοῦ κῶνον ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἔστιν οὖν οὐδὲ ἔλασσον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τοῦ τοῦ κώνου. δῆλον οὖν τὸ προτεθέν.

κθ Παντὸς σχήματος σφαιροειδέος, ἐπιπέδῳ τμηθέντος διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἡμίσειον τοῦ σφαιροειδέος διπλάσιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἔστω σφαιροειδὲς σχῆμα ἐπιπέδῳ τετμημένον διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τμηθέντος δὲ αὐτοῦ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ, τοῦ μὲν διὰ τοῦ ἄξονος, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ α β γ δ ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς, καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδέος ἁ β δ, κέντρον δὲ τὸ θ. διοίσει δέ, οὐδὲν εἴτε ἁ μείζων ἐστὶ διάμετρος ἁ β δ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, εἴτε ἐλάσσων. τοῦ δὲ τετμηκότος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα τομὰ ἔστω ἁ γ α εὐθεῖα. ἐσσεῖται δὴ αὐτὰ διὰ τοῦ θ, καὶ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ποτὶ τὰν β δ ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον ὑπόκειται διὰ τοῦ κέντρου τετάχθαι, καὶ ὀρθὸν εἶμεν ποτὶ τὸν ἄξονα, δεικτέον ὅτι τὸ ἡμίσειον τοῦ σφαιροειδέος τμῆμα, τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, κορυφὰν δὲ τὸ β σαμεῖον, διπλάσιον ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἔστω γὰρ κῶνος τις ἐν ᾧ τὸ τοῦ διπλάσιον τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν τὰν τῷ τμήματι. καὶ ἄξονα τὸν αὐτὰν τὰν θ β. φαμὶ δὲ τὸ ἡμίσειον τοῦ σφαιροειδέος ἴσον εἶμεν τῷ τοῦ κώνῳ. εἰ οὖν μή ἐστιν ἴσον τὸ ἡμίσειον τοῦ σφαιροειδέος τῷ τοῦ κώνῳ, ἔστω πρῶτον εἰ δυνατὸν μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τμῆμα τὸ ἡμίσειον τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω, ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον. ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἁλίκῳ

ὑπερ-

ὑπερέχει τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ κώνου. ἐπεὶ οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, ἔλασσον ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ἢ τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ κώνου. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἐν τῷ τμάματι τοῦ ἡμίσεως τοῦ σφαιροειδέος μεῖζόν ἐστι τοῦ κώνου. ἔστω δὴ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ





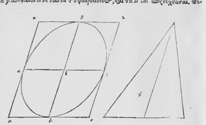
τὰν β θ. ἐπεὶ οὖν ὅτι ὁ κύλινδρος τριπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ὁ δὲ τοῦ κῶνος διπλάσιός ἐστι τοῦ αὐτοῦ κώνου, δῆλον ὡς ὁ κύλινδρος ἡμιόλιός ἐστι τοῦ κώνου. ἐκβεβλήσθω δὴ τὰ ἐπίπεδα τῶν κυλίνδρων πάντων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα. ἐσσεῖται ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἐσσεῖται δὴ ὁ ὅλος κύλινδρος διῃρημένος εἰς κυλίνδρους, τῷ μὲν πλήθει ἴσους τοῖς κυλίνδροις τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τῷ δὲ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν. ἔστω δὴ ὧν γραμμαὶ κείμεναι, ἐφ' αἷς τὰ ξ, τῷ πλήθει ἴσαι τοῖς τμάμασι τᾶς β θ εὐθείας, τῷ δὲ μεγέθει ἴσα ἑκάστα τᾷ β θ, καὶ ἀπὸ ἑκάστας τετράγωνον ἀναγεγράφθω. ἀφαιρήσθω δὴ ἀπὸ μὲν τοῦ ἐσχάτου τετραγώνου γνώμων, πλάτος ἔχων ἴσαν τᾷ β ι. ἐσσεῖται δὲ οὗτος ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν β ι, ι δ. ἀπὸ δὲ τοῦ παρ' αὐτὸ τετραγώνου γνώμων ἀφαιρήσθω, πλάτος ἔχων διπλάσιον τᾶς β ι. ἐσσεῖται δὴ οὗτος ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν β χ, χ δ. καὶ ἀεὶ ἀπὸ τοῦ ἑχομένου τετραγώνου γνώμων ἀφαιρήσθω πλάτος μὲν ἴσον τμάματι, μεῖζον τῷ πλάτει τοῦ πρώτου αὐτοῦ ἀφαιρημένου γνώμονος. ἐσσεῖται δὴ ἕκαστος αὐτῶν ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν τᾶς β δ τμημάτων, ὧν τὸ ἕτερον τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῷ πλάτει τοῦ γνώμονος. ἐσσεῖται δὴ καὶ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου τὸ λοιπὸν τετράγωνον, τὰν πλευρὰν ἔχον ἴσαν τᾷ θ ε. ὁ δὲ κύλινδρος ὁ πρῶτος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν θ ε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν πρῶτον τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν θ ε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς α θ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς κ ε. ὥστε καὶ ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν β θ, θ δ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ περιεχόμενον. ἕξει οὖν ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν αὐτὸν λόγον ὃν τὸ πρῶτον τετράγωνον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετραγώνου ἀφαιρημένον. ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος, ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ θ ε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν

τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, καὶ ἔχοντα ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ὃν τὸ τετράγωνον, ὁμοίως τεταγμένον αὐτῷ ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπὸ τοῦ ἑπομένου αὐτῷ τετραγώνου ἀφαιρημένον. ἐντὶ δή τινα μεγέθεα οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ κυλίνδρῳ, καὶ ἄλλα τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν ξ ξ ἴσα τῷ πλήθει τοῖς κυλίνδροις, καὶ κατὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα. λέγονται δὲ οἱ κύλινδροι ποτ᾽ ἄλλα μεγέθεα τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. ὁ δὲ ἔσχατος οὐδὲ ποθὲν λέγεται. καὶ τὰ τετράγωνα ποτ᾽ ἄλλα μεγέθεα τοὺς ἀπὸ τῶν τετραγώνων ἀφαιρημένους ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις. τὸ δὲ ἔσχατον τετράγωνον οὐδὲ ποθὲν λέγεται. πάντες οὖν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ποτὶ πάντας τοὺς ἑτέρους κυλίνδρους, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ τετράγωνα ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας τοὺς ἀφαιρημένους ἀπ᾽ αὐτῶν. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν πάντα τὰ τετράγωνα ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας τοὺς ἀφαιρημένους ἀπ᾽ αὐτῶν. τὰ δὲ τετράγωνα πάντων τῶν γνωμόνων τῶν ἀφαιρημένων ἀπ᾽ αὐτῶν μείζονα ἐντὶ ἢ ἡμιόλια. ἐντὶ γάρ τινες γραμμαὶ κείμεναι αἱ ξ ξ, ξ σ, ξ τ, ξ υ, ξ φ, τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, καὶ ἁ ἐλαχίστα ἴσα τᾷ ὑπεροχᾷ. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαί, ἐφ᾽ ἃν τὰ δύο ξ ξ, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ. τὰ νῦν τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν ἃ ἐστιν ἕκαστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ, πάντων μὲν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν ἴσων ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, ἐλάσσονα ἐντὶ ἢ τριπλάσια. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας, μείζονα ἢ τριπλάσιον. τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς περὶ τᾶν ἑλίκων ἐκδεδομένοις δέδεικται. ἐπεὶ δὲ πάντα τὰ τετράγωνα ἐλάσσονα ἐντί, ἢ τριπλάσια τῶν ἑτέρων τετραγώνων, ἃ ἐντὶ ἀφαιρημένα ἀπ᾽ αὐτῶν, δῆλον ὅτι τῶν λοιπῶν μείζονα ἐντὶ ἢ ἡμιόλια. τῶν οὖν γνωμόνων μείζονα ἢ ἡμιόλια, ὥστε καὶ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, μείζων ἐστὶν ἢ ἡμιόλιος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ὅπερ ἀδύνατον. τοῦ γὰρ κώνου ἡμιόλιός ἐστι. τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐδείχθη τοῦ κώνου. οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ κώνου. ἀλλὰ μὴ ἔστω ἔλασσον. ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν ἔλασσον. πάλιν δὴ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγεγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ὑπερέχει ὁ κῶνος τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ ἐγγραφὲν σχῆμα τοῦ τμάματος, δῆλον ὅτι καὶ τὸ περιγραφὲν σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ κώνου. πάλιν δὴ ὁ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν θ ε, ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν θ ε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν τὸ πρῶτον τετράγωνον ποτ᾽ αὐτό. ὁ δὲ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ε π, ποτὶ τὸν δεύτερον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ε π, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ β τετράγωνον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ᾽ αὐτοῦ ἀφαιρημένον, καὶ τῶν ἄλλων δὲ κυλίνδρων ἕκαστος, τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ θ ε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι κατ᾽ αὐτὸν ἐόντα, τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει λόγον, ὁμοίως τεταγμένου αὐτῷ τοῦ τετραγώνου ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ᾽ αὐτοῦ ἀφαιρημένον. καὶ πάντες οὖν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ τετράγωνα ποτὶ τὸ ἴσον τῷ πρώτῳ τετραγώνῳ, καὶ τοῖς γνώμοσι τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τετραγώνων ἀφαιρημένοις. καὶ τὰ τετράγωνα πάντα ἐλάσσονα ἐντί, ἢ ἡμιόλια τοῦ ἴσου τῷ τε πρώτῳ τετραγώνῳ, καὶ τοῖς γνώμοσι τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν ἀφαιρημένοις, διότι τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου μείζονα ἐντὶ ἢ τριπλάσια. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ἐλάσσων ἢ ἡμιόλιός ἐστι τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος, ὅπερ ἀδύνατον. τοῦ γὰρ κώνου ἡμιόλιός ἐστι. τὸ δὲ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον ἐδείχθη τοῦ κώνου. οὐκ ἄρα ἐστὶν ἔλασσον τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ κώνου. ἐπεὶ οὔτε μεῖζόν ἐστιν, οὔτε ἔλασσον, ἴσον ἄρα ἐστί.

κ Καὶ τοίνυν εἴκα τὸ σφαιροειδὲς μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου τμαθῇ, ὁμοίως τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος, διπλάσιον ἐσσεῖται τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. τετμάσθω γὰρ σχῆμα σφαιροειδὲς τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ α β γ δ ὀξυγωνίου κώνου τομά, κέντρον δὲ αὐτᾶς τὸ θ, τοῦ δὲ τετμακότος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα ἔστω ἁ α γ εὐθεῖα. ἐσσεῖται δὴ αὐτὰ διὰ τοῦ θ ἀγμένα, ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον ὑπόκειται διὰ τοῦ κέντρου ἄχθαι. ἐσσεῖται οὖν τις ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ

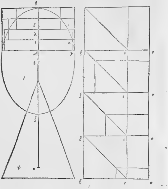
ἀποτέμνον

ἀποτεμνομένῳ ὑπὸ ἐπιπέδου ποτ' ὀρθὰς ἐόντος τῷ ἄξονι ἀγμένου. ἄχθω δὴ τινὲς αἱ κλ, μν παρὰ τὰν αγ ἐπιψαύουσαι τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὰ β, δ. ἀπὸ δὲ τᾶν κλ, μν ἐπίπεδα ἀνεστακέτω παράλληλα τῷ κατὰ τὰν αγ. ἐπιψαύοντι δὲ ταῦτα τοῦ σφαιροειδέος, κατὰ τὰ β, δ ἐπιζευχθεῖσαι. ἐσσεῖται δὲ διὰ τῶν β, καὶ ἐσσοῦνται τῶν τμαμάτων κορυφαὶ μὲν τὰ β, δ σαμεῖα, ἄξονες δὲ αἱ βθ, θδ. δυνατὸν δέ ἐστιν εὑρεῖν κύλινδρον, ἄξονα ἔχοντα τὰν βθ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, ἇς περὶ διάμετρον τὰν αγ. εὑρεθεὶς δὲ ἐσσεῖται τις κυλίνδρου τόμος, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ ἡμίσει τοῦ σφαιροειδέος, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. πάλιν δὴ καὶ κῶνον εὑρεῖν δυνατόν ἐστι, κορυφὰν ἔχοντα τὸ β σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, ἁ περὶ διάμετρον τὰν αγ. εὑρεθεὶς δὲ ἐσσεῖται τὸ ἀπότμαμα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. λέγω δή, ὅτι τὸ σφαιροειδέος ἥμισυ διπλάσιόν ἐστι τοῦ κώνου τούτου. ἔστω δὴ ὁ ψ κῶνος διπλάσιος τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου. εἰ οὖν μή ἐστιν ἴσον τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδέος τῷ ψ κώνῳ, ἔστω πρῶτον εἰ δυνατὸν μεῖζον. ἐγγεγράφθω δή τι εἰς τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων τόμων, ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ᾧ ὑπερέχει τὸ ἅμισυ τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ ἡμίσει τοῦ σφαιροειδέος, μεῖζον ἐὸν τοῦ ψ κώνου. καὶ ὁ τόμος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦ μὲν ψ κώνου καὶ ὁ τόμος ἐών, τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐν ἡμίσει τοῦ σφαιροειδέος μείζων ἢ ἡμιόλιος, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἔσται οὖν τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδέος μεῖζον τοῦ ψ κώνου. ἐγγεγράφθω κυλίνδρων τόμων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει ὁ ψ κῶνος τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος. πάλιν οὖν ὁμοίως τοῖς πρότερον δειχθήσεται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον ἐὸν τοῦ ψ κώνου, καὶ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου, ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦ μὲν ψ κώνου ἡμιόλιος ἐών, τοῦ δὲ περιγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσων ἢ ἡμιόλιος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἐσσεῖται οὖν οὐδὲ ἔλασσον τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. ἐπεὶ δὲ οὔτε μεῖζόν ἐστιν, οὐδὲ ἔλασσον, ἴσον ἐστί. φανερὸν οὖν ἐστιν ὃ ἔδει δεῖξαι.



Παντὸς σχήματος σφαιροειδέος ἐπιπέδῳ τμαθέντος μὴ διὰ τοῦ κέντρου, ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἔλασσον τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν συναμφότερα τὰ ἡμίσεα τοῦ ἄξονος τοῦ σφαιροειδέος, καὶ ὁ ἄξων τοῦ μείζονος τμάματος, ποτὶ τὸν ἄξονα τοῦ μείζονος τμάματος. ἔστω γάρ τι τμᾶμα σφαιροειδέος σχήματος, ἀποτετμαμένον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, μὴ διὰ τοῦ κέντρου. τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ αβγ ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ τᾶς τομᾶς, καὶ ἄξων σφαιροειδέος ἔστω ἁ βζ, κέντρον δὲ τὸ θ. τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτέμνοντος τὸ τμᾶμα, τομὰ ἔστω ἁ αγ εὐθεῖα. ποιήσει δὲ αὐτὰ ὀρθὰς γωνίας ποτὶ τὰν βζ, ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι ποτὶ τὸν ἄξονα ὑπόκειται. ἔστω δὲ τὸ τμᾶμα τὸ ἀποτετμαμένον, οὗ κορυφὰ τὸ β σαμεῖον, ἔλασσον ἢ ἅμισυ τοῦ σφαιροειδέος σχήματος, καὶ τᾷ βθ ἴσα ἔστω ἁ ζη. δεικτέον ὅτι τὸ τμᾶμα οὗ κορυφὰ τὸ β σαμεῖον, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ δη ποτὶ τὰν δζ. ἔστω δὲ κύλινδρος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ ἐλάσσονι τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἔστω δὲ καὶ κῶνος, ἐν ᾧ τὸ ψ, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτάν, τοῦτον ἔχων τὸν λόγον ὃν ἔχει ἁ

δη ποτὶ τὰν δζ φαμὶ δὴ τὸ ψ κῶνον ἴσον εἶμεν τῷ τμάματι τῷ κορυφὰν ἔχοντι τὸ Β σαμεῖον, εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσος, ἔστω πρῶτον εἰ δυνατὸν ἐλάσσων. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τμᾶμα σχῆμα στερεὸν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ τοῦ σφαιροειδέος τμᾶμα τοῦ ψ κώνου. ἐπεὶ οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμάματος, ἔλασσον ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ κώνου. δῆλον ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ψ κώνου. ἔστω δὴ τρίτον μέρος τᾶς βδ ἁ βρ. ἐπεὶ οὖν ἁ μὲν βη διπλασία ἐστὶν τᾶς βθ, καὶ ἁ βδ τᾶς βρ τριπλασία ἔσται καὶ ἁ δη τᾶς θρ. ἔχει δὴ ὁ μὲν κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν βδ, πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν,



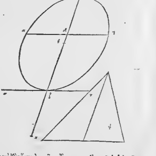
καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ὅνπερ ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ δη ποτὶ τὰν θρ. ὁ δὲ κῶνος ὁ εἰρημένος ποτὶ τὸ ψ κῶνον, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἁ δζ ποτὶ τὰν δη. ἐξ ἴσου ἀνομοίως τῶν λόγων τεταγμένων ὁ κύλινδρος, ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ποτὶ τὸν ψ κῶνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ δζ ποτὶ τὰν θρ. ἔστω δὴ γραμμαὶ κείμεναι ἐφ' αὐτᾶς ξν, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι τοῖς τμαμάτεσσι τοῖς ἐν τᾷ βδ, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ ζδ. ἔστω δὲ καὶ τᾶν ξο ἑκάστα ἴσα τᾷ βδ. τᾶν οὖν νο ἑκάστα διπλασία ἐσεῖται τᾶς θδ. παραπεπτωκέτω δὴ παρ' ἑκάσταν αὐτᾶν χωρίον τι, πλάτος ἔχον ἴσον τᾷ βδ. ὥστε εἰ μὲν ἕκαστον τῶν ἐχόντων τὰς διαμέτρους τετράγωνον, ἀφαιρήσθω δὴ ἀπὸ μὲν τοῦ πρώτου γνώμων πλάτος ἔχων ἴσον τᾷ βε. ἀπὸ δὲ τοῦ δευτέρου, πλάτος ἔχων ἴσον τᾷ βχ. καὶ ἀφ' ἑκάστου τὸν αὐτὸν τρόπον εἰς ἀπὸ τοῦ ἑπομένου χωρίου γνώμων ἀφαιρήσθω, πλάτος ἔχων ἐν τμήματι ἔλασσον τοῦ πλάτεος τοῦ πρὸ αὐτοῦ γνώμονος ἀφαιρημένου, ἐσεῖται δὴ ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ πρώτου χωρίου γνώμων ἀφαιρημένος, ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν βε, εζ, καὶ τὸ λοιπὸν χωρίον παραπεπτωκὸς παρὰ τὰν νο, ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, τὰν τοῦ ὑπερβλήματος πλευρὰν ἔχων ἴσαν τᾷ δε. ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ δευτέρου χωρίου γνώμων ἀφαιρημένος, ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ζχ, χβ. καὶ τὸ λοιπὸν χωρίον παρὰ τὰν νο παραπεπτωκὸς, ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ. καὶ τὰ λοιπὰ ὁμοίως τούτοις. ἐξοῦντι δὲ ὧδε. τὰ ἐπίπεδα πάντων τῶν κυλίνδρων, ἐξ ὧν σύγκειται τό, τε ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ τμάματι ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ἐσεῖται δὴ ὁ ὅλος κύλινδρος διῃρημένος εἰς κυλίνδρους τῷ μὲν πλήθει ἴσους, τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τῷ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν, ὁ δὴ πρῶτος ὁ κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δε, ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς δγ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κε. οὗτος δέ ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν βδ, δζ περιεχόμενον, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν βε, εζ. ἔχει οὖν ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸν κύλινδρον, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ πρῶτον χωρίον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρημένον. ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ἕκαστος ἄξονα ἔχων τὰν ἴσαν τᾷ δε, ποτὶ τὸν κατ' αὐτὸν κύλινδρον

κυλίνδρου τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, ἄξονα ἔχοντα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὁμοίως τεταγμένον αὐτῷ χωρίον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ᾽ αὐτοῦ ἀφαιρημένον. ἐντὶ δὴ μεγέθεα τινὰ οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, καὶ ἄλλα μεγέθεα χωρία παρὰ τὰν ξν παραπεπτωκότα, πλάτος ἔχοντα τὰν ἴσαν τᾷ β δ, τῷ δὲ πλήθει ἴσα τοῖς κυλίνδροις, καὶ κατὰ δύο τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον. λέγονται δὲ οἵ τε κύλινδροι ποτ᾽ ἄλλους κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. ὁ δὲ ἔσχατος οὐδὲ ποθὲν λέγεται. καὶ τὰ χωρία ποτ᾽ ἄλλα χωρία τοὺς ἀπ᾽ αὐτῶν ἀφαιρημένους, τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις. τὸ δὲ ἔσχατον χωρίον οὐδὲ ποθὲν λέγεται. δῆλον οὖν ὅτι καὶ πάντες οἱ κύλινδροι ποτὶ πάντας τοὺς ἑτέρους τὸν αὐτὸν ἕξοντι λόγον, ὃν πάντα τὰ χωρία ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμήματι, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν πάντα τὰ χωρία ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας. καὶ ἐπεί ἐντί τινες γραμμαὶ ἴσαι κείμεναι ἐφ᾽ αὐτᾷ ν ο, καὶ παρὰ ἑκάσταν παραπέπτωκέ τι χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, αἱ δὲ πλευραὶ τῶν ὑπερβλημάτων ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχοντι, καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα ἐστὶ τᾷ ἐλαχίστᾳ, καὶ ἄλλα ἐντὶ χωρία παρὰ τὰν ξν παραπεπτωκότα, πλάτος ἔχοντα ἴσας τᾷ β δ, τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, δῆλον ὡς σύμπαντα τὰ χωρία ὧν ἐστιν ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, ποτὶ πάντα τὰ ἕτερα χωρία ἐλάσσω λόγον ἔχοντι, τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξν ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέρᾳ τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς ν ο, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ξ ο. φανερὸν οὖν ὅτι τὰ αὐτὰ χωρία ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας μείζονα λόγον ἕξουσι τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξν ποτὶ τὰν ἴσαν, συναμφοτέραις τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς ν ο, καὶ δυοῖς τριταμορίοις τᾶς ξ ο. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμήματι, μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἁ ξν ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις, τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς ν ο, καὶ δυοῖς τριταμορίοις τᾶς ξ ο. ἐστὶ δὲ τᾷ μὲν ξν ἴσα ἁ δ ζ. τᾷ δὲ ἡμισέᾳ τᾶς ν ο, ἁ δ ε. τᾷ δὲ τρίτᾳ δύο μόρια τᾶς ξ ο, ἁ δ ρ. ὅλος ἄρα ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμήματι, μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ἔχει ἁ δ ζ ποτὶ τὰν θ ρ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ δ ζ ποτὶ τὰν θ ρ, τοῦτον ἐδείχθη ἔχων ὁ αὐτὸς κύλινδρος ποτὶ τὸν ψ κῶνον. μείζονα οὖν ἕξει λόγον ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν ψ κῶνον, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ μεῖζον ἐὸν τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ψ κώνου. οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ τοῦ σφαιροειδέος τμῆμα τοῦ ψ κώνου. ἀλλ᾽ ἔστω εἰ δυνατὸν ἔλασσον. πάλιν δὴ ἐγγεγράφθω τι εἰς τὸ τμῆμα σχῆμα στερεὸν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον. ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ μεῖζόν ἐστιν ὁ ψ κῶνος τοῦ τμήματος. καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμήματος, καὶ ἐλάσσονι ὑπερέχει τὸ περιγραφὲν, ἢ ὁ ψ κῶνος τοῦ τμήματος, δῆλον ὅτι καὶ τὸ περιγραφὲν σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ ψ κώνου. πάλιν δὴ ὁ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δ ε, ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἔσχατον χωρίον τῶν παρὰ τὰν ξν παραπεπτωκότων, πλάτος ἐχόντων ἴσον τᾷ β δ, ποτ᾽ αὐτό. ἑκάτερα γάρ ἴσα ἐστίν. ὁ δὲ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἔχων ἴσαν τᾷ δ ε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν κατ᾽ αὐτὸν ἐόντα τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ πρῶτον χωρίον τῶν παρὰ τὰν ξν πεπτωκότων, πλάτος ἐχόντων ἴσαν τᾷ β δ, ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀφαιρημένον ἀπ᾽ αὐτοῦ. καὶ τῶν ἄλλων δὲ κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ δ ε, ποτὶ τὸν κατ᾽ αὐτὸν κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὁμόλογον χωρίον αὐτῷ τῶν παρὰ τὰν ξν παραπεπτωκότων, ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ᾽ αὐτοῦ ἀφαιρημένον πλὴν τοῦ λεγομένου τοῦ ἐσχάτου. καὶ πάντες οὖν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον, ὃν πάντα τὰ χωρία τὰ παρὰ τὰν ξν παραπεπτωκότα, ποτὶ τὸ ἴσον τῷ τε ἐσχάτῳ κειμένῳ χωρίῳ, καὶ τοῖς γνωμόνεσσι τοῖς ἀφαιρημένοις ἀπὸ τῶν ἄλλων, διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. ἐπεὶ οὖν δέδεικται, ὅτι τὰ χωρία πάντα τὰ παρὰ τὰν ξ ο παραπεπτωκότα ὑπερβάλλοντα εἴδει τετραγώνῳ, χωρὶς τοῦ μεγίστου, μείζονα λόγον ἔχοντι τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξν ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς ν ο, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ξ ο. δῆλον ὅτι τὰ αὐτὰ χωρία ποτὶ τὰ λοιπά, ἅ ἐντὶ ἴσα τῷ ἐσχάτῳ χωρίῳ κειμένῳ, καὶ τοῖς γνωμόνεσσι τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν ἀφαιρημένοις, ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξν ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις ταῖς τε ἡμισέαις τᾶς ν ο, καὶ δυσὶ τριταμορίοις τᾶς ξ ο. δῆλον οὖν ὅτι καὶ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμ-

 μένον,

μένον, ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἁ ζ δ ποτὶ τὰν θ ρ, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ δ ζ ποτὶ τὰν θ ρ, τοῦτον ἔχει ὁ εἰρημένος κύλινδρος ποτὶ τὸν ψ κῶνον, ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ὁ αὐτὸς κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν ψ κῶνον, ὅπερ ἀδύνατον, ἐδείχθη γὰρ ἔλασσον ἐὸν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ψ κώνου. οὐκ ἄρα ἐστὶν ἔλασσον τοῦ κώνου. ἐπεὶ δὲ οὔτε μεῖζον, οὔτε ἔλασσον, ἴσον ἄρα ἐστίν.

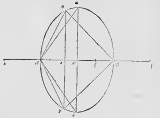
κβ Καὶ κἂν ἐπίπεδον μὴ ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα τμαθῇ τὸ σφαιροειδὲς, μὴ δὲ διὰ τοῦ κέντρου, τὸ ἔλασσον αὐτοῦ τμῆμα ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τὸ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἑξεῖ τὸν λόγον, ὃν αἱ συναμφότεραι, τᾶς τε ἡμισείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν γενομένων τμαμάτων, καὶ τῷ ἄξονι τοῦ μείζονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τοῦ μείζονος τμάματος. τετμάσθω γάρ τι σχῆμα σφαιροειδὲς, ὡς εἴρηται. καὶ τμαθέντος αὐτοῦ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ α β γ δ ὀξυγωνίου κώνου τομά. τοῦ δὲ τέμνοντος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα ἁ γ α εὐθεῖα. καὶ παρὰ τὰν α γ ἄχθω αἱ π ρ, σ τ ἐπιψαύουσαι τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὰ β, ζ. καὶ ἀνεστακέτω ἀπ' αὐτᾶν ἐπίπεδον παράλληλον τῷ κατὰ τὰν α γ. ἐπιψαυσοῦντι δὴ ταῦτα τοῦ σφαιροειδέος κατὰ τὰ β, ζ. καὶ ἐσσοῦνται κορυφαὶ τῶν τμαμάτων ἐπιζευχθεῖσαι. καὶ ἔστω ἁ β ζ, πεσεῖται δὲ αὕτα διὰ τοῦ κέντρου. καὶ ἔστω κέντρον τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, τὸ θ. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται μὴ ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα τετμᾶσθαι τῷ ἐπιπέδῳ τὸ σχῆμα, ἁ τομὰ ἐστὶν ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, ἃς διάμετρος αὐτᾶς ἁ γ α. λελάφθω οὖν ὅτι κύλινδρος ἄξονα ἔχων ἐπ' εὐθείας τᾷ β δ.



οὗ γὰρ τᾶ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, ἁ περὶ διάμετρον τὰν α γ, καὶ ὁ κῶνος ὁ κορυφὰν ἔχων τὸ β σαμεῖον, οὗ γὰρ τᾶ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, ἁ περὶ διάμετρον τὰν α γ. ἐσσεῖται δὴ τόμος τις κυλίνδρου τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, καὶ ἀπότμημα κώνου τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. δεικτέον ὅτι τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος, οὗ κορυφὰ τὸ β ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἑξεῖ τὸν λόγον, ὃν ἁ δ κ ποτὶ τὰν δ ζ, ἴσα δὲ ἔστω ἁ ζ κ τᾷ θ ζ. λελάφθω δή τις κῶνος, ἐν ᾧ τὸ ψ ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ δ κ ποτὶ τὰν δ ζ. εἰ οὖν μή ἐστιν ἴσον τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος τῷ ψ κώνῳ, ἔστω πρῶτον εἰ δυνατὸν μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεὸν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων τόμων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. ὁμοίως δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐὸν τοῦ ψ κώνου, καὶ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μείζονα λόγον ἔχων ἢ ποτὶ τὸν ψ κῶνον, ὅ ἐστιν ἀδύνατον. οὐκ ἐσσεῖται οὖν τὸ τοῦ σφαιροειδέος τμῆμα τοῦ ψ κώνου μεῖζον. ἀλλ' ἔστω εἰ δυνατὸν ἔλασσον. ἐγγεγράφθω δὴ πάλιν εἰς τὸ τμῆμα σχῆμα στερεὸν, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον ἐκ κυλίνδρου τόμων ὕψος ἐχόντων συγκείμενα. ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ ψ κῶνος τοῦ τμάματος. πάλιν δὲ διὰ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται τὸ περιγεγραμμένον ἔλασσον τοῦ ψ κώνου. καὶ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἐλάσσονα λόγον ἔχων, ἢ ποτὶ

ἁ ποτὶ τὸν τοῦ κώνου, ὃ δεῖ ἀδύνατον. οὐκ ἔσσεῖται οὖν οὐδὲ ἔλασσον τὸ τμῆμα τοῦ κώνου. φανερὸν οὖν ὡς δεῖ δεῖξαι.

Παντὸς σχήματος σφαιροειδέος ἐπιπέδῳ τμηθέντος ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, μὴ διὰ τοῦ κέντρου, τὸ μεῖζον τμῆμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ἴσα συναμφοτέραις τᾷ τε ἡμισέᾳ τοῦ ἄξονος τοῦ σφαιροειδέος καὶ τῷ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος ἄξονι, ποτὶ τὸν τοῦ ἐλάσσονος τμάματος ἄξονα. τετμάσθω τι σφαιροειδὲς ὡς εἴρηται, τμηθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν τμήματος τομὰ ἔστω ἁ α β γ ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς καὶ ἄξων τοῦ σχήματος ἁ β δ. τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου ἁ γ α εὐθεῖα. ἐσσεῖται δὴ αὐτὰ ποτ' ὀρθὰς τᾷ β δ. ἔστω δὲ μεῖζον τῶν τμαμάτων οὗ κορυφὰ τὸ β. καὶ κέντρον τοῦ σφαιροειδέος τὸ θ. ποτικείσθω δὴ ἁ δ η τᾷ δ θ ἴσα, καὶ α β ζ τᾷ αὐτᾷ ἴσα. δεικτέον ὅτι τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος, οὗ κορυφὰ τὸ β, ποτὶ τὸν κῶνον, τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ε η ποτὶ τὰν ε δ. τετμάσθω δὴ τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, καὶ ἀπὸ γενομένου κύκλου κῶνος ἔστω κορυφὰν ἔχων τὸ δ σαμεῖον. ἔστι δὴ τὸ μὲν ὅλον σφαιροειδὲς διπλάσιον τοῦ τμήματος τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν κ λ, κορυφὰν δὲ τὸ δ σαμεῖον. τὸ δὲ εἰρημένον τμῆμα διπλάσιον τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. δέδεικται γὰρ τοῦτο. τὸ ὅλον οὖν σφαιροειδὲς τετραπλάσιον ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ εἰρημένου. ὁ δὴ κῶνος οὗτος ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, κορυφὰν δὲ τὸ δ σαμεῖον, τὸν συγκείμενον ἔχει

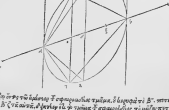


λόγον ἐκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἁ θ δ ποτὶ τὰν ε δ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς κ θ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ε α. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς κ θ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ε α, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ β θ, θ δ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ. ὃν δὴ λόγον ἔχει ἁ θ δ ποτὶ τὰν ε δ, τοῦτον ἐχέτω ἁ ξ δ ποτὶ τὰν θ δ. ἕξει οὖν καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ξ δ, β θ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β θ, θ δ, ὃν ἁ δ θ ποτὶ τὰν δ ε. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ξ δ, θ β, ποτὶ τὸ ὑπὸ β θ δ. καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν β θ, θ δ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὃν ἔχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ξ δ, β θ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ. ἔχει οὖν ὁ μὲν κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν κ λ, κορυφὰν δὲ τὸ δ σαμεῖον, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, κορυφὰν δὲ τὸ δ σαμεῖον, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ξ δ, β θ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ. ὁ δὲ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, κορυφὰν δὲ τὸ δ σαμεῖον, ποτὶ τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος, τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν αὐτῷ, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ, ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ζ ε, ε δ. τουτέστιν ἁ β ε ποτὶ ε ζ. τὸ γὰρ ἔλασσον ἢ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, δέδεικται τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα, τᾷ τε ἡμισέᾳ τοῦ ἄξονος τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ μείζονος τμήματος, ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ μείζονος τμήματος. οὗτος δέ ἐστιν ὃν ἔχει ἁ ζ ε ποτὶ τὰν β ε. ὁ ἄρα κῶνος ὁ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος, ποτὶ τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ἡμίσυ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ξ δ, β θ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, δ ε. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸν κῶνον, τὸν ἐν τῷ ἡμίσυ τοῦ σφαιροειδέος τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζ η, ξ δ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β θ, ξ δ. τετραπλάσιον γὰρ ἑκάτερον. ὁ δὲ κῶνος ὁ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος πο

τὶ

τὶ τὸ τμῆμα τὸ ἔλασσον, ἢ τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος, ὥστε ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταῦ ξ δ, β θ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν ζ ε, ε δ, ἔχει καὶ τὸ ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸ τμῆμα τὸ ἔλασσον αὐτοῦ, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταῦ ζ η, ξ δ, ποτὶ τὸ ὑπὸ ταῦ ζ ε δ. ὥστε καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸ ἔλασσον τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἁ ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταῦ ζ η, ξ δ, τοῦ ὑπὸ ταῦ ζ ε, ε δ πρὸς τὸ ὑπὸ ταῦ ζ ε δ. ὑπερέχει δὲ τὸ ὑπὸ ταῦ ζ η, ξ δ, τοῦ ὑπὸ ταῦ ζ ε, ε δ, τῷ τε ὑπὸ ταῦ ξ δ, ε η περιεχομένῳ, καὶ τῷ ὑπὸ ταῦ ζ ε, ξ ε. ἔχει ἄρα τὸ μεῖζον τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος πρὸς τὸ ἔλαττον, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἴσον ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ ταῦ ξ δ, ε η, καὶ τῷ ὑπὸ ταῦ ζ ε, ξ ε, ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταῦ ζ ε, ε δ, τὸ δὲ ἔλασσον τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸν κῶνον, τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν αὐτῷ, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ὥσπερ ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ α ζ ε ποτὶ τὰν β ε. ὁ δὲ κῶνος ὁ ἐν τῷ ἐλάσσονι τμήματι ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἐν τῷ μείζονι τμήματι, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταῦ β ε, ε δ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς β ε τετράγωνον. τὸν γὰρ τῶν ὑψέων λόγον ἔχοντι οἱ κῶνοι, ἐπεὶ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτάν, ἔχουσι καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένον ὥσπερ τὸν λόγον, ὃν τὸ ἴσον ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ ταῦ ξ δ, ε η, καὶ τῷ ὑπὸ ταῦ ζ ε, ξ ε, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς β ε. ὁ τοῦτο δὲ αὐτός ἐστι τῷ ὃν ἔχει ἁ ε η ποτὶ τὰν ε δ. τὸ γὰρ ὑπὸ ταῦ ξ δ, ε η, ποτὶ τὸ ὑπὸ ταῦ ξ δ, ε δ, ὥσπερ ἔχει λόγον, ὃν ἁ ε η ποτὶ τὰν ε δ. καὶ τὸ ὑπὸ ταῦ ζ ε, ξ ε περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ ταῦ ζ ε, θ ε, ὥσπερ ἔχει τὸν λόγον (ε δ) ὃν ἁ ε η ποτὶ τὰν ε δ. ἁ γὰρ ξ ε ποτὶ τὰν θ ε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ε η ποτὶ τὰν ε δ, διὰ τὸ ἀνάλογον εἶμεν τᾶς ξ δ, θ δ, δ ε. καὶ τὰν θ δ ἴσαν τε εἶμεν τᾷ η δ. καὶ τὸ ἴσον οὖν ἀμφοτέροις τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ ταῦ ξ δ, ε η, καὶ τῷ ὑπὸ ταῦ ζ ε, ξ ε, ποτὶ τὸ ἴσον συναμφοτέροις, τῷ τε ὑπὸ ταῦ ξ δ, ε δ, καὶ τῷ ὑπὸ ταῦ ζ ε, θ ε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ε η ποτὶ τὰν ε δ. τὸ δὲ ἀπὸ τᾶς ε β τετράγωνον, ἴσον ἐστὶν ἀμφοτέροις, τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ ταῦ ξ δ, ε δ. καὶ τὸ ὑπὸ ταῦ ζ ε, θ ε. τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ τᾶς β θ τετράγωνον, ἴσον τῷ ὑπὸ ταῦ ξ δ, ε δ περιεχομένῳ. ᾇ δ' ὑπεροχᾷ ἁ μείζων ἐστὶ τὸ ἀπὸ τᾶς β ε τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τᾶς β θ, ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ ταῦ ζ ε, θ ε. ἐπεὶ ἴσαι ἁ β θ, β ζ. δῆλον οὖν ὅτι τὸ μεῖζον τοῦ σφαιροειδέος τμῆμα, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ὥσπερ ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ε η ποτὶ τὰν ε δ.

λδ Καὶ τοίνυν εἴκα μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ τμηθῇ τὸ σφαιροειδές, μὴ δὲ διὰ τοῦ κέντρου τὸ μεῖζον τμῆμα αὐτοῦ ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ὥσπερ ἕξει τὸν λόγον, ὃν αἱ συναμφότεραι, ἴσαι τᾷ ἡμισέᾳ τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν γινομένων τμαμάτων, καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, τετμήσθω τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ ὡς εἴρηται. τμηθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ α β γ δ, ὀξυγωνίου κώνου τομά. τοῦ δὲ τέμνοντος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα ἁ γ α εὐθεῖα. παρὰ δὲ τὰν α γ ἄχθωσαν αἱ π ξ, ς τ ἐπιψαύουσαι τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὰ β, δ. καὶ ἀνεστακέτω ἀπ' αὐτᾶν ἐπίπεδα παράλληλα τῷ κατὰ τὰν α γ. ἐπιψαύοντι δὲ ταῦτα τοῦ σφαιροειδέος κατὰ τὰ β, δ, καὶ ἐσοῦνται κορυφαὶ τῶν τμημάτων τὰ β, δ. ἄχθω οὖν ἁ τᾶς κορυφᾶς ἐπιζευγνύουσα τῶν γινομένων τμαμάτων ἁ β δ. πεσεῖται δὴ αὐτὰ διὰ τοῦ κέντρου,



καὶ ἔστω κέντρον τὸ θ μεῖζον ὄντος τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος τμήματος, οὗ κορυφὰ τὸ β. ποτικείσθω δὴ ἁ δ κ ἴσα τᾷ δ θ, καὶ ἁ β ζ τᾷ αὐτᾷ. δεικτέον ὅτι τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος, τὸ μεῖζον ποτὶ τὸ ἀπότμημα

πότμημα τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ἴσον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ εκ ποτὶ τὰν εδ. τετμάσθω γὰρ τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου παρὰ ἄλλα τῷ κατὰ τὰν αγ ἐπιπέδῳ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος ἀπότμημα κώνου, κορυφὰν ἔχον τὸ δ σαμεῖον. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ δθ ποτὶ τὰν εδ, τοῦτον ἐχέτω ἁ ξδ ποτὶ τὰν θδ. ὁμοίως δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται, ὅτι τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος ἐγγεγραμμένου, ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἐλάσσονι ἐγγεγραμμένου, τὸν αὐτὸν ἔχον λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ξδ, βθ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν βε, εδ. καὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἐλάσσονι τμήματι ἐγγεγραμμένου, ποτὶ τὸ τμᾶμα τὸ ἐν ᾧ ἐγγέγραπται, τὸν αὐτὸν ἔχον λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν βε, εδ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζε, εδ. ἕξει οὖν τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος ἐγγεγραμμένου, ποτὶ τὸ ἔλασσον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ ξδ, βθ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζε, εδ. ἕξει οὖν τὸ μὲν ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος ἐγγεγραμμένου τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζη, ξδ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν βθ, ξδ. τετραπλάσιον γὰρ ἑκάτερον ἑκατέρου. τὸ δὲ ἀπότμημα τοῦ κώνου τὸ εἰρημένον ποτὶ τὸ ἔλασσον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ξδ, βθ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζε, εδ. ἕξει οὖν τὸ ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸ ἔλασσον τμᾶμα αὐτοῦ τοῦ σφαιροειδέος τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζη, ξδ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζε, εδ. αὐτὸ δὲ τὸ μεῖζον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἔλασσον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ὑπεροχὰ ᾇ ὑπερέχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζη, ξδ, τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τᾶν ζε, εδ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζε, εδ. τὸ δὲ ἔλασσον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ζε, εδ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν βε, εδ. δέδεικται γὰρ ἴσον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἁ ζε ποτὶ τὰν βε. τὸ δὲ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἐλάσσονι τμήματι ἐγγεγραμμένου, ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐγγεγραμμένου τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν βε, εδ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς βε τετράγωνον. τὰ γὰρ ἀποτμήματα τῶν κώνων τὰ εἰρημένα τούτων ὑψέων λόγον ἔχοντι (τὰν αὐτὰν) τὰ δὲ ὕψεα αὐτῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι τὸν τᾶς δε πρὸς τὰν εβ. ἕξει καὶ τὸ μεῖζον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ηζ, ξδ, τοῦ ὑπὸ τᾶν ζε, εδ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς βε τετράγωνον. ὁ δὲ λόγος οὗτος, ὁμοίως τῷ πρότερον δειχθείη, ὁ αὐτὸς ἐὼν τῷ ὃν ἔχει ἁ εκ ποτὶ τὰν εδ.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΕΛΙΚΩΝ.

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΔΩΣΙΘΕΩ ΧΑΙΡΕΙΝ.

Τῶν ποτὶ Κόνωνα ἀποσταλέντων θεωρημάτων, ὑπὲρ ὧν αἰεὶ τὰς ἀποδείξιας ἐπιστέλλεις μοι γράψαι, τῶν μὲν πλείστων ἐν τοῖς ὑπὸ Ἡρακλείδα κομισθεῖσιν ἔχεις γεγραμμένας, τινὰς δὲ αὐτῶν καὶ ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ γράψας, ἐπιστέλλω τοι. μὴ θαυμάσῃς δέ, εἰ πλείονα χρόνον ποιήσαντες ἐκδίδομεν τὰς ἀποδείξιας αὐτῶν. συμβαίνει γὰρ τοῦτο γεγενῆσθαι, διὰ τὸ βούλεσθαί με πρότερον διδόμεν τοῖς περὶ τὰ μαθήματα πραγματευομένοις, καὶ ματεύειν αὐτὰ προαιρουμένοις. ποῖα γὰρ τῶν ἐν γεωμετρίᾳ θεωρημάτων οὐκ εὐμέθοδα ἐν ἀρχᾷ φανέντα χρόνῳ τὴν ἐξεργασίαν λαμβάνοντι, Κόνων μὲν οὐχ ἱκανὸν λαβὼν εἰς τὰν μάτευσιν αὐτῶν χρόνον μετάλλαξεν τὸν βίον, καὶ ἄδηλα ἐποίησεν. καὶ ταῦτα πάντα εὑρών, καὶ ἄλλα πολλὰ ἐξευρών, καὶ ἐπὶ τὸ πλεῖον προάγαγε γεωμετρίαν. ἐπιστάμεθα γὰρ ὑπάρξασαν αὐτῷ σύνεσιν οὐ τὰν τυχοῦσαν περὶ τὸ μάθημα, καὶ φιλοπονίαν ὑπερβάλλουσαν, μετὰ δὲ τὰν Κόνωνος τελευτὰν πολλῶν ἐτέων ἤδη γεγενημένων, οὐδ' ὑφ' ἑνὸς οὐδὲν τῶν προβλημάτων αἰσθανόμεθα κεκινημένον. βούλομαι δὲ καθ' ἓν ἕκαστον αὐτῶν προενεγκέσθαι. καὶ γὰρ συμβαίνει δύο τινὰ τῶν ἐν αὐτῷ μὲν κεχωρισμένων, τέλους δὲ ποτεσσομένων, ὅπως οἱ φάμενοι μὲν πάντα εὑρίσκειν, ἀπόδειξιν δὲ αὐτῶν οὐδὲ μίαν ἐκφέροντες ἐλέγχωνται, ἀπὸ δ' ὁμολογηκότες εὑρίσκειν τὰ ἀδύνατα. ταῦτα δὴ ποῖα τῶν προβλημάτων ἐντί, καὶ τίνων τὰς ἀποδείξιας ἔχεις ἀπεσταλμένας, καὶ ποίων ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ κομίζοντες δοκιμάζοντες ἐμφανίσαι τοι. πρῶτον δὴ τῶν προβλημάτων ἦν, σφαίρας δοθείσης ἐπίπεδον χωρίον εὑρεῖν ἴσον τᾷ ἐπιφανείᾳ τᾶς σφαίρας, ὃ δὴ καὶ πρῶτον ἐγένετο φανερόν, ἐκδοθέντος τοῦ περὶ τὰν

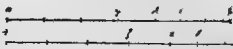
σφαίραν βιβλίῳ. δειχθέντος γὰρ ὅτι πάσας σφαίρας ἁ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τᾷ σφαίρᾳ, δῆλον ὡς δυνατόν ἐστι χωρίον ἐπίπεδον εὑρεῖν ἴσον τᾷ ἐπιφανείᾳ τᾶς σφαίρας. δεύτερον δὲ, κώνου δοθέντος ἢ κυλίνδρου, σφαῖραν εὑρεῖν ἴσαν τῷ κώνῳ ἢ τῷ κυλίνδρῳ. τρίτον δὲ, τὰν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα αὐτᾶς ποτ' ἄλλαλα τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν. τέταρτον δὲ, τὰν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα τᾶς ἐπιφανείας τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν ποτ' ἄλλαλα. πέμπτον δὲ, τὸ δοθὲν τμᾶμα σφαίρας, τῷ δοθέντι τμάματι σφαίρας ὁμοιῶσαι. ἕκτον δὲ, δύο δοθέντων τμαμάτων σφαίρας, εἴτε τᾶς αὐτᾶς, εἴτε ἄλλας εὑρεῖν τι τμᾶμα σφαίρας, ὃ ἐσσεῖται αὐτὸ μὲν ὅμοιον τῷ ἑτέρῳ τῶν τμαμάτων, τὰν δὲ ἐπιφάνειαν ἴσαν ἕξει τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἑτέρου τμάματος. ἕβδομον, ἀπὸ τᾶς δοθείσας σφαίρας τμᾶμα ἀποτεμεῖν ἐπιπέδῳ, ὥστε τὸ τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ὕψος ἴσον, τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν μὴ μείζονα τοῦ ὃν ἔχει τὰ τρία ποτὶ τὰ β. τούτων μὲν τῶν εἰρημένων πάντων τὰς ἀποδείξιας, Ἡρακλείδας ἐκόμισεν. τὸ δὲ μετὰ ταῦτα κεχωρισμένον ψεῦδός κα ἐστὶ, δὲ, εἴκα σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμαθῇ εἰς ἄνισα, τὸ μεῖζον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἔλασσον διπλασίονα λόγον ἕξει, ἢ ἁ μείζων ἐπιφάνεια ποτὶ τὰν ἐλάσσονα. ὅτι δὲ τοῦτο ψεῦδός ἐστι, διὰ τῶν πρόσθεν ἀπεσταλμένων φανερόν ἐστι. κεχώρισται γὰρ ἐν αὐτοῖς τόδε. εἴκα σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμαθῇ εἰς ἄνισα πρὸς ὀρθὰς διαμέτρῳ τινὶ τῶν ἐν τᾷ σφαίρᾳ, τὸ μεῖζον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἔλασσον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν τὸ τμᾶμα τὸ μεῖζον τᾶς διαμέτρου ποτὶ τὸ ἔλασσον. τὸ γὰρ μεῖζον τμᾶμα τᾶς σφαίρας ποτὶ τὸ ἔλασσον, ἐλάσσονα μὲν ἢ διπλάσιον λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἁ μείζων ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐλάσσονα. μείζονα δὲ, ἢ ἡμιόλιον. ἦν δὲ καὶ τὸ ἔσχατον κεχωρισμένον τῶν προβλημάτων ψεῦδος, ὅτι εἴκα σφαίρας τινὸς ἡ διάμετρος τμαθῇ, ὥστε τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμάματος τετράγωνον τριπλάσιον εἶμεν τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμάματος, καὶ διὰ τοῦ σημείου τὸ ἐπίπεδον ἀχθὲν ποτ' ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ τέμνῃ τὴν σφαῖραν τὸ τοιοῦτον τῷ εἴδει σχῆμα, οἷόν ἐστι τὸ μεῖζον τᾶς σφαίρας τμᾶμα, μέγιστόν ἐστι τῶν ἄλλων τμαμάτων τῶν ἐχόντων ἴσαν τὰν ἐπιφάνειαν. ὅτι δὲ τοῦτο ψεῦδός ἐστι, δῆλον, διὰ τῶν προαπεσταλμένων θεωρημάτων. δέδεικται γὰρ, ὅτι τὸ ἡμισφαίριον μέγιστόν ἐστι τῶν περιεχομένων ὑπὸ ἴσας ἐπιφανείας σφαίρας τμαμάτων. μετὰ δὲ ταῦτα περὶ τοῦ κώνου προβεβλημένα ἐστὶ τάδε. εἴκα ὀρθογωνίου κώνου τομὰ μενούσας τᾶς διαμέτρου περιενεχθῇ, ὥστε εἶμεν ἄξονα τὰν διάμετρον τὸ περιγραφὲν σχῆμα ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, κωνοειδὲς καλείσθω. καὶ εἴκα τοῦ κωνοειδέος σχήματος ἐπίπεδον ἐπιψαύῃ, παρὰ δὲ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθὲν ἀποτέμνῃ τι τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, τοῦ ἀποτμαθέντος τμάματος βάσις μὲν καλείσθω τὸ ἀποτέμνον ἐπίπεδον, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἐπιψαύει τὸ ἕτερον ἐπίπεδον τοῦ κωνοειδέος. εἰ δὲ καὶ τὸ εἰρημένον σχῆμα, ἐπιπέδῳ τμαθῇ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ὅτι μὲν ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται, δῆλον. ὅτι δὲ τὸ ἀποτμηθὲν τμᾶμα ἡμιόλιον ἐσσεῖται τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον, δεῖξαι δεῖ. καὶ εἴκα τοῦ κωνοειδέος δύο τμάματα ἀποτμηθέωντι ἐπιπέδοις ὁποσοιοῦν ἀγμένοις. ὅτι μὲν οὖν αἱ τομαὶ ἐσσοῦνται ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ, δῆλον, εἴκα τὰ ἀποτέμνοντα ἐπίπεδα μὴ ὀρθὰ ἔωντι ποτὶ τὸν ἄξονα. ὅτι δὲ τὰ τμάματα ποτ' ἄλλαλα τοῦτον ἑξοῦντι τὸν λόγον, ὃν ἔχοντι δυνάμει ποτ' ἀλλάλας, αἱ ἀπὸ τᾶν κορυφᾶν αὐτῶν ἀγμέναι παρὰ τὸν ἄξονα μέχρι τὰ ἐπίπεδα τέμνοντα, δεῖξαι δεῖ. τούτων δὲ αἱ ἀποδείξεις οὔπω σοι ἀποστέλλονται. μετὰ δὲ ταῦτα περὶ τᾶς ἕλικος ἦν προβεβλημένα ταῦτα. ἐντὶ δὲ ὥσπερ ἄλλο τι γένος προβλημάτων οὐδὲν ἐπικοινωνεῦντα τοῖς προειρημένοις, ὑπὲρ ὧν ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ τὰς ἀποδείξεις γεγραφήκαμέν σοι. ἐστὶ δὲ τάδε.

ΠΕΡΙ ΕΛΙΚΩΝ.

Εἴκα εὐθεῖα γραμμὰ ἐν ἐπιπέδῳ μένοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος ἰσοταχέως περιενεχθεῖσα ἀποκατασταθῇ, πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, ἅμα δὲ τᾷ γραμμᾷ τᾷ περιφερομένᾳ φέρηταί τι σαμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ, κατὰ τᾶς εὐθείας ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σαμεῖον ἕλικα γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. φαμὶ δὴ τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἀποκατασταθείσας ὅθεν ὥρμασεν, τρίτον μέρος εἶμεν τοῦ κύκλου τοῦ γραφέντος, κέντρου μὲν τοῦ μένοντος σαμείου, διαστήματι δὲ τᾶς εὐθείας τᾶς διανυσθείσας ὑπὸ τοῦ σαμείου ἐν τᾷ μιᾷ περιφορᾷ τᾶς εὐθείας. καὶ εἴκα τᾶς ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος τὸ ἔσχατον γενόμενον, ἄλλα δέ τις εὐθεῖα τᾷ περιενεχθείσᾳ καὶ ἀποκατασταθείσᾳ γραμμᾷ ποτ' ὀρθὰς ἀχθῇ, ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, ὥστε ἐμπεσεῖν τᾷ ἐπιψαυούσᾳ, φαμὶ τὰν ποταχθεῖσαν εὐθεῖαν ἴσαν εἶμεν τᾷ τοῦ κύκλου περιφορᾷ. καὶ εἴκα ἁ περιαγομένα γραμμὰ καὶ τὸ σαμεῖον, τὸ φερόμενον κατ' αὐτᾶς, πλείονας περιφορὰς περιενεχθέωντι καὶ ἀποκατασταθέωντι πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, φαμὶ τὸ χωρίον, τὸ ἐν

τᾶ δευτέρᾳ περιφορᾷ ποτιλαφθέντος ὑπὸ τᾶς ἕλικος, τὸ μὲν ἐν τᾷ τρίτᾳ ποτιλαφθὲν διπλάσιον ἐσσεῖται, τὸ δὲ ἐν τᾷ τετάρτᾳ τριπλάσιον, τὸ δὲ ἐν τᾷ πέμπτᾳ τετραπλάσιον, καὶ ἀεὶ τὰ ἐν ταῖς ὕστερον περιφοραῖς ποτιλαμβανόμενα χωρία κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς πολλαπλάσια ἐσσεῖται, τοῦ ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ ποτιλαφθέντος. τὸ δὲ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ ποτιλαφθὲν χωρίον ἕκτον μέρος εἶμεν, τοῦ ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ ποτιλαφθέντος χωρίου. καὶ εἴκα ἐπὶ τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας δύο σημεῖα λαφθέωντι, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπιζευχθέωντι εὐθεῖαι ἐπὶ τὸ μεμενακὸς πέρας τᾶς περιενεχθείσας γραμμᾶς, καὶ κύκλοι δύο γραφέωντι κέντρῳ μὲν τῷ μεμενακότι σημείῳ, διαστήμασι δὲ ταῖς ἐπιζευχθείσαις ἐπὶ τὸ μεμενακὸς πέρας τᾶς εὐθείας, καὶ ἐλάσσων τᾶν ἐπιζευχθεισᾶν ἐπεκβληθῇ, φαμὶ τὸ ποτιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς τοῦ μείζονος κύκλου περιφερείας τᾶς ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἕλικι μεταξὺ τᾶν εὐθειᾶν ἐούσας, καὶ τᾶς ἕλικος καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐκβληθείσας ποτὶ τὸ ποτιλαφθὲν χωρίον, ὑπό τε τᾶς τοῦ ἐλάσσονος κύκλου περιφερείας, καὶ τᾶς αὐτᾶς ἕλικος, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ πέρατα αὐτῶν, τοῦτον ἕξειν τὸν λόγον ὃν ἔχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου μετὰ δύο τριταμοριῶν τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου μετ' ἑνὸς τριταμορίου τᾶς εἰρημένας ὑπεροχᾶς. τούτων δὴ μοι καὶ ἄλλων περὶ τᾶς ἕλικος αἱ ἀποδείξιες ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ γράφονται. πρόκειται δὲ ὡς καὶ τῶν ἄλλων τῶν γεωμετρουμένων τὰ χρείαν ἔχοντα, εἰς τὴν ἀπόδειξιν αὐτῶν. λαμβάνω δὲ καὶ ἐν τούτοις τῶν ἐν τοῖς πρότερον ἐκδεδομένοις βιβλίοις λήμματα τόδε. τᾶν ἀνίσων γραμμᾶν, καὶ τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, αὐτὰν ἑαυτᾷ συντιθεμέναν, δυνατὸν εἶμεν παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος τῶν ποτ' ἄλλαλα λεγομένων.

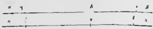
Εἴκα ἐπί τινος γραμμᾶς ἐνεχθῇ τι σημεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ φερόμενον, καὶ λαφθέωντι ἐν αὐτᾷ δύο γραμμαί, αἱ ἀπολαφθεῖσαι τὸν αὐτὸν ἕξουντι λόγον ποτ' ἀλλάλας, ὃν περ οἱ χρόνοι ἐν οἷς τὸ σημεῖον τὰς γραμμὰς ἐπορεύθη. ἐνέχθω γάρ τι σημεῖον ἐπὶ τᾶς α β γραμμᾶς ἰσοταχέως, καὶ λελάφθωσαν ἐν αὐτᾷ δύο γραμμαὶ αἱ γ δ, δ ε. ἔστω δὲ ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὰν γ δ γραμμὰν τὸ σημεῖον διεπορεύθη ὁ ζ η, ἐν ᾧ δὲ τὰν δ ε ὁ η θ. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ γ δ γραμμὰ ποτὶ τὰν δ ε γραμμάν, ὃν χρόνος ὁ ζ η ποτὶ τὸν η θ. συγκείσθωσαν γὰρ ἐκ τῶν γ δ, δ ε γραμμᾶν αἱ α δ, δ β γραμμαὶ καθ' ἁντινοῦν σύνθεσιν οὕτως, ὥς τε ὑπερέχειν τὰν α δ τᾶς δ β. καὶ ὁσάκις μὲν σύγκειται ἁ γ δ γραμμὰ ἐν τᾷ α δ, τοσαυτάκις συγκείσθω ὁ χρόνος ὁ ζ η ἐν τῷ χρόνῳ τῷ λ η. ὁσάκις δὲ σύγκειται ἁ δ ε γραμμὰ ἐν τᾷ δ β, τοσαυτάκις συγκείσθω ὁ θ η χρόνος ἐν τῷ κ η χρόνῳ. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται τὸ σημεῖον ἰσοταχέως ἐνεχθεὶς κατὰ τᾶς α β γραμμᾶς, δῆλον ὡς ἐν ἴσῳ χρόνῳ τὰν γ δ ἐνήνεκται,



ἐν τοσούτῳ καὶ ἑκάστῳ ἐνήνεκται τὰν ἴσαν τᾷ γ δ. φανερὸν οὖν, ὅτι καὶ συγκειμέναν τὰν α δ γραμμάν, ἐν τοσούτῳ χρόνῳ ἐνήνεκται, ὅσος ἐστὶν ὁ λ η χρόνος. ἐπειδὴ τοσαυτάκις σύγκειται ἅ τε γ δ γραμμὰ ἐν τᾷ α δ γραμμᾷ, καὶ ὁ ζ η χρόνος ἐν τῷ λ η χρόνῳ. διὰ ταῦτα δὴ καὶ τὰν β δ γραμμὰν ἐν τοσούτῳ χρόνῳ τὸ σημεῖον ἐνήνεκται, ὅσος ἐστὶν ὁ κ η χρόνος. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἁ α δ γραμμὰ τᾶς β δ, δῆλον ὅτι ἐν πλείονι χρόνῳ τὸ σημεῖον τὰν δ α διαπορεύεται γραμμάν, ἢ τὰν β δ. ὥς τε ὁ χρόνος ὁ λ η μείζων ἐστὶ τοῦ κ η χρόνου. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ εἴκα ἐκ τῶν χρόνων τῶν ζ η, η θ συντεθέωντι χρόνοι καθ' ἁντινοῦν σύνθεσιν, ὥς τε ὑπερέχειν τὸν ἕτερον τοῦ ἑτέρου, ὅτι καὶ αἱ ἐκ τᾶν γραμμᾶν τᾶν γ δ, δ ε, κατὰ τὰν αὐτὰν σύνθεσιν συντεθεῖσαι ὑπερέξει ἁ ὁμόλογος τῷ ὑπερέχοντι χρόνῳ. δῆλον οὖν ὅτι τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ γ δ ποτὶ τὰν δ ε, ὃν ὁ χρόνος ὁ ζ η ποτὶ τὸν χρόνον τὸν η θ.

Εἴκα δύο σημείων ἑκάτερον ἐπί τινος γραμμᾶς ἐνεχθέντος, μὴ τᾶς αὐτᾶς, ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ φερομένων, λαφθέωντι ἐν ἑκατέρᾳ τᾶν γραμμᾶν δύο γραμμαὶ αἵ τε πρῶται ἐν ἴσοις χρόνοις ὑπὸ τῶν σαμείων διανυόμεναι, καὶ αἱ δεύτεραι, τὸν αὐτὸν ἕξουντι λόγον ποτ' ἀλλάλας αἱ λαφθεῖσαι γραμμαί. ἔστω κατὰ τᾶς α β γραμμᾶς ἐνηνεγμένον τι σαμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ, καὶ ἄλλο κατὰ τᾶς κ λ. λελάφθωσαν δὲ ἐν τῷ α β δύο αἱ γ δ, δ ε γραμμαί, καὶ ἐν τᾷ κ λ αἱ ζ η, η θ, ἐν ἴσῳ δὲ χρόνῳ τὸ κατὰ τᾶς α β γραμμᾶς ἐνηνεγμένον σαμεῖον τὰν γ δ γραμμὰν διαπορευέσθω, ἐν ὅσῳ τὸ ἕτερον κατὰ τᾶς κ λ ἐνηνεγμένον τὰν ζ η, ὁμοίως καὶ τὰν δ ε γραμμὰν ἐν ἴσῳ διαπορευέσθω τὸ σαμεῖον, ἐν ὅσῳ τὸ ἕτερον τὰν η θ. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ γ δ ποτὶ τὰν δ ε, ὃν ἁ ζ η

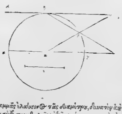
ποτὶ τὰν η θ. ἔστω δὴ ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὰν γ δ γραμμὰν διαπορεύεται τὸ σημεῖον, ὁ μ ν. ἐν τούτῳ δὴ τῷ χρόνῳ καὶ τὸ ἕτερον σημεῖον διαπορεύεται τὰν ζ η. πάλιν δὴ καὶ ἐν ᾧ τὰν δ ε γραμμὰν διαπορεύεται τὸ σαμεῖον, ἔστω ὁ ν ξ χρόνος. ἐν τούτῳ δὴ καὶ τὸ ἕτερον σημεῖον διαπορεύεται τὰν η θ. τὸν αὐτὸν δὴ λόγον ἑξοῦντι ἅ τε γ δ ποτὶ τὰν δ ε γραμμάν, ὃν ὁ χρόνος ὁ μ ν πρὸς ν ξ, καὶ ἁ ζ η ποτὶ τὰν η θ, ὃν ὁ χρόνος ὁ μ ν ποτὶ τὸν ν ξ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἕξοντι λόγον ἁ γ δ ποτὶ τὸν δ ε, ὃν ἁ ζ η ποτὶ τὰν η θ.



γ Κύκλων δοθέντων ὁποσωνοῦν τῷ πλήθει, δυνατόν ἐστιν εὐθεῖαν λαβεῖν μείζονα ἐσσεῖται τῶν τῶν κύκλων περιφερειᾶν. περιγεγραφέντος γὰρ περὶ ἕκαστον τῶν κύκλων πολυγώνου, δῆλον ὡς ἁ ἐκ πασῶν συγκειμένα τῶν περιμέτρων εὐθεῖα μείζων ἐσσεῖται πασᾶν τᾶν τῶν κύκλων περιφερειᾶν.

δ Δύο γραμμᾶν δοθεισᾶν ἀνίσων, εὐθείας τε καὶ κύκλου περιφερείας, δυνατόν ἐστι λαβεῖν εὐθεῖαν τᾶς μὲν μείζονος τᾶν δοθεισᾶν γραμμᾶν ἐλάσσονα, τᾶς δὲ ἐλάσσονος μείζονα. ὁσάκις γὰρ ὑπεροχὰ ᾇ ὑπερέχει ἁ μείζων γραμμὰ τᾶς ἐλάσσονος αὐτὰ συντεθειμένα ὑπερέξει τᾶς εὐθείας, εἰς τοσαῦτα ἴσα διαιρεθείσας τᾶς εὐθείας, τὸ ἓν τμῆμα ἔλασσον ἐσσεῖται τᾶς ὑπεροχᾶς. εἰ μὲν οὖν καὶ ἁ περιφέρεια μείζων τᾶς εὐθείας, ἑνὸς τμήματος ποτιτεθέντος ποτὶ τὰν εὐθεῖαν, τᾶς μὲν ἐλάσσονος τᾶν δοθεισᾶν, δῆλον ὡς μείζων ἐσσεῖται, τᾶς δὲ μείζονος ἐλάσσων. καὶ γὰρ ἁ ποτικειμένα, ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ὑπεροχᾶς.

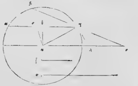
ε Κύκλου δοθέντος, καὶ εὐθείας ἐπιψαυούσης τοῦ κύκλου, δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀγαγεῖν εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, ὥς τε τὰν μεταξὺ τᾶς ἐπιψαυούσας, καὶ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ ἁ περιφέρεια τοῦ κύκλου ἁ μεταξὺ τᾶς ἁφᾶς, καὶ τᾶς διαχθείσας ὑπὸ τὶ τὰν δοθεῖσαν ὁποιανοῦν κύκλου περιφέρειαν. δεδόσθω κύκλος ὁ α β γ, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ κ, καὶ ἐπιψαυέτω τοῦ κύκλου ἁ δ ζ κατὰ τὸ β. δεδόσθω δὲ καὶ κύκλου περιφέρεια ὁποιαοῦν. δυνατὸν δέ ἐστι τᾶς δοθείσας περιφερείας λαβεῖν τινὰ εὐθεῖαν μείζονα, καὶ ἔστω ἁ ε εὐθεῖα μείζων τᾶς δοθείσας περιφερείας. ἄχθω δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου παρὰ τὰν δ ζ, ἁ α η, καὶ κείσθω ἁ η θ ἴσα τᾷ ε, νεύουσα ἐπὶ τὸ β. ἀπὸ δὴ τοῦ κ κέντρου ἐπὶ τὸ θ ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω. τὸν αὐτὸν δὴ λόγον ἕξει ἁ θ ζ ποτὶ τὰν ζ κ, ὃν ἁ β θ ποτὶ τὰν θ η. ἁ ἄρα ζ θ ποτὶ τὰν θ κ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ἁ β θ περιφέρεια ποτὶ τὰν δοθεῖσαν περιφέρειαν. διότι ἁ μὲν β θ εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς β θ περιφερείας, ἁ δὲ θ η μείζων τᾶς δοθείσας περιφερείας. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει καὶ ἁ ζ θ ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου, ἢ ἁ β θ περιφέρεια ποτὶ τὰν δοθεῖσαν περιφέρειαν.



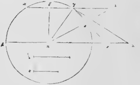
ς Κύκλου δοθέντος, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμᾶς ἐλάσσονος τᾶς διαμέτρου, δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ποτὶ τὰν περιφέρειαν αὐτοῦ ποτιβαλεῖν εὐθεῖαν, τέμνουσαν τὰν ἐν τῷ κύκλῳ δεδομέναν γραμμάν, ὥς τε τὰν ἀπολαφθεῖσαν εὐθεῖαν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας, ποτὶ τὰν ἐπιζευχθεῖσαν ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ποτιπεσοίσας τοῦ ἐπὶ τᾶς περιφερείας, ποτὶ τὸ ἕτερον μέρος τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας εὐθείας, τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν, εἰ καὶ ὁ δοθεὶς λόγος ἐλάσσων ἦν, τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετον ἐπ᾽ αὐτὰν ἀγμέναν. δεδόσθω κύκλος ὁ α β γ, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ κ. ἐν αὐτῷ δεδόσθω εὐθεῖα ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ γ α, καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ ζ πρὸς η, ἐλάσσων τοῦ ὃν ἔχει ἁ γ θ ποτὶ τὰν κ θ, καθέτου οὔσης τᾶς κ θ. ἄχθω γὰρ καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου παρὰ τὰν α γ ἁ κ ν, καὶ τῇ κ γ ποτ᾽ ὀρθὰς ἁ γ λ. ὅμοια δή ἐστι τὰ γ θ κ, γ κ λ τρίγωνα. ἐστὶν οὖν ὡς ἁ γ θ ποτὶ τὰν θ κ, οὕτως ἁ κ γ ποτὶ τὰν γ λ. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἕξει ἁ ζ ποτὶ τὰν η, ἢ ἁ κ γ ποτὶ τὰν γ λ. ὃν δὴ λόγον ἕξει ἁ ζ ποτὶ

τὰν

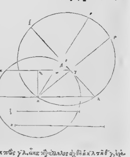
ταν π. ἐπεὶ γὰρ ἔχει ἁ κγ πρὸς μείζονα τᾶς γλ. ἐχέτω ποτὶ τὰν βν. κείσθω δὲ ἁ βν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς εὐθείας διὰ τοῦ γ. δυνατὸν δέ ἐστιν οὕτως τεθῆμεν. καὶ πεσεῖται ἐκτός, ἐπεὶ μείζων ἐστὶ τᾶς γλ. ἐπεὶ οὖν ἁ βκ πρὸς βν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ζ ποτὶ τὰν π, καὶ ἁ εβ ποτὶ βγ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν ἁ ζ ποτὶ π.



Τῶν αὐτῶν δεδομένων, καὶ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ εὐθείας ἐκβεβλημένας, δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου προσβαλεῖν ποτὶ τὰν ἐκβεβλημέναν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας ποτὶ τὰν ἐπιζευχθεῖσαν ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ἀπολαφθείσας, ποτὶ τὸ πέρας τᾶς ἐκβεβλημένας τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν, εἰ καὶ ὁ δοθεὶς λόγος μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου καθέτον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν. δεδόσθω τὰ αὐτά, καὶ ἔστω ἁ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐκβεβλημένα. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ἔστω ὃν ἔχει ἁ ζ ποτὶ τὰν π, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ γθ ποτὶ τὰν θκ. μείζων οὖν ἐσεῖται καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ κγ πρὸς γλ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ζ πρὸς π, τοῦτον ἕξει ἁ κγ πρὸς ἐλάσσονα τᾶς γλ. ἐχέτω πρὸς ιν νεύουσαν ἐπὶ τὸ γ, δυνατὸν δέ ἐστιν οὕτως τίμνειν, καὶ πεσεῖται ἐντὸς τᾶς γλ. ἐπειδὴ ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς γλ. ἐπεὶ οὖν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ κγ πρὸς ιν, ὃν ἁ ζ πρὸς π, καὶ ἁ ει πρὸς ιγ τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον, ὃν ἁ ζ ποτὶ τὰν π.



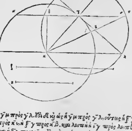
Κύκλου δοθέντος, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμᾶς ἐλάσσονος τᾶς διαμέτρου, καὶ ἄλλας ἐπιψαυούσας τοῦ κύκλου κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας, δυνατόν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου προσβαλεῖν ἵνα εὐθεῖαν ποτὶ τὰν εὐθεῖαν, ὥστε τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπ' αὐτᾶς μεταξὺ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, καὶ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας γραμμᾶς, ποτὶ τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν. εἴκα ὁ δοθεὶς λόγος ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου καθετὸν ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν. ἔστω κύκλος δεδομένος ὁ αβγδ, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ εὐθεῖα δεδόσθω, ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ γα. καὶ ἁ ξλ ἐπιψαυέτω τοῦ κύκλου κατὰ τὸ γ, καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ ζ πρὸς π ἔστω ἐλάσσων τοῦ ὃν ἔχει ἁ γθ



πρὸς θκ. ἐσεῖται δὲ ἐλάσσων καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ γκ πρὸς γλ. εἴκα παράλληλος ἀχθῇ ἁ κλ τᾷ θγ, ἐχέτω δὲ

τω δὴ ἁ κγ πρὸς γξ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ζ πρὸς η. μείζων δέ ἐστιν ἁ ξγ τᾶς γλ. γεγράφθω κύκλος περιφέρεια περὶ τὰ κλξ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶ μείζων ἁ ξγ τᾶς γλ, καὶ ποτ' ὀρθὰς ἐντὶ ἀλλάλαις αἱ κγ ξλ, δυνατόν ἐστι τὰν μγ ἴσαν ἀλλάλαις θέμεν τὰν ιν, νεύουσαν ἐπὶ τὸ κ, τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ξι ιλ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν κε ιλ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἁ ξι πρὸς κε. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν κ ι ιν πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν κι γλ. ὥστε καὶ ἁ ιν πρὸς γλ ἐστίν, ὡς ἁ ξι πρὸς κε. ὥστε καὶ ἁ γμ πρὸς γλ, καὶ ἁ ξγ πρὸς κγ, καὶ πρὸς κβ ἐστίν, ὡς ἁ ξι πρὸς κε. καὶ λοιπὰ ἁ ιγ πρὸς βε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ξγ ποτὶ τὰν γκ, καὶ ὃν ἁ η ποτὶ τὸ ζ. πέπτωκεν οὖν ἁ κν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, καὶ ἔχει ἁ μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς εὐθείας ἁ βε ποτὶ τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ζ ποτὶ τὰν η λόγον.

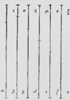
θ. Τῶν αὐτῶν δεδομένων, καὶ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας γραμμᾶς ἐκβεβλημένας, δυνατόν ἐστι ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ποτιβαλεῖν ποτὶ τὰν ἐκβεβλημέναν εὐθεῖαν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας ποτὶ τὰν ἀπολαφθεῖσαν, ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας ποτὶ τὰν ἁφὰν τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν, εἴκα ὁ δοθεὶς λόγος μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγομέναν. δεδόσθω κύκλος ὁ αβγδ. καὶ ἐν τῷ κύκλῳ εὐθεῖα ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ γα διήχθω, ἐπιψαυέτω τοῦ κύκλου ἁ ξγ κατὰ τὸ γ. καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ ζ ποτὶ τὰν η, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ γθ ποτὶ τὰν θκ. ἔσται δὴ μείζων καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ κγ ποτὶ τὰν γλ. ἐχέτω οὖν ἁ κγ ποτὶ τὰν γξ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ζ ποτὶ τὰν η. ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν αὕτη τᾶς γλ. πάλιν δὴ γεγράφθω κύκλος διὰ τῶν ξκλ σημείων. ἐπεὶ οὖν ἐλάσσων ἐστὶν ἁ ξγ τᾶς γλ, καὶ ποτ' ὀρθάς εἰσιν ἀλλάλαις αἱ κμ ξγ, δυνατόν τὴν γμ ἴσαν θέμεν τὰν ιν νεύουσαν ἐπὶ τὸ κ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ξι λ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν λι κε ἐστίν, ὡς ξι πρὸς κε. ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν ξι ιλ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν κι ιν. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν λι κε ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν κι γλ, διὰ τὸ εἶναι ὡς τὴν κε πρὸς ικ, οὕτως τὴν λγ πρὸς λι. καὶ ὡς ἄρα ἡ ξι πρὸς κε, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν κι ιν πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν κι γλ. τουτέστιν ὡς νι πρὸς γλ, τουτέστιν ἡ γμ πρὸς γλ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ γμ πρὸς γλ, οὕτως ἡ ξγ πρὸς κγ, τουτέστι πρὸς κβ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ξι πρὸς κε, ἡ ξγ πρὸς κβ. καὶ λοιπὴ ἡ ιγ πρὸς λοιπὴν τὴν βε ἐστίν, ὡς ἡ ξγ πρὸς γκ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ξγ πρὸς γκ, τοῦτον ἔχει ἡ η πρὸς ζ. ποτιπέπτωκε δὴ ἁ κε ποτὶ τὰν ἐκβεβλημέναν, καὶ ἁ μεταξὺ τᾶς ἐκβεβλημένας καὶ τᾶς περιφερείας ἁ βε ποτὶ τὰν γι, τὰν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας ἀπολαφθεῖσαν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ζ ποτὶ τὰν η.



ι. Εἶκα γραμμαὶ ἑξῆς τεθέωντι ὁποσαιοῦν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, ᾖ δὲ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τᾷ ἐλαχίστᾳ, καὶ ἄλλαι γραμμαὶ τεθέωντι τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα τᾷ μεγίστᾳ, τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ, ποτιλαμβάνοντα τό τε ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετράγωνον, καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἐλαχίστας καὶ τᾶς ἴσας πάσαις τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχούσαις, τριπλάσια ἐσσοῦνται τῶν τετραγώνων πάντων, τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν. ἔστω γραμμαὶ ὁποσαιοῦν ἐφεξῆς κείμεναι τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, αἱ α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ. ἁ δὲ θ ἴσα ἔστω τᾷ ὑπεροχᾷ. ποτικείσθω δὲ ποτὶ τὰν β ἴσα τᾷ θ ἁ ι, ποτὶ δὲ τὰν γ ἁ κ ἴσα τᾷ η. ποτὶ δὲ τὰν δ ἁ λ ἴσα τᾷ ζ. ποτὶ δὲ τὰν ε ἁ μ ἴσα τᾷ ε. ποτὶ δὲ τὰν ζ ἁ ν ἴσα τᾷ δ. ποτὶ δὲ τὰν η ἁ ξ ἴσα τᾷ γ. ποτὶ δὲ τὰν θ ἁ ο ἴσα τᾷ β. ἐσσοῦνται δὴ αἱ γινόμεναι ἴσαι ἀλλάλαις, καὶ τᾷ μεγίστᾳ. δεικτέον οὖν, ὅτι τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶν τε α, καὶ τᾶν γενομέναν, ποτιλαβόντα τό τε ἀπὸ τᾶς α τετράγωνον, καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς θ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, τριπλάσια ἐντὶ τῶν τετραγώνων πάντων τῶν ἀπὸ τᾶν

α, β,

α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ. ἔστι δὴ τὸ μὲν ἀπὸ τᾶς β ι τετράγωνον ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ι, β τετραγώνοις, καὶ δύο τοῖς ὑπὸ τῶν β, ι περιεχομένοις. τὸ δὲ ἀπὸ τᾶς κ γ, ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν κ, γ τετραγώνοις, καὶ δύο τοῖς ὑπὸ τῶν κ, γ περιεχομένοις. ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἀλλᾶν τᾶν ἴσων τᾷ α τετράγωνα, ἴσα ἐντὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τμαμάτων τετραγώνοις, καὶ δύο τοῖς ἀπὸ τῶν τμαμάτων περιεχομένοις. τὰ μὲν οὖν ἀπὸ τῶν α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ι, κ, λ, μ, ν, ξ, ο ποτιλαβόντα τὸ ἀπὸ τᾶς α τετραγώνου, διπλάσιά ἐντι τῶν ἀπὸ τῶν α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ τετραγώνων. λοιπὸν δὲ ἐπιδείξομες, ὅτι τὰ διπλάσια τῶν περιεχομένων ὑπὸ τῶν τμαμάτων ἐν ἑκατέρᾳ γραμμᾷ τᾶν ἴσων τᾷ α, ποτιλαβόντα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ. καὶ ἐπεὶ δύο μὲν τὰ ὑπὸ β, ι περιεχόμενα, ἴσα δυσὶ τοῖς ὑπὸ τῶν β, θ περιεχομένοις. δύο δὲ τὰ ὑπὸ τῶν κ, γ ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς τετραπλασίας τᾶς γ, διὰ τὸ τὰν κ διπλασίονα εἶμεν τᾶς θ. δύο δὲ τὰ ὑπὸ τᾶν δ, λ ἴσα τῷ ὑπό τᾶς θ, καὶ τᾶς ἑξαπλασίας τᾶς δ, διὰ τὸ τὰν λ τριπλασίαν εἶμεν. ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἄλλα τὰ διπλάσια τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων, ἴσα ἐντὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ καὶ τᾶς πολλαπλασίας ἀεὶ κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς ἀρτίους τᾶς ἑπομένας γραμμᾶς. τὰ οὖν σύμπαντα ποτιλαβόντα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς θ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ἐσσοῦνται ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας πάσαις τᾷ τε α, καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς β, καὶ τᾷ πενταπλασίᾳ τᾶς γ. καὶ ἀεὶ τᾷ περισσᾷ κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς περισσοὺς πολλαπλασίας τᾶς ἑπομένας γραμμᾶς. ἐντὶ δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ τετράγωνα ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν αὐτᾶν γραμμᾶν. ἔστι γὰρ τὸ ἀπὸ τᾶς α τετράγωνον, ἴσον τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας πάσαις τᾷ τε α καὶ τᾷ ἴσᾳ ταῖς λοιπαῖς, ὧν ἑκάστα ἴσα τᾷ α. ἰσάκις γὰρ μετρεῖ ἅ τε θ τὰν α, καὶ ἁ α τὰς ἴσας αὐτᾷ πάσας ἐν τᾷ α. ὥστε ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ α τετράγωνον τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας τᾷ α, καὶ τᾷ διπλασίᾳ τῶν β, γ, δ, ε, ζ, η, θ. αἱ γὰρ ἴσαι τᾷ α πᾶσαι χωρὶς τᾶς α, διπλάσιαι ἐντὶ τᾶν β, γ, δ, ε, ζ, η, θ. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς β τετράγωνον ἴσον ἐντὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας, τᾷ τε β καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶν γ, δ, ε, ζ, η, θ. καὶ πάλιν τὸ ἀπὸ τᾶς γ τετράγωνον ἴσον τῷ ὑπὸ τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας τᾷ τε γ, καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶν ε, ζ, η, θ. ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἀλλᾶν τετράγωνα ἴσα ἐντὶ τοῖς περιεχομένοις ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας αὐτᾷ τε καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶν λοιπᾶν. δῆλον οὖν ὅτι τὰ ἀπὸ πασᾶν τετράγωνα, ἴσα ἐντὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας πάσαις τᾷ τε α, καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς β, καὶ τᾷ πενταπλασίᾳ τᾶς γ. καὶ τᾷ κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς περισσοὺς πολλαπλασίᾳ τᾶς ἑπομένας.

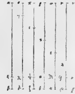


Ἐκ τούτου οὖν φανερὸν, ὅτι τὰ τετράγωνα πάντα τὰ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ, τῶν μὲν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, ἐλάσσονα ἐστὶν ἢ τριπλάσια. ἐπειδὴ ποτιλαβόντα τινὰ τριπλάσιά ἐντι. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου μέζονα ἢ τριπλάσια, ἐπειδὴ τὰ ποτιλαφθέντα ἐλάσσονα ἐστὶν ἢ τριπλάσια τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου. καὶ τοίνυν εἴκα ὅμοια εἴδεα ἀναγραφέωντι, ἀπὸ πασᾶν τᾶν τε τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, καὶ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ, τῶν μὲν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν εἰδέων, ἐλάσσονα ἐσσοῦνται, ἢ τριπλάσια. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας εἴδεος, μέζονα ἢ τριπλάσια. τὸν γὰρ αὐτὸν ἕξοῦντι λόγον τὰ ὅμοια εἴδεα τοῖς τετραγώνοις.

Εἴκα γραμμαὶ ἑξῆς τεθέωντι ὁποσαιοῦν, τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, καὶ ἄλλαι γραμμαὶ τεθέωντι, τῷ μὲν πλήθει μίᾳ ἐλάσσονες τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, τῷ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ, τὰ τετράγωνα πάντα τὰ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ, ποτὶ μὲν τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τᾶς ἐλαχίστας, ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις, τῷ τε περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς μεγίστας καὶ τᾶς ἐλαχί-

ια

λαχίστας καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τῶ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς τετραγώνω, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἐλαχίστας. ποτὶ δὲ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ ταν τῶ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνω, μείζονα τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἔστω γὰρ γραμμαὶ ὁποσαιοῦν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι ἑξῆς κείμεναι, ἁ μὲν α β τᾶς γ δ, ἁ δὲ γ δ τᾶς ε ζ, ἁ δὲ ε ζ τᾶς η θ, ἁ δὲ η θ τᾶς ι κ, ἁ δὲ ι κ τᾶς λ μ, ἁ δὲ λ μ τᾶς ν ξ. ποτικείσθω δὴ ποτὶ μὲν τὰν γ δ ἴσα μιᾷ ὑπεροχᾷ ἁ γ ο. ποτὶ δὲ τὰν ε ζ ἴσα δυσὶν ὑπεροχαῖς, ἁ ε π. ποτὶ δὲ τὰν η θ ἴσα τρισὶν ὑπεροχαῖς ἁ η ρ. καὶ ποτὶ τὰς ἄλλας τὸν αὐτὸν τρόπον. ἐσσοῦνται δὴ αἱ γινόμεναι ἀλλάλαις ἴσαι, καὶ ἑκάστα τᾷ μεγίστᾳ. δεικτέον οὖν ὅτι τὰ ἀπὸ πασᾶν ταν γινομέναν τετράγωνα, ποτὶ μὲν πάντα τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν ταν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ν ξ τετραγώνου ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ ἀπὸ τᾶς α β τετράγωνον ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις, τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ ταν α β, ν ξ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ν υ τετραγώνου. ποτὶ δὲ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ ταν αὐταν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς α β τετραγώνου μείζονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἀφῃρήσθω ἀφ᾽ ἑκάστης ταν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν ἴσα τᾷ ὑπεροχᾷ. ὃν δὴ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς α β ποτὶ συναμφότερα, τό, τε ὑπὸ ταν α β, φ β περιεχόμενον, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς α φ τετραγώνου, τοῦτον ἔχει λόγον τό, τε ἀπὸ τᾶς ο δ τετράγωνον, ποτί τε τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταν ο δ, δ χ. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς χ ο τετραγώνου, τὸ ἀπὸ τᾶς π ζ ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταν π ζ, ψ ζ. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ψ π τετραγώνου, ἀπὸ ταν ἄλλαν τετράγωνα, ποτὶ τὰ ὁμοίως λαμβανόμενα χωρία. καὶ

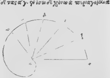


τὰ πάντα δὴ τὰ ἀπὸ πασᾶν ταν ο δ, π ζ, ρ θ, σ κ, τ μ, υ ξ, ποτί τε πάντα περιεχόμενα ὑπό τε τᾶς ν ξ καὶ τὰς ἴσας πάσαις ταῖς εἰρημέναις γραμμαῖς. καὶ τὰ τριταμόρια τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ ταν ο χ, π ψ, ρ ω, σ λ, τ ς, υ ν, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς α β τετράγωνον ποτὶ συναμφότερα, τό, τε ὑπὸ ταν α β, φ β περιεχόμενον, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ φ α τετραγώνου. εἰ οὖν κα δειχθῇ τό, τε περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ν ξ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς ο δ, π ζ, ρ θ, σ κ, τ μ, υ ξ, καὶ τὰ τρίτα μέρη τετραγώνων τῶν ἀπὸ ταν ο χ, π ψ, ρ ω, σ λ, τ ς, υ ν, τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ ταν α β, γ δ, ε ζ, η θ, ι κ, λ μ, ἐλάσσονα. τῶν δὲ τετραγώνων τῶν ἀπὸ ταν γ δ, ε ζ, η θ, ι κ, λ μ, ν ξ μείζονα, δεδειγμένον ἐσσεῖται τὸ προτεθέν. ἐντὶ δὴ τὸ μὲν περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ν ξ, καὶ τὰς ἴσας πάσαις ταῖς ο δ, π ζ, ρ θ, σ κ, τ μ, υ ν καὶ τὰ τρίτα μέρη τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ ταν ο χ, π ψ, ρ ω, σ λ, τ ς, υ ν, ἴσον τοῖς τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ χ δ, ψ ζ, ω θ, λ κ, ς μ, ν ξ, καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς ν ξ. καὶ ἴσας πάσαις ταῖς ο χ, π ψ, ρ ω, σ λ, τ ς, υ ν. καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ ταν ο χ, π ψ, ρ ω, σ λ, τ ς, υ ν. τὰ δὲ ἀπὸ ταν α β, γ δ, ε ζ, η θ, ι κ, λ μ τετράγωνα ἴσα τοῖς ἀπὸ ταν β φ, χ δ, ψ ζ, ω θ, λ κ, ς μ τετραγώνοις, καὶ τοῖς ἀπὸ ταν α φ, γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ς. καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶς β φ, καὶ τᾶς διπλασίας ταν α φ, γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ς. κοινὰ μὲν οὖν ἐντὶ ἑκατέροις τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ ταν ἴσαν τᾷ ν ξ, τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς ν ξ, καὶ τὰς ἴσας ταῖς ο χ, π ψ, ω ρ, λ σ, ς τ, υ ν, ἔλασσον ἐστὶ τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τᾶς β φ, καὶ τᾶς διπλασίας ταν α φ, γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ς. διὰ τὸ τὰς νῦν εἰρημένας γραμμαῖς ταῖς μὲν γ ο, ε π, η ρ, ι σ, λ τ, υ ν, ἴσας εἶμεν, ταν δὲ λοιπᾶν μείζονας. καὶ τὰ τετράγωνα δὲ τὰ ἀπὸ ταν α φ, γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ς. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς ἐπάνω. ἐλάττονα ἄρα ἐντὶ τὰ ῥηθέντα χωρία τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν α β, γ δ, ε ζ, η θ, ι κ, λ μ. λοιπὸν δὲ δείξομεν, ὅτι μείζονά ἐντι τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν γ δ, ε ζ, η θ, ι κ, λ μ, ν ξ. πάλιν δὴ τετράγωνα τὰ ἀπὸ ταν γ δ, ε ζ, η θ, ι κ, λ μ, ν ξ, ἴσα ἐντὶ τοῖς τε ἀπὸ ταν γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ς, καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς ν ξ, καὶ τᾶς διπλασίας πασᾶν ταν γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ς. καὶ τοῖς ἀπὸ ταν χ δ, ψ ζ, ω θ, λ κ, ς μ, ν ξ. μεῖζον δὲ τὸ ὑπό τε τᾶς ν ζ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς ο χ, π ψ, ρ ω, σ λ, τ ς, υ ν, τοῦ ὑπὸ τᾶς ν ξ καὶ τᾶς διπλασίας πασᾶν ταν γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ς. ἐντὶ δὲ καὶ τετράγωνα τὰ ἀπὸ ταν χ ο, ψ π, ω ρ, λ σ, ς τ, υ ν, τῶν ἀπὸ ταν γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ς, μείζονα ἢ τριπλάσια. δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο. μείζονα ἄρα ἐντὶ τὰ ῥηθέντα χωρία τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ ταν γ δ, ε ζ, η θ, ι κ, λ μ, ν ξ.

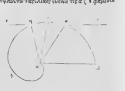
Καὶ τοίνυν εἴκα ὅμοια ἀναγραφέντι ἀπὸ πασᾶν, ἀπό τε τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, καὶ ἀπὸ τᾶς ἴσας τᾷ μεγίστᾳ, εἴδεα πάντα τὰ ἀπὸ τᾶν ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας εἴδεος, ἐλάσσονα λόγον ἕξοντι, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις, τῷ τε περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς μεγίστας καὶ τᾶς ἐλαχίστας, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἐλαχίστας, ποτὶ δὲ τὰ ἀπὸ τᾶν αὐτᾶν εἴδεα χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας μείζονα τοῦ αὐτοῦ λόγου. τὸν αὐτὸν γὰρ ἔχουσι λόγον τὰ ὅμοια εἴδεα τοῖς τετραγώνοις.

Εἴκα εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ γραμμὰ ἐν ἐπιπέδῳ μένοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος αὐτᾶς, ἰσοταχέως περιενεχθεῖσα ὁσάκις οὖν ἀποκατασταθῇ πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, ἅμα δὲ τᾷ γραμμᾷ περιαγομένᾳ φέρηταί τι σαμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ κατὰ τᾶς εὐθείας, ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σαμεῖον ἕλικα γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. καλείσθω οὖν τὸ μὲν πέρας τᾶς εὐθείας τὸ μένον περιαγομένας αὐτᾶς, ἀρχὰ τᾶς ἕλικος. ἁ δὲ θέσις τᾶς γραμμᾶς ἀφ' ἇς ἄρξατο ἁ εὐθεῖα περιφέρεσθαι, ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. εὐθεῖα αὖ μὲν ἐν τᾷ πρώτᾳ τᾷ περιφορᾷ διαπορευθῇ τὸ σαμεῖον, τὸ κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον, πρώτα καλείσθω. ἃν δὲ ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ τὸ αὐτὸ σαμεῖον διανύσῃ, δευτέρα, καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως ταύταις ὁμωνύμως ταῖς περιφοραῖς καλείσθωσαν. τὸ δὲ χωρίον τὸ περιλαφθὲν ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γραφείσας, καὶ τᾶς εὐθείας ἅ ἐστι πρώτα, πρῶτον καλείσθω. τὸ δὲ περιλαφθὲν ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γραφείσας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς δευτέρας, δεύτερον καλείσθω. καὶ τὰ ἄλλα ἑξῆς οὕτω καλείσθω. καὶ εἴκα ἀπὸ τοῦ σαμείου, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἀχθῇ τις εὐθεῖα γραμμά, τᾶς εὐθείας ταύτας ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἁ περιφορὰ γέγονε, προαγομένα καλείσθω. τὰ δὲ ἐπὶ θάτερα ἑπόμενα, ὅ τε γραφεὶς κύκλος κέντρῳ μὲν τῷ σαμείῳ, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, διαστήματι δὲ τᾷ εὐθείᾳ ἅ ἐστι πρώτα, πρῶτος καλείσθω. ὁ δὲ γραφεὶς κέντρῳ μὲν τῷ αὐτῷ, διαστήματι δὲ διπλασίᾳ εὐθείᾳ, δεύτερος καλείσθω, καὶ οἱ ἄλλοι δὲ ἑξῆς τούτοις τὸν αὐτὸν τρόπον.

Εἴκα ποτὶ τὰν ἕλικα τὰν μὲν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμέναν ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, εὐθεῖαι ἐμπέσωντι ὁποιαιοῦν, ἴσας ποιοῦσαι γωνίας ποτ' ἀλλάλας, τῷ ἴσῳ ὑπερέχοντι ἀλλάλων. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς αἱ αβ, αγ, αδ, αε, αζ ἴσας γωνίας ποιοῦσαι ποτ' ἀλλάλας. δεικτέον ὅτι τῷ ἴσῳ ὑπερέχει ἁ αγ τᾶς αβ, καὶ ἁ αδ τᾶς αγ, καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως. ἐν ᾧ γὰρ χρόνῳ ἁ περιαγομένα γραμμὰ ἀπὸ τᾶς αβ ἐπὶ τὰν αγ ἀφικνεῖται, ἐν τούτῳ τῷ χρόνῳ τὸ σαμεῖον τὸ ἐπὶ τᾶς εὐθείας φερόμενον, τὰν ὑπεροχὰν διαπορεύεται, ᾇ ὑπερέχει ἁ γα τὰν αβ. ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἀπὸ τᾶς αγ ἐπὶ τὰν αδ, ἐν τούτῳ διαπορεύεται τὰν ὑπεροχὰν ᾇ ὑπερέχει ἁ αδ τᾶς αγ. ἐν ἴσῳ δὲ χρόνῳ ἁ περιαγομένα γραμμὰ ἀπό τε τᾶς αβ ἐπὶ τὰν αγ ἀφικνεῖται, καὶ ἀπὸ τᾶς αγ ἐπὶ τὰν αδ, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ἴσαι ἐντί. ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὸ ἐπὶ τᾶς εὐθείας φερόμενον σαμεῖον διαπορεύεται τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει ἁ αγ τᾶς αβ, καὶ τὰν ὑπεροχὰν ᾇ ὑπερέχει ἁ αδ τᾶς αγ. τῷ ἴσῳ ἄρα ὑπερέχει ἅ τε αγ τᾶς αβ, καὶ ἁ αδ τᾶς αγ, καὶ αἱ λοιπαί. ΙΒ

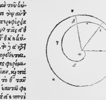


Εἴκα εὐθεῖα γραμμὰ τᾶς ἕλικος ἐπιψαύῃ, καθ' ἓν μόνον ἐπιψαύσει σαμεῖον. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς τὰ αβγδ. ἔστω δὲ ἀρχὰ μὲν τᾶς ἕλικος τὸ α σαμεῖον, ἀρχὰ δὲ τᾶς περιφορᾶς ἁ αδ εὐθεῖα, καὶ ἐπιψαυέτω τᾶς ἕλικος εὐθεῖά τις ἁ ζε. φαμὶ δὴ ὅτι καθ' ἓν μόνον σαμεῖον ἐπιψαύει αὐτᾶς. ἐπιψαυέτω γὰρ εἰ δυνατὸν κατὰ δύο σαμεῖα τὰ γ, η. καὶ ἐπιζευχθῶσαν αἱ αγ, αη, καὶ ἁ γωνία δίχα τετμήσθω ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν αη, αγ. καθ' ὃ δὲ σαμεῖον ἁ δίχα τέμνουσα τὰν γωνίαν τᾷ ἕλικι ποτιπίπτει, ἔστω τὸ θ. τῷ δὴ ἴσῳ ὑπερέχει ἅ τε αη τᾶς αθ, καὶ ἁ αθ τᾶς αγ, ἐπειδὴ ἴσας γωνίας περιέχοντι ὑπὸ τᾶν ἀλλάλας. ὥστε διπλασίαι ἐντὶ αἱ αη, αγ τᾶς αθ. ἀλλὰ τᾶς ἐν τῷ τριγώνῳ τᾶς αθ δίχα τεμνούσας τὰν γωνίαν, μείζονές ἐντι ἢ διπλασίαι. δῆλον οὖν ὅτι καθ' ὃ συμπίπτει (τὸ) σαμεῖον τᾷ γη εὐθείᾳ ἁ ... μεταξὺ τῶν θ, α ἐστι σαμείων, τέμνει ἄρα ἁ εζ τὰν ἕλικα, ἐπειδή τι τῶν ἐν τᾷ γη σαμείων ἐν- ΙΓ

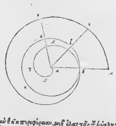


τος δ' ἐπὶ τᾶς ἕλικος. ὑπέκειτο δὲ ἐπιψαύουσα, καθ' ἓν ἄρα μόνον ἅπτεται ἁ ἐπὶ τᾶς ἕλικος.

ιδ. Εἴκα ποτὶ τὰν ἕλικα τὰν ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ποτιπεσῶντι δύο εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ σημείου, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, καὶ ἐκβληθέωντι ποτὶ τὰν τοῦ πρώτου κύκλου περιφέρειαν, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, αἱ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι ποτ' ἀλλάλας, ὃν αἱ περιφέρειαι τοῦ κύκλου αἱ μεταξὺ τοῦ πέρατος τᾶς ἕλικος, καὶ τῶν περάτων τᾶν ἐκβληθεισᾶν εὐθειᾶν τῶν ἐπὶ τὰς περιφερείας γινομένων, ἐπὶ τὰ προαγούμενα λαμβανομέναν τᾶν περιφερειᾶν, ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ἕλικος. ἔστω ἕλιξ ἁ α β γ δ ε θ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἀρχὰ δὲ τᾶς μὲν ἕλικος ἔστω τὸ α σημεῖον. ἁ δὲ θ α εὐθεῖα ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς, ἔστω καὶ κύκλος ὁ θ κ η. ἔστω ὁ πρῶτος. ποτιπιπτόντων δὲ ἀπὸ τοῦ α σημείου ποτὶ τὰν ἕλικα, αἱ α ε, α δ. καὶ ἐκπιπτόντων ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἐπὶ τὰ ζ, η. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ α ε ποτὶ τὰν α δ, ὃν ἁ θ κ ζ περιφέρεια ποτὶ τὰν θ κ η περιφέρειαν. περιαγομένας γὰρ τᾶς α θ γραμμᾶς, δῆλον ὡς τὸ μὲν θ σημεῖον ἐπὶ τᾶς τοῦ θ κ η κύκλου περιφερείας ἐνεχθεὶς ἐστὶν ἰσοταχέως. τὸ δὲ α ἐπὶ τᾶς εὐθείας φερόμενον τὰν α θ γραμμὰν πεπορεύεται. καὶ τὸ θ σημεῖον ἐπὶ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας φερόμενον, τὰν θ κ ζ περιφέρειαν. τὸ δὲ α τὰν α ε εὐθεῖαν. καὶ πάλιν τό τε α σημεῖον τὰν α δ γραμμάν. καὶ τὸ θ τὰν θ κ η περιφέρειαν, ἑκάτερον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ φερόμενον. δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ α ε ποτὶ τὰν α δ, ὃν ἁ θ κ ζ περιφέρεια ποτὶ τὰν θ κ η περιφέρειαν. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἔξω ἐν τοῖς πρώτοις. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ εἴκα ἁ ἑτέρα τᾶν ποτιπιπτουσᾶν ἐπὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος ποτιπίπτῃ, τὸ αὐτὸ συμβαίνει.

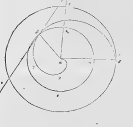


ιε. Εἴκα ποτὶ τὰν ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ἕλικα ποτιπιπτόντωντι εὐθεῖαι ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον αἱ εὐθεῖαι ποτ' ἀλλάλας, ὃν αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας λαμβανομένας. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς ἁ α β γ δ θ, ἁ μὲν α β γ δ θ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἁ δὲ θ λ ε μ ἐν τᾷ δευτέρᾳ. καὶ ποτιπιπτόντωντι εὐθεῖαι αἱ α ε, α λ. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ α λ ποτὶ τὰν α ε, ὃν ἁ θ κ ζ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, πρὸς θ κ η μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας. ἐν ὅσῳ γὰρ χρόνῳ τὸ α σημεῖον ἐπὶ τᾶς εὐθείας φερόμενον, τὰν α λ γραμμὰν διαπορεύεται, καὶ τὸ θ σημεῖον ἐπὶ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας φερόμενον, ὅλαν τε τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, καὶ ἔτι τὰν θ κ ζ περιφέρειαν διαπορεύεται, καὶ πάλιν τὸ α σημεῖον τὰν α ε εὐθεῖαν ἐπὶ τὸ ε, ὅλαν τε τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν. καὶ ἔτι τὰν θ κ η ἑκάτερον ἰσοταχέως αὐτὸ αὐτῷ φερόμενον. δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ α λ γραμμὰ ποτὶ τὰν α ε, ὃν ἁ θ κ ζ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν θ κ η περιφέρειαν, μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας. τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται, καὶ εἴκα ποτὶ τὰν ἐν τᾷ τρίτᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ἕλικα ποτιπεσῶντι εὐθεῖαι, τὸν αὐτὸν λόγον ἑξοῦντι ποτ' ἀλλάλας, ὃν εἰρημέναι μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας δὶς λαμβανομένας. ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ποτὶ τὰς ἄλλας ἕλικας ποτιπίπτουσαι δειχθησοῦνται, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ὃν ἁ εἰρημένα περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας τοσαύτας λαμβανομένας, ὅσος ἐστὶν ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς τᾶν περιφορᾶν, καὶ εἴκα ἁ ποτιπίπτουσα ἁ ἑκατέρα ποτὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος πίπτῃ.



Εἴκα

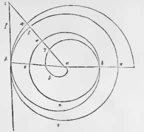
Εἴκα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ, καὶ ἀπὸ τᾶς ἁφᾶς εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιζευχθῇ ἐπὶ τὸ σημεῖον, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἃς ποιεῖ γωνίας ἁ ἐφαπτομένα ποτὶ ταῖν ἐπιζευχθεῖσαν ἄνισοι ἐσσοῦνται, καὶ ἁ μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις ἀμβλεῖα, ἁ δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ὀξεῖα. ἔστω ἕλιξ ἐφ᾽ ἇς τὰ αβγδθ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα. καὶ ἔστω τὸ μὲν α σημεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ αθ εὐθεῖα ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. ὅ τε πρῶτος κύκλος, ὁ θκη. ἐπιψαυέτω δέ τις εὐθεῖα γραμμὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δεζ κατὰ τὸ δ. καὶ ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὸ α ἐπεζεύχθω ἁ δα. δεικτέον ὅτι ἁ δζ ποτὶ ταῖν αδ ἀμβλεῖαν ποιεῖ γωνίαν. γεγράφθω κύκλος ὁ δτν, κέντρον μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αδ. ἀναγκαῖον δὴ τούτου τοῦ κύκλου τὰν μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις περιφέρειαν ἐντὸς πίπτειν τᾶς ἕλικος, τὰν δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ἐκτός, διὰ τὸ τὰν ἀπὸ τοῦ α ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπιπτούσας εὐθείας. τᾶς μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις μείζονας εἶμεν τᾶς αδ, τᾶς δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ἐλάσσονας. ὅτι μὲν οὖν ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τῶν αδζ οὐκ ἐστιν ὀξεῖα, δῆλον. ἐπεὶ δὴ μείζων ἐστὶ τᾶς τοῦ ἡμικυκλίου. ὅτι δὲ ὀρθὰ οὐκ ἐστι, δεικτέον ουτ. ἔστω γὰρ δυνατὸν ὀρθά. ἁ ἄρα εδζ ἐπιψαύει τοῦ δτν κύκλου. δυνατὸν δή ἐστιν ἀπὸ τοῦ α ποτιβαλεῖν εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας εὐθεῖαν, ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, τοῦ ὃν ἔχει ἁ μεταξὺ τᾶς ἁφᾶς καὶ τᾶς ποτιπιπτούσας περιφερείας, ποτὶ τὰν δοθεῖσαν περιφέρειαν.



ποτιπιπτέτω δὴ ἁ αι. τέμνει δὴ αὐτὰ τὰν μὲν ἕλικα κατὰ τὸ λ. τὰν δὲ τοῦ δντ περιφέρειαν κύκλου κατὰ τὸ ρ. καὶ ἐχέτω ἁ ρι εὐθεῖα ποτὶ τὰν αρ ἐλάσσονα λόγον, τοῦ ὃν ἔχει ἁ δρ περιφέρεια ποτὶ ταῖν δντ περιφέρειαν. καὶ ὅλα ἄρα ἁ ια ποτὶ τὰν αρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ ρδντ περιφέρεια ποτὶ ταῖν δντ περιφέρειαν. τουτέστιν, ὃν ἔχει ἁ σηκθ περιφέρεια ποτὶ τὰν ηκθ περιφέρειαν. ὃν δὲ ἁ σηκθ περιφέρεια ποτὶ τὰν ηκθ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ αλ εὐθεῖα ποτὶ τὰν αδ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ αι ποτὶ τὰν αρ, ἤπερ ἁ λα ποτὶ τὰν αδ, ὅπερ ἀδύνατον. ἴσα γὰρ ἁ ρα τᾷ αδ. οὐκ ἄρα ἐστιν ὀρθὰ ἁ περιεχομένα ὑπὸ τῶν αδζ. δέδεικται δέ, ὅτι οὐδὲ ὀξεῖα. ἀμβλεῖα ἄρα ἐστίν. ὥστε ἁ λοιπὰ ὀξεῖα ἐστίν. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ εἴκα ἁ ἐπιψαύουσα τᾶς ἕλικος κατὰ τὸ πέρας ἐπιψαύῃ, τὸ αὐτὸ συμβήσεται.

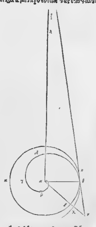
Καὶ τοίνυν εἴκα τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ ἁ εὐθεῖα, τὸ αὐτὸ συμβήσεται. ἐπιψαυέτω γὰρ ἁ εζ εὐθεῖα τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος κατὰ τὸ δ, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευαζέσθω. ὁμοίως δὴ τᾶς τοῦ ρνδ περιφερείας κύκλου, τὰ μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις τᾶς ἕλικος ἐντὸς πεσοῦνται, τὰ δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ἐκτός. ἁ οὖν γωνία, ἁ ὑπὸ ταῖν αδζ, οὐκ ἐστιν ὀρθά, ἀλλὰ ἀμβλεῖα. ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν ὀρθά. ἐπιψαύσει δὴ ἁ εζ τοῦ ρνδ κύκλου κατὰ τὸ δ. ἄχθω δὴ πάλιν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν ἁ αι. καὶ τεμνέτω τὰν μὲν ἕλικα κατὰ τὸ χ, τὰν δὲ τοῦ ρνδ κύκλου περιφέρειαν κατὰ τὸ ρ. ἐχέτω δὲ ἁ ρι πρὸς ρα ἐλάσσονα λόγον, τοῦ ὃν ἔχει ἁ δρ περιφέρεια ποτὶ ὅλαν τὰν τοῦ δρν κύκλου περιφέρειαν, καὶ ποτὶ τὰν δντ. δέδεικται γὰρ τοῦτο δυνατὸν ἐόν. καὶ ὅλα ἄρα ἁ ια ποτὶ τὰν αρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ ρδντ περιφέρεια μεθ᾽ ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν δντ περιφέρειαν, μεθ᾽ ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας. ἀλλ᾽ ὃν λόγον ἔχει ἁ ρδντ περιφέρεια μεθ᾽ ὅλας τᾶς τοῦ δντρ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν δντ περιφέρειαν, μεθ᾽ ὅλας τᾶς τοῦ δντρ κύκλου περιφερείας, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἁ σηκθ περιφέρεια, μεθ᾽ ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας τᾶς θσηκ, ποτὶ τὰν ηκθ περιφέρειαν, μεθ᾽ ὅλας τᾶς τοῦ

θ σ η κ κύκλου περιφερείας. ὃν δὲ λόγον ἔχουσιν αἱ ὕστερον εἰρημέναι περιφέρειαι, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἁ χ α εὐθεῖα ποτὶ τὰν α δ εὐθεῖαν. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ι α ποτὶ τὰν α ρ, ἢ ἁ χ α ποτὶ τὰν α δ, ὅπερ ἀδύνατον. ἴση μὲν γὰρ ἁ ρ α τῇ α δ, μείζων δὲ ἁ ι α τῆς α χ. δῆλον οὖν ὅτι ἀμβλεῖα ἐστὶν ἁ περιεχομένα ὑπὸ τῶν α δ ζ. ὥστε ἁ λοιπὰ ὀξεῖα ἐστί. τὰ δ᾽ αὐτὰ συμβήσεται, καὶ εἴκα ἁ ἐπιψαύουσα ἐπὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος ἐπιψαύῃ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ εἴκα τᾶς ἐν ὁποιᾳοῦν γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα, καὶ εἴκα ἐπὶ τὸ πέρας αὐτᾶς, ὅτι αὐτὰ ποιήσει τὰς γωνίας ποτὶ τὰν ἀπὸ τᾶς ἀφᾶς ἐπιζευχθεῖσαν ἐπὶ



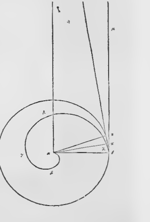
τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, καὶ τὰν μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις ἀμβλεῖαν, τὰν δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις, ὀξεῖαν.

ιε Εἴκα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ, ἐπὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου, ὅ ἐστιν ἐν ἀρχᾷ τᾶς ἕλικος ποτ᾽ ὀρθὰς ἀχθῇ τις τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, ἁ ἀχθεῖσα συμπεσεῖται τᾷ ἐπιψαυούσᾳ. καὶ ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, ἴσα ἐσσεῖται τᾷ τοῦ πρώτου κύκλου περιφερείᾳ. ἔστω ἕλιξ ἁ α β γ δ. ἔστω δὲ τὸ α σημεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος. ἁ δὲ θ α γραμμὰ ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. ὁ δὲ θ η κ κύκλος ὁ πρῶτος. ἐπιψαυέτω δέ τις τᾶς ἕλικος κατὰ τὸ θ, ἁ θ ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ α ἄχθω ποτ᾽ ὀρθὰς τᾷ θ α, ἁ α ζ. συμπεσεῖται δὴ αὐτᾷ ποτὶ τὰν θ ζ. ἐπεὶ αἱ ζ θ, θ α ὀξεῖαν γωνίαν περιέχουσιν. συμπιπτέτω κατὰ τὸ ζ. δεικτέον ὅτι ἁ ζ α ἴσα ἐστὶ τᾷ τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείᾳ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἐστίν, ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον εἰ δυνατόν, μείζων. ἔλαβον δή τινα εὐθεῖαν τὰν λ α, τᾶς μὲν ζ α εὐθείας ἐλάσσονα, τᾶς δὲ τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας μείζονα. ἐστὶ δὴ κύκλος τις ὁ θ η κ. καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ θ κ. καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ θ α πρὸς α λ, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς κ θ, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ α κάθετον ἐπ᾽ αὐτὰν ἀγμέναν. διότι καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ θ α πρὸς α ζ. δυνατὸν οὖν ἐστίν, ἀπὸ τοῦ α προσλαβεῖν ποτὶ τὰν τὰν ἐκβεβλημέναν τὰν α ν. ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας τὰν ν ρ, πρὸς θ ρ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἁ θ α ποτὶ τὰν α λ. ἕξει οὖν ἁ ν ρ, ποτὶ τὰν ρ α λόγον, ὃν ἁ θ ρ εὐθεῖα ποτὶ τὰν α λ. ἁ δὲ θ ρ ποτὶ τὰν α λ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ θ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ θ κ κύκλου περιφέρειαν. ἁ μὲν γὰρ θ ρ εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς θ ρ περιφερείας. ἁ δὲ α λ εὐθεῖα τᾶς τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας μείζων. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἕξει καὶ ἁ ν ρ πρὸς ρ α, ἢ ἁ θ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ θ η κ κύκλου περιφέρειαν. καὶ ὅλα συνθέντι ἁ ν α ποτὶ τὰν α ρ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἁ θ ρ περιφέρεια μεθ᾽ ὅλας τᾶς τοῦ κύ-



τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν τοῦ θ η κ κύκλου περιφέρειαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ θ ρ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν τοῦ θ η κ κύκλου περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει α χ α ποτὶ τὸν α θ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ν α ποτὶ τὰν α ρ, ἤπερ ἁ χ α ποτὶ τὰν α θ, ὅπερ ἀδύνατον. ἁ μὲν γὰρ ν α μείζων ἐστὶ τᾶς α χ. ἁ δὲ α ρ ἴσα ἐστὶ τᾷ θ α. οὐκ ἄρα μείζων ἁ ζ α τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, τοῦ θ η κ.

Ἔστω δὴ πάλιν, εἰ δυνατὸν, ἐλάσσων ἁ ζ α τᾶς τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας. ἐλάβομεν δή τινα εὐθεῖαν πάλιν τὰν α λ, τᾶς μὲν α ζ μείζονα, τᾶς δὲ τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας ἐλάσσονα. καὶ ἄγω ἀπὸ τοῦ θ τὰν θ μ παράλληλον τᾷ α ζ. πάλιν οὖν κύκλος ἐστὶν ὁ θ η κ. καὶ ἐν αὐτῷ ἐλάσσων γραμμὰ τᾶς διαμέτρου ἁ θ κ. καὶ ἄλλα ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου κατὰ τὸ θ, καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ α θ ποτὶ τὰν α λ, ἐλάσσων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς κ θ, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν. ἐπειδὴ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ θ α πρὸς α ζ, ἐλάσσων ἐστί. δυνατὸν οὖν ἐστιν ἀπὸ τοῦ α ἀγαγεῖν τὰν α π ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, ὥστε τὰν ρ ν τὰν μεταξὺ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ εὐθείας, καὶ τᾶς περιφερείας ποτὶ τὰν θ π, ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας, τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ θ α ποτὶ τὰν α λ. τεμεῖ δὴ ἁ α π τὸν μὲν κύκλον κατὰ τὸ ρ, τὰν δὲ ἕλικα κατὰ τὸ χ. καὶ ἕξει καὶ ἐναλλὰξ τὸν αὐτὸν λόγον ἁ ν ρ πρὸς ρ α, ὃν ἁ θ π πρὸς α λ. ἁ δὲ θ π ποτὶ τὰν α λ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ θ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ θ η κ κύκλου περιφέρειαν. ἁ μὲν γὰρ θ π εὐθεῖα μείζων ἐστὶ τᾶς θ ρ περιφερείας, ἁ δὲ α λ ἐλάσσων τᾶς τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ν ρ ποτὶ τὰν α ρ, ἢ ἁ θ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ θ η κ κύκλου περιφέρειαν. ὥστε καὶ ἁ ρ α ποτὶ τὰν α ν μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ τοῦ θ η α κύκλου περιφέρεια ποτὶ τὰν θ κ ρ περιφέρειαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ τοῦ θ η κ κύκλου περιφέρεια ποτὶ τὰν θ κ ρ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ θ α εὐθεῖα ποτὶ τὰν α χ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ρ α ποτὶ τὰν α ν, ἢ ἁ α θ ποτὶ τὰν α χ. ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν, οὐδὲ ἐλάσσων ἁ ζ α τᾶς τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας. ἴση ἄρα.

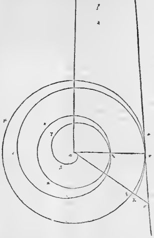


ιθ

Εἰ δὲ κατὰ τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος κατὰ τὸ πέρας ἐπιψαύει εὐθεῖα, καὶ ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἀχθῇ τις ποτ' ὀρθὰς τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, συμπεσεῖται αὐτᾷ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, καὶ ἐσσεῖται ἁ εὐθεῖα ἁ μεταξὺ τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, διπλασία τᾶς τοῦ δευτέρου κύκλου περιφερείας. ἔστω γὰρ ἁ μὲν α β γ θ ἕλιξ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἁ δὲ θ ε τ ἐν τᾷ δευτέρᾳ. καὶ ὁ μὲν θ η κ κύκλος ὁ πρῶτος, ὁ δὲ τ μ ν ὁ δεύτερος. ἔστω δέ τις γραμμὰ ἐπιψαύουσα τᾶς ἕλικος κατὰ τὸ τ, ἁ τ ζ. ἁ δὲ ζ α ποτ' ὀρθὰς ἄχθω τᾷ τ α. συμπεσεῖται δὲ τὰ αὐτὰ τᾷ τ ζ, διὰ τὸ δεδεῖχθαι τὰν γωνίαν ὀξεῖαν οὖσαν τὰν ὑπὸ τῶν α τ ζ. δεικτέον ὅτι ἁ ζ α εὐθεῖα διπλασία ἐστὶ τᾶς τοῦ τ μ ν κύκλου περιφερείας. εἰ γὰρ μή ἐστι διπλασία, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ διπλασία, ἢ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασία. ἔστω πρότερον εἰ δυνατὸν μείζων ἢ διπλασία. καὶ λελάφθω τις εὐθεῖα, ἁ λ α τᾶς μὲν ζ α εὐθείας ἐλάσσων, τᾶς δὲ τοῦ τ μ ν κύκλου περιφερείας μείζων ἢ διπλασία, ἐστὶ δή τις κύκλος ὁ τ μ ν, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γεγραμμένα

 ἐλάσσων

ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ τν. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ τα ποτὶ τὰν αλ, μείζονα τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς τν ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ α κάθετον ἐπὶ αὐτὰν ἀγομέναν. δυνατὸν οὖν ἐστιν ἀπὸ τοῦ α ποτιβαλεῖν τὰν ασ, ποτὶ τὰν τν ἐκβεβλημέναν,

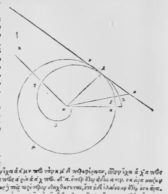


ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας, ταν ρσ ποτὶ τὰν τρ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἁ τα ποτὶ τὰν αλ. τέμνει δὴ ἁ ασ τὰν μὲν κύκλον κατὰ τὸ ρ, τὰν δὲ ἕλικα κατὰ τὸ χ. καὶ ἐναλλάξ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ ρσ ποτὶ τὰν τα, ὃν ἁ τρ ποτὶ τὰν αλ. ἁ δὲ τρ ποτὶ τὰν αλ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ τρ περιφέρεια ποτὶ τὰν διπλασίαν τοῦ μν κύκλου περιφέρειαν. ἔστι γὰρ ἁ μὲν τρ εὐθεῖα ἐλάσσων τᾶς τρ περιφερείας. ἁ δὲ αλ εὐθεῖα μείζων ἢ διπλασία τᾶς τοῦ τμν κύκλου περιφερείας. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ρσ ποτὶ τὰν αρ, ἢ ἁ τρ περιφέρεια ποτὶ τὰν διπλασίαν τᾶς τοῦ τμν κύκλου περιφερείας. ὅλα οὖν ἁ σα ποτὶ τὰν αρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ τρ περιφέρεια μετὰ τᾶς τμν κύκλου περιφερείας δὶς ἐσσουμένας, ποτὶ τὰν τοῦ τμν κύκλου περιφέρειαν δὶς ἐσσουμέναν. ὃν δὲ λόγον ἔχοντι αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἁ χα ποτὶ τὰν ατ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἁ ασ ποτὶ τὰν αρ, ἢ ἁ χα ποτὶ τὰν τα, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ἢ διπλασία ἁ ζα εὐθεῖα τᾶς τοῦ τμν κύκλου περιφερείας. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων ἢ διπλασία. δῆλον οὖν, ὅτι διπλασία ἐστί. διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δεικτέον. καὶ εἴκα τᾶς ἐν ὁποιαοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύει τις εὐθεῖα κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, καὶ ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ποτ᾽ ὀρθὰς ἀχθεῖσα τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς συμπίπτῃ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, τοῦ κατὰ τὸν ἀριθμὸν τᾶς περιφορᾶς λεγομένου τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ.

κ Εἴκα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ μὴ κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, ἀπὸ δὲ τᾶς ἁφᾶς ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ, καὶ κέντρῳ μὲν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς ἕλικος, διαστήματι δὲ τᾷ ἐπιζευχθείσᾳ κύκλος γραφῇ, ἀπὸ δὲ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἀχθῇ τις ποτ᾽ ὀρθὰς, τᾷ ἀπὸ τᾶς ἁφᾶς ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἐπιζευχθείσᾳ συμπεσεῖται αὐτᾷ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, καὶ ἐσσεῖται ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς τε συμπτώσιος καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἴσα τᾷ περιφερείᾳ τοῦ γραφέντος κύκλου τᾷ μεταξὺ τᾶς ἁφᾶς καὶ τᾶς τομᾶς, καθ᾽ ὃ τέμνει ὁ γραφεὶς κύκλος τὰν ἀρχὰν τᾶς περιφορᾶς ἐπὶ τὰ προαγούμενα λαμβανομένας τᾶς περιφερείας ἀπὸ τοῦ σημείου τοῦ ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς. ἔστω ἕλιξ ἐφ᾽ ἇς ἁ αβγδ ἐν τᾷ πρώτᾳ γεγραμμένα, καὶ ἐπιψαυέτω τις αὐτᾶς εὐθεῖα ἁ δεζ κατὰ τὸ δ. ἀπὸ δὲ τοῦ δ ποτὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἐπιζεύχθω ἁ αδ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αδ κύκλος γεγράφθω, ὁ δμν. τεμνέτω δὲ οὗτος τὰν ἀρχὰν τᾶς περιφορᾶς κατὰ τὸ κ. ἄχθω δὲ ἁ ζα ποτὶ τὰν αδ ὀρθά. ὅτι μὲν οὖν αὐτᾷ συμπίπτει, δῆλον, ὅτι δὲ καὶ ἴσα ἐστὶν ἁ ζα εὐθεῖα τᾷ κμν δ περιφερείᾳ, δεικτέον. εἰ γὰρ

μὴ

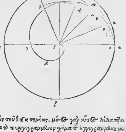
μὴ, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω εἰ δυνατὸν, πρότερον μείζων. λελάφθω δέ τις ἁ κα τᾶς μὲν ζα εὐθείας ἐλάσσων, τᾶς δὲ κμν δ περιφερείας μείζων. πάλιν δὴ κύκλος ἐστὶν ὁ κμν, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ δν. καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ δα πρὸς αλ, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμισέα τᾶς δν, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν. δυνατὸν οὖν ἐστιν ἀπὸ τοῦ α ποτιβαλεῖν τὰν αε ποτὶ τὰν νδ ἐκβεβλημέναν, ὥστε τὰν ερ ποτὶ τὰν δρ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἁ δα ποτὶ τὰν αλ. δέδεικται γὰρ τοῦτο δυνατὸν ἐόν. ἕξει οὖν καὶ ἁ ερ ποτὶ τὰν αρ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ δρ ποτὶ τὰν αλ. ἁ δὲ δρ ποτὶ τὰν αλ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ δρ περιφέρεια ποτὶ τὰν κμδ περιφέρειαν, ἐπεὶ ἁ μὲν δρ ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς δρ περιφερείας, ἁ δὲ αλ μείζων τᾶς κμδ περιφερείας. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἕξει ἁ ερ εὐθεῖα πρὸς ρα, καὶ ἁ δρ περιφέρεια ποτὶ τὰν κμδ περιφέρειαν, ὥστε καὶ ἁ αε πρὸς αρ ἐλάσσονα λόγον ἕξει, ἢ ἁ κμρ περιφέρεια πρὸς κμδ περιφέρειαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ κμν πρὸς τὰν κμδ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ χα πρὸς αδ. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἡ εα πρὸς αρ, ἢ ἁ αχ πρὸς δα. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἁ ζα τᾶς κμδ περιφερείας. ὁμοίως δὲ τοῖς πρότερον δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων ἐστίν. ἴση ἄρα. δὲ τῷ αὐτῷ τρόπῳ δειχθήσεται, καὶ εἴκα τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ εὐθεῖα μὴ ἐπὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, τὰ δὲ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευασθῇ, ὅτι ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν συμπιπτούσας, ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, ἴσα ἐστὶν ὅλᾳ τᾷ τοῦ γραφέντος κύκλου περιφερείᾳ, καὶ ἔτι τᾷ μεταξὺ τῶν εἰρημένων σαμείων ὡσαύτως τᾶς περιφερείας λαμβανομένας. καὶ εἴκα τᾶς ἐν ὁποιᾳοῦν γεγραμμένας περιφορᾷ ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα μὴ ἐπὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, τὰ δὲ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευασθέωντι, ὅτι ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τῶν εἰρημένων σαμείων πολλαπλασία τίς ἐστι τᾶς τοῦ γραφέντος κύκλου περιφερείας, κατὰ τὸν ἐλάσσονα ἀριθμὸν τοῦ καθ' ὃν αἱ περιφοραὶ λέγονται, καὶ ἔτι ἴσα τᾷ μεταξὺ τῶν εἰρημένων σαμείων ὁμοίως λαμβανομένας.



κα

Λαβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος, τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς πρώτας ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, δυνατόν ἐστι περὶ αὐτὸ σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς ἁ αβγδ, ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα. ἔστω δὲ ἀρχὰ μὲν τᾶς ἕλικος τὸ θ σημεῖον, ἀρχὰ δὲ τᾶς περιφορᾶς ἁ θα. ὁ δὲ πρῶτος κύκλος ὁ ζηια, αἱ δὲ αη, ζι διάμετροι αὐτοῦ πρὸς ὀρθὰς ἀλλάλαις. ἀεὶ δὲ τᾶς ὀρθᾶς γωνίας δίχα τεμνομένας, καὶ τοῦ τομέως τοῦ τὰν ὀρθὰν γωνίαν περιέχοντος ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον τοῦ τομέως ἔλασσον τοῦ προτεθέντος. καὶ ἔστω γεγενημένος ὁ τομεὺς ὁ αθκ ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος χωρίου. διῃρήσθωσαν δὴ οὖν γωνίαι αἱ τέσσαρες ὀρθαὶ εἰς τὰς ἴσας γωνίας τᾷ περιεχομένᾳ ὑπὸ τῶν αθ, θκ. καὶ αἱ ποιοῦσαι τὰς γωνίας εὐθεῖαι ἐπὶ τὰν ἕλικα ἄχθωσι. καθ' ὃ δὴ τέμνει σαμεῖον ἁ θκ τὰν ἕλικα, ἔστω τὸ λ. καὶ κέντρῳ τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θλ κύκλος γεγράφθω. πεσεῖται δὴ αὐτοῦ, ἁ μὲν εἰς τὰ προαγομένα περιφέρεια ἐντὸς τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ εἰς τὰ ἑπόμενα ἐκτός. γεγράφθω δὴ ἁ περιφέρεια, καὶ συμπεσεῖται τᾷ θα καθ' ὃ συμπίπτει τᾷ θα κατὰ τὸ ο, σμ. καὶ τᾷ μετὰ τὰν θκ εὐθείαν ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπιπτούσᾳ. πάλιν δὴ ἐν καθ' ὃ τέμνει τὰν ἕλικα σαμεῖον ἁ θμ, ἔστω τὸ ν. καὶ κέντρῳ τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θν κύκλος γεγράφθω.

γράφθω. ἔσται καὶ συμπίπτῃ ἁ περιφέρεια τοῦ κύκλου, καὶ τὰ μετὰ τὰν θμ ποτὶ πίπτουσα ποτὶ τὰν ἕλικα. ὁμοίως δὲ καὶ διὰ τῶν ἄλλων πάντων κατατέμνοντι τὰν ἕλικα, αἱ τὰς ἴσας γωνίας ποιοῦσαι κύκλοι γεγράφθωσαν κέντρῳ τῷ θ, διὰ τῶν συμπίπτει ἑκάστας ἁ περιφέρεια τᾶτε προειρημέναις εὐθείαις, καὶ τᾶ ἑπομένα. ἔσται δὴ περὶ τὸ λαφθὲν χωρίον περιγεγραμμένον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, καὶ ἄλλο ἐγγεγραμμένον. ὅτι δὲ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζόν ἐστιν, ἐλάσσονι τοῦ προτεθέντος χωρίου δειχθήσεται. ἐστὶ γὰρ ὁ μὲν θλ τομεὺς ἴσος τῷ θμλ. ὁ δὲ θν τῷ θνρ. ὁ δὲ θχ τῷ θχτ. ἐστὶ δὲ καὶ τῶν ἄλλων τομέων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, ἴσος τῷ κοινὰν ἔχοντι πλευρὰν τομεῖ, τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τομέων. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ πάντες οἱ τομεῖς πάντεσσιν ἴσοι ἐσσοῦνται. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ χωρίῳ τῷ



περιγεγραμμένῳ περὶ τὸ χωρίον σχήματι, χωρὶς τοῦ θακ τομέως. μόνος γὰρ οὗτος λέλειπται τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι. δῆλον οὖν ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζόν ἐστι τῷ ακθ τομεῖ, ὅς ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ προτεθέντος.

Ἐκ τούτου δὲ φανερὸν, ὅτι δυνατόν ἐστι περὶ τὸ εἰρημένον χωρίον σχῆμα, οἷον εἴρηται, γράψαι ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον εἶναι τοῦ χωρίου ἐλάσσονι εἶμεν παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου καὶ πάλιν ἐγγράψαι, ὥστε τὸ χωρίον ὁμοίως μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος, ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

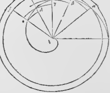
κβ Λαβόντες τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς ἕλικος, τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας ἅ ἐστι δευτέρα τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, δυνατόν ἐστι περὶ τὸ αὐτὸ σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι, ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον. καὶ ἄλλο ἐγγράψαι, ὥστε τὸ περιγραφὲν τοῦ ἐγγραφέντος μεῖζον εἶμεν, ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἔστω ἕλιξ ἐφ᾽ ἇς ἁ αβγδε, ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα. καὶ ἔστω τὸ μὲν θ σαμεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος. τὸ δὲ α ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. ἁ δὲ εα ἁ δευτέρα εὐθεῖα τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς. ὁ δὲ αζηι κύκλος ἔστω δεύτερος, καὶ αἱ γη, ζι διάμετροι αὐτοῦ ποτ᾽ ὀρθὰς ἀλλάλαις. πάλιν οὖν δίχα τεμνομένας τᾶς ὀρθᾶς γωνίας καὶ τοῦ τομέως τοῦ τὰν ὀρθὰν γωνίαν περιέχοντος, ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον ἐλάσσον τοῦ προτεθέντος. καὶ ἔστω γεγενημένος ὁ θκα τομεύς.



τομεὺς, ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος χωρίου. διαιρεθεισᾶν δὴ τὰν ὀρθὰν γωνίαν εἰς τὰς ἴσας γωνίας, τὰ ὑπὸ τῶν κ θ α, καὶ τῶν ἄλλων κατασκευασθέντων ἐπὶ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, ἐσσεῖται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος μεῖζον ἐλάσσονι, ἢ ὁ τομεὺς ὁ θ κ α. μείζων γὰρ ἐσσεῖται ἁ ὑπεροχὰ ἃ ὑπερέχει ὁ θ κ α τομεὺς τοῦ θ ε ρ. δῆλον οὖν ὅτι δυνατόν ἐστι καὶ τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ λαφθέντος χωρίου μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. καὶ πάλιν τὸ λαφθὲν χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος τοῦ προτεθέντος χωρίου.

Διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου φανερόν, διότι δυνατόν λαβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν ὁποιαοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν λεγομένας περιγράψαι σχῆμα, οἷον εἴρηται ἐπίπεδον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ λαφθέντος χωρίου ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου, καὶ πάλιν ἐγγράψαι, ὥστε τὸ λαφθὲν χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

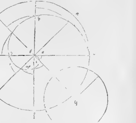
Λαβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος, ἅ ἐστιν ἐλάσσων τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας, οὐκ ἐχούσας πέρας τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, καὶ τᾶν εὐθειᾶν τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς ἕλικος ἀγομέναν, δυνατόν ἐστι περὶ τὸ χωρίον σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἔστω ἕλιξ ἐφ᾽ ἇς ἁ α β γ δ ε, πέρατα δὲ αὐτᾶς τὰ α ε. ἔστω δὲ ἀρχὰ τᾶς ἕλικος τὸ θ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α θ, θ ε. γεγράφθω δὴ κύκλος, κέντρον μὲν τὸ θ, διάστημα δὲ τὸ θ α. καὶ συμπιπτέτω τᾷ θ ε ἐπὶ τὸ ζ. ἀεὶ δὲ τᾶς γωνίας τᾶς ποτὶ τὸ θ καὶ τοῦ τομέως τοῦ θ α δίχα τεμνομένων ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον τοῦ προτεθέντος ἔλασσον. ἔστω ἐλάσσων ὁ τομεὺς ὁ θ α κ προτεθέντος. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον γεγράφθωσαν κύκλοι διὰ τῶν σαμείων κατὰ τὰ τέμνοντι τὰν ἕλικα αἱ τὰς ἴσας γωνίας ποιοῦσαι ποτὶ τῷ θ. ὥστε τὰν περιφέρειαν ἑκάστα συμπίπτειν τᾷ τε προαγομένᾳ καὶ τᾷ ἑπομένᾳ. ἐσσεῖται δὴ τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶν α θ, θ ε εὐθειᾶν περιγεγραμμένον σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον. καὶ ἄλλο ἐγγεγραμμένον. καὶ τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἐλάσσων γάρ ἐστιν ὁ θ α κ τομεύς. ἐκ τούτου φανερόν ἐστιν, ὅτι δυνατόν ἐστι περὶ τὸ εἰρημένον χωρίον ἐπίπεδον, οἷον εἴρηται, περιγράψαι, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.



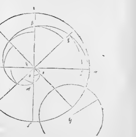
Το περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς πρώτας τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κύκλου τοῦ πρώτου. ἔστω ἕλιξ, ἐφ᾽ ἇς ἁ α β γ δ ε θ, ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα. ἔστω δὲ τὸ μὲν θ σαμεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος. ἁ δὲ θ α εὐθεῖα πρώτα ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς. ὁ δὲ α κ ζ η ι κύκλος πρῶτος, οὗ τρίτον μέρος ἔστω ἐν ᾧ σ κύκλος. δεικτέον ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ προειρημένον χωρίον τῷ ἴσῳ κύκλῳ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μεῖζον ἐστὶν ἢ ἔλασσον. ἔστω πρότερον εἰ δυνατὸν ἔλασσον. δυνατὸν δή ἐστι περὶ τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε θ ἕλικος, καὶ τᾶς α θ εὐθείας περιγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων. ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ὁ ἴσος κύκλος τοῦ εἰρημένου χωρίου. περιγεγράφθω δή, καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ εἰρημένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θ α κ, ἐλάχιστος δὲ ὁ θ ε ο. δῆλον οὖν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν δὲ εὐθεῖαι πρὸς τὸ θ, ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας ἔστε ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν πεσοῦντι. ἐντὶ δή τινες γραμμαὶ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, ὧν ἐστι μεγίστα μὲν ἁ θ α, ἐλαχίστα δὲ ἁ θ ε. καὶ ἐλαχίστα

ἴσα

ἴσα τᾷ ὑπεροχᾷ. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι τινὲς γραμμαὶ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ποτιπίπτουσαι, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ πασᾶν ὅμοιοι τομέες, ἀπό τε τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, καὶ ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ. οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ, ἐλάσσονές ἐντι, ἢ τριπλάσιοι τῶν τομέων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐντὶ δὲ οἱ τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ ἴσοι τῷ αζηι κύκλῳ. οἱ δὲ τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, ἴσοι τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι. ἐλάσσων ἄρα ὁ αζηι κύκλος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος, ἢ τριπλασίων, τοῦ δὲ ϛ κύκλου τριπλασίων. ἐλάσσων ἄρα ὁ ϛ κύκλος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἐστὶ δέ, ἀλλὰ μείζων. οὐκ ἄρα ἐστὶ τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς αβγδεθ ἕλικος, καὶ τᾶς αθ, ἔλασσον τοῦ ϛ χωρίου.

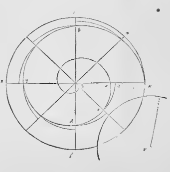


Οὐδὲ τοίνυν μεῖζον. ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν μεῖζον. ἐστὶ δὴ πάλιν δυνατὸν εἰς τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς αβγδθ ἕλικος, καὶ τᾶς αθ εὐθείας ἐγγράψαι σχῆμα, ὥστε τὸ εἰρημένον χωρίον τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει τὸ εἰρημένον χωρίον τοῦ ϛ κύκλου. ἐγγεγράφθω δή, καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θρξ, ἐλάσσων δὲ ὁ θε. δῆλον οὖν, τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐστὶ τοῦ ϛ κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν δὴ αἱ ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας ποτὶ τῷ θ, ἔστ' ἂν ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν πεσῶντι. πάλιν οὖν ἐντί τινες γραμμαὶ τῷ ἴσῳ * ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ, καὶ ἀναγεγράφονται ἀπὸ πασᾶν ὅμοιοι τομέες, ἀπό τε τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, καὶ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ, μείζονες ἐντὶ ἢ τριπλάσιοι τῶν τομέων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐντὶ δὲ οἱ μὲν τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ ἴσοι τῷ αζηι κύκλῳ, οἱ δὲ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ὑπὸ τᾶς μεγίστας, ἴσοι τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. μείζων ἄρα ὁ αζηι κύκλος, ἢ τριπλασίων τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, τοῦ δὲ ϛ κύκλου τριπλασίων. μείζων ἄρα ἐστὶ μὲν ὁ ϛ κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἐστὶ δέ, ἀλλὰ ἐλάσσων. οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ μεῖζον τὸ χωρίον, τὸ ὑπό τε τᾶς αβγδεθ ἕλικος, καὶ τᾶς αθ εὐθείας, τοῦ ϛ κύκλου. ἴσον ἄρα ἐστὶ τῷ περιλαφθέντι ὑπὸ τᾶς ἕλικος, καὶ τᾶς αθ εὐθείας.



Χωρίον

Χωρίου ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς κ δευτέρας τῶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς ποτὶ τὸν δεύτερον κύκλον, ὅσπερ ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὰ ἑπτὰ ποτὶ τὰ ιβ, ὅς ἐστι ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὰ συναμφότερα, τό τε περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ β κύκλου, καὶ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α κύκλου, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ β κύκλου, τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α κύκλου, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ β κύκλου. ἔστω δὲ τὸ μὲν θ σημεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ θε εὐθεῖα ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς ἁ πρώτα, ἁ δὲ αε ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς ἁ δευτέρα. ὁ δὲ κύκλος ὁ αζηι ὁ δεύτερος ἔστω. καὶ αἱ αη, ιζ διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις. δεικτέον ὅτι τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς αβγδε θ ἕλικος, καὶ τᾶς αε εὐθείας ποτὶ τὸν αζηι κύκλον, λόγον ἔχει, ὃν τὰ ἑπτὰ πρὸς ιβ. ἔστω δή τις κύκλος ὁ ς, ἁ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ς κύκλου δυναμένα τό τε ὑπὸ τῶν αθ, θε περιεχόμενον, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς αε τετραγώνου. ἕξει δὴ ὁ ς κύκλος πρὸς τὸν αηζι, ὡς ἑπτὰ πρὸς ιβ. διότι καὶ ἁ ἐκ τοῦ κέντρου αὐτοῦ πρὸς τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ αζηι κύκλου



τοῦτον ἔχει δυνάμει τὸν λόγον. δειχθήσεται οὖν ἴσος ὁ ς κύκλος τῷ περιεχομένῳ χωρίῳ ὑπό τε τᾶς αβγδε ἕλικος, καὶ τᾶς αε εὐθείας. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω δὴ πρότερον, εἰ δυνατόν, μείζων. δυνατὸν δή ἐστι περὶ τὸ χωρίον γεγράφθαι σχῆμα ἐπίπεδον, ἐκ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει ὁ ς κύκλος τοῦ χωρίου. περιγεγράφθω, καὶ ἔστω ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θακ τομεύς, ἐλάχιστος δὲ ὁ θολ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ περιγραφὲν σχῆμα, ἔλασσόν ἐστι τοῦ κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ εὐθεῖαι αἱ ποιοῦσαι ποτὶ τὸ θ ἴσας γωνίας ἔστε τὰν ποτὶ ταῖς τοῦ δευτέρου κύκλου περιφέρειαν πεσῶντι. ἐντὶ δή τινες γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, αἱ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι, ὧν ἐστι μεγίστα μὲν ἁ θα, ἐλαχίστα δὲ ἁ θε. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ αἱ ἀπὸ τοῦ θ, ἔστε τὰν τοῦ αζηι κύκλου περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι, τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσων ἐσσοῦνται, τῷ δὲ μεγέθει ἀλλάλαις τε ἴσαι καὶ τᾷ μεγίστᾳ. καὶ ἀναγεγράφαται ὅμοιοι τομέες ἀπό τε τᾶν ἴσων τᾷ μεγίστᾳ, καὶ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας, ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τᾶς θα ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν αθ, θε περιεχόμενον, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς αε τετραγώνου. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐντὶ δὲ τοῖς μὲν τομεῦσι τοῖς ἀπὸ τᾶν ἴσων ἀλλάλαις καὶ τᾷ μεγίστᾳ, ἴσος ὁ αζηι κύκλος, τοῖς δὲ τομεῦσι τοῖς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας, ἴσον τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ὁ κύκλος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς αθ ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν αθ, θε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς αε τετραγώνου. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θα, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν θα, αε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς αε τετραγώνου, τοῦτον ἔχει ὁ αζηι κύκλος πρὸς τὸν ς κύκλον. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ὁ αζηι κύκλος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν ς κύκλον. ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν

ὁ ς κύκλος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ μείζων. οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ὁ ς κύκλος τοῦ χωρίου τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶς α ε εὐθείας.

Οὐδὲ τοίνυν ἐλάσσων. ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν ἐλάσσων. πάλιν δὴ δυνατόν ἐστιν εἰς τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος καὶ τᾶς α ε εὐθείας ἐγγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶς α ε εὐθείας, μεῖζον ἦμεν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει τὸ αὐτὸ χωρίον τοῦ ς κύκλου. ἐγγεγράφθω οὖν, καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θ κ ε τομεύς, ἐλάχιστος δὲ ὁ θ ε α. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζόν ἐστι τοῦ ς κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ποιοῦσαι ἴσας γωνίας πρὸς τῷ θ, ἕως τᾶς ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν πεσεῖν. πάλιν οὖν ἐντί τινες γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι,

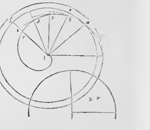


αἱ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι, ὧν μεγίστα μὲν ἁ θ α, ἐλαχίστα δὲ ἁ θ ε. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαί, αἱ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι, τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσους αὐτᾶν, τῷ δὲ μεγέθει ἴσαι ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ. καὶ ἀναγεγράφαται ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν ὅμοιοι τομέες, καὶ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ. οἱ ἄρα τομέες, οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ ποτὶ τοὺς τομέας τοὺς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας μείζονα λόγον ἔχοντι, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ α ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε περιεχόμενον ὑπό τε τᾶν α θ, θ ε, καὶ τὸ τρίτον τοῦ ἀπὸ τᾶς ε α τετραγώνου. ἐστὶ δὲ τὸ μὲν τοῖς τομεῦσι τοῖς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ὑπὸ τᾶς μεγίστας ἴσον τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ χωρίῳ, τοῖς δὲ ἑτέροις ὁ κύκλος. μείζονα οὖν λόγον ἔχει ὁ α ζ η κύκλος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν θ α, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς α ε τετραγώνου, τουτέστιν ὁ α ζ η ι κύκλος πρὸς τὸν ς κύκλον. μείζων ἄρα ἐστὶν ὁ ς κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ὅπερ ἀδύνατον. ἦν γὰρ ἐλάσσων. οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ ἐλάσσων ὁ ς κύκλος τοῦ περιεχομένου χωρίου ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶς εὐθείας, ὥστε ἴσος.

Διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δειχθήσεται, καὶ διότι τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν ὁποιαοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ταῖς περιφοραῖς λεγομένας, ποτὶ τὸν κύκλον τὸν ποτὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν λεγόμενον ταῖς περιφοραῖς λόγον ἔχει, ὃν συναμφότερον, τό τε ὑπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κύκλου, καὶ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κατὰ τὰν μιᾷ ἐλάσσονα τᾶν περιφορᾶν λεγομένου, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τῶν εἰρημένων ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τῶν εἰρημένων.

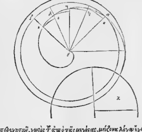
κε Τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος, ἅ ἐστιν ἐλάσσων τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας, οὐκ ἐχούσας πέρας τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, καὶ τᾶν εὐθειᾶν τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων αὐτᾶς ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἀγμενᾶν, ποτὶ τὸν τομέα τὸν ἔχοντα τὰν μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴσαν τᾷ μείζονι τᾶν ἀπὸ τοῦ πέρατος ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἀγμενᾶν, τὰν δὲ περιφέρειαν ἃ ἐστὶ με-

μεταξὺ τᾶν εἰρημένων εὐθειᾶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾷ ἕλικι, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα, τό τε περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἀγμένων. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ μείζων τῶν εἰρημένων εὐθειᾶν τᾶς ἐλάσσονος, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μείζονος τᾶς ἀπὸ τῶν περάτων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἐπιζευχθεισᾶν. ἔστω ἕλιξ ἐφ᾽ ᾇς ἁ α β γ δ ε, ἐλάσσων τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας, πέρατα δὲ αὐτᾶς ἔστω τὰ α, ε. ἔστω δὲ ἀρχὰ τᾶς ἕλικος τὸ θ σαμεῖον. καὶ κέντρῳ μὲν τὸ θ, διαστήματι δὲ τὸ θ α κύκλος γεγράφθω, καὶ συμπιπτέτω τᾷ περιφερείᾳ αὐτοῦ ἁ θ ε κατὰ τὸ ζ. δεικτέον ὅτι τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶν εὐθειᾶν τᾶν α θ, θ ε, ποτὶ τὸν τομέα τὸν α θ ζ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν α θ, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ε ζ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ α. ἔστω δὴ κύκλος, ἐν ᾧ ὁ χ, τὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων ἴσαν δυνάμει τῷ τε ὑπὸ ταν α θ, θ ε, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ε ζ, ποτὶ δὲ τὸ κέντρον αὐτοῦ γωνία ἴσα τᾷ πρὸς τῷ θ. ὁ δὴ τομεὺς ὁ χ ποτὶ τὸν τομέα τὸν θ α ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν α θ, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος

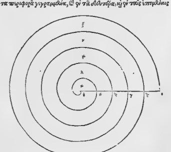


τοῦ ἀπὸ τᾶς ε ζ τετραγώνου, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θ α τετράγωνον. αἱ γὰρ ἐκ τῶν κέντρων τοῦτον ἔχοντι τὸν λόγον δυνάμει ποτ᾽ ἀλλάλας. δειχθήσεται δὴ ὁ χ τομεὺς ἴσος ὢν τῷ χωρίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶν α θ, θ ε εὐθειᾶν. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων, ἢ ἐλάσσων. ἔστω γὰρ πρότερον εἰ δυνατὸν μείζων. δυνατὸν δή ἐστι περὶ τὸ εἰρημένον χωρίον περιγραφῆμεν σχῆμα, ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον ὥστε τὸ περιγραφόμενον σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ εἰρημένου χωρίου ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ χ τομεὺς τοῦ εἰρημένου χωρίου. περιγεγράφθω δή, καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θ α η, ἐλάχιστος δὲ ὁ θ δ ι. δῆλον οὖν ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ χ τομέως. διήχθωσαν δὴ εὐθεῖαι αἱ ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας ποτὶ τῷ θ ἕως τὰν ποτὶ τὰν περιφέρειαν τοῦ θ α ζ τομέως πεσεῖν. ἐντὶ δή τινες εὐθεῖαι τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, αἱ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι. ὧν ἐστι μεγίστα μὲν ἁ θ α, ἐλαχίστα δὲ ἁ θ ε. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες ταύταν, τῷ μεγέθει ἴσαι ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, αἱ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν τοῦ α θ ζ τομέως περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι χωρὶς τᾶς θ ζ. καὶ ἀναγεγράφαται ὅμοιοι τομεῖς ἀπὸ πασᾶν. ἀπό τε τᾶν ἴσων ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, καὶ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, ἀπὸ δὲ τᾶς θ ε οὐκ ἀναγέγραπται. τομέες οὖν οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσων ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, ποτὶ τοὺς τομέας τοὺς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας τομέως ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι, ἢ τὸ ἀπὸ τᾶς θ α ποτὶ τὰ συναμφότερα, τά τε ὑπὸ τᾶν α θ, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ε ζ τετραγώνου. ἐντὶ δὲ τοῖς μὲν τομεῦσι τοῖς ἀπὸ τᾶν ἴσων ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, ἴσος ὁ θ α ζ τομεύς. τοῖς δὲ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, τὸ περιγεγραμμένον. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ὁ θ α ζ τομεὺς ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ α ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν θ α, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ζ ε. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς θ α ποτὶ τὰ εἰρημένα, τοῦτον τὸν λόγον ἔχει ὁ θ α ζ τομεὺς ποτὶ τὸν χ τομέα. ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ὁ χ τομεὺς τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἐστὶν δέ, ἀλλὰ μείζων. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὁ χ τομεὺς μείζων τοῦ περιεχομένου χωρίου, ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶν α θ, θ ε εὐθειᾶν.

Οὐδὲ τοίνυν ἐλάσσων. ἔστω γὰρ ἐλάσσων, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευάσθω. πάλιν δὴ δυνατόν ἐστιν εἰς τὸ χωρίον ἐγγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ εἰρημένον χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ αὐτὸ χωρίον τοῦ χ τομέως. ἐγγεγράφθω οὖν, καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θβ, ἐλάχιστος δὲ ὁ θε. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζόν ἐστι τοῦ χ τομέως. πάλιν οὖν ἐπεί τινες γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι, ὧν ἐστι μεγίστα μὲν ἁ θα, ἐλαχίστα δὲ ἁ θε. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν τοῦ θαζ τομέως περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι, χωρὶς τᾶς θα, τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες τῶν ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, τῷ δὲ μεγέθει, ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ ἴσαι, καὶ ἀναγεγράφεται ἀπὸ τᾶς ἑκάστας ὅμοιοι τομεῖς. ἀπὸ δὲ τᾶν μεγίσταν τῶν ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, οὐκ ἀναγέγραπται. οἱ τομεῖς οὖν οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ ποτὶ τοὺς τομέας, τοὺς ἀπὸ τᾶν ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας, μείζονα λόγον ἔχοντι, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θα ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν θα, θε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς εζ. ὥστε καὶ ὁ θαζ τομεὺς ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸν χ τομέα. ὥστε μείζων ὁ χ τομεὺς τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ ἐλάσσων. οὐκ ἔστιν οὐδὲ ἐλάσσων ὁ χ τομεὺς τοῦ περιεχομένου χωρίου, ὑπό τε τᾶς αβγδε ἕλικος, καὶ τᾶν αθ, θε εὐθειᾶν. ἴσα ἄρα.



κζ Τῶν χωρίων τῶν περιεχομένων ὑπό τε τᾶν ἑλίκων καὶ τᾶν εὐθειᾶν τᾶν ἐν τᾷ περιφορᾷ, τὸ μὲν γ τοῦ β διπλάσιόν ἐστι, τὸ δὲ δ τριπλάσιον, τὸ δὲ ε τετραπλάσιον. καὶ ἀεὶ τὸ ἑπόμενον κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς πολλαπλάσιον τοῦ δευτέρου χωρίου, τὸ δὲ α χωρίον ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ δευτέρου. ἔστω ἅ τε κειμένα ἕλιξ ἔν τε τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, καὶ ἐν τᾷ δευτέρᾳ, καὶ ἐν ταῖς ἑπομέναις ὁποσαισοῦν. ἔστω ἀρχὰ μὲν τᾶς ἕλικος τὸ θ σημεῖον, ἁ δὲ θε εὐθεῖα ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. τῶν δὲ χωρίων ἔστω τὸ μὲν κ τὸ α, τὸ δὲ λ τὸ β, τὸ δὲ μ τὸ γ, τὸ δὲ ν τὸ δ, τὸ δὲ ξ τὸ ε. δεικτέον ὅτι τὸ μὲν κ χωρίον ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ ἑπομένου. τὸ δὲ μ διπλάσιον τοῦ λ, τὸ δὲ ν τριπλάσιον τοῦ λ, καὶ τῶν ἑξῆς ἀεὶ τὸ ἑπόμενον πολλαπλάσιον τοῦ λ, κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμούς. ὅτι μὲν οὖν τὸ κ ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ λ, ὧδε δείκνυται. ἐπεὶ δὲ



τὸ κλ χωρίον ποτὶ τὸν δεύτερον κύκλον δέδεικται τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὰ ἑπτὰ πρὸς τὰ

ιβ,

εβ. ὁ δὲ β κύκλος ποτὶ τὸν α κύκλον, ὡς ιβ ποτὶ τὰ τρία. δῆλον γὰρ δεῖν. ὁ δὲ α κύκλος ποτὶ τὸ κ χωρίον ἔχει ὡς γ πρὸς α. ἴσον ἄρα δεῖ τὸ κ χωρίον τῷ λ. πάλιν δὲ τὸ κλμ χωρίον ποτὶ τὸν γ κύκλον, δέδεικται ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον, τό τε ὑπὸ γθ, θβ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γβ τετραγώνου, ποτὶ τὸ ἀπὸ γθ τετράγωνον. ὁ δὲ γ κύκλος ἔχει ποτὶ τὸν β κύκλον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς γθ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θβ. ὁ δὲ β κύκλος ἔχει ποτὶ τὸ κλ χωρίον, ὃν τὸ ἀπὸ βθ τετράγωνον ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν βθ, θα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς αβ τετραγώνου. ταῦτα δὲ ἔχει λόγον πρὸς ἄλλαλα, ὃν ιθ ποτὶ τὰ ζ. ὥστε καὶ τὸ κλμ χωρίον ποτὶ τὸ λκ χωρίον τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν ιθ ποτὶ τὰ ζ. αὐτὸ δὴ τὸ μ ποτὶ τὸ κλ λόγον ἔχει, ὃν τὰ ιβ ποτὶ τὸ ζ. τὸ δὲ κλ ποτὶ τὸ λ λόγον ἔχει, ὃν τὰ ζ ποτὶ τὰ ς. δῆλον οὖν ὅτι διπλάσιον δεῖ τὸ μ τοῦ λ. ὅτι δὲ τὰ ἑπόμενα τὸν τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν λόγον ἔχει, δειχθήσεται. τὸ γὰρ κλμνξ ποτὶ τὸν κύκλον τὸν δεῖν ἐκ τοῦ κέντρου ἁ θε, τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον, τό τε ὑπὸ τῶν εθ, θδ περιεχόμενον, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δε τετραγώνου, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θε τετράγωνον. ὁ δὲ κύκλος τὸν δεῖν ἐκ τοῦ κέντρου ἁ θε, ποτὶ τὸν κύκλον οὗ ἐστὶν ἐκ τοῦ κέντρου ἁ θδ, τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θε τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θδ τετράγωνον. ὁ δὲ κύκλος οὗ ἐστὶν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἁ δθ, ποτὶ τὸ κλμν χωρίον, τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θδ τετράγωνον ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν θδ, θγ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δγ τετραγώνου. καὶ τὸ κλμνξ ἄρα, ποτὶ τὸ κλμν λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τῶν θε, θδ. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δε, ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν δθ, θγ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δγ. διελόντι, καὶ τὸ ξ χωρίον ποτὶ τὸ κλμν λόγον ἔχει, ὃν ἁ ὑπεροχά, τοῦ τε ὑπὸ εθ, θδ μετὰ τοῦ τρίτου μέρους τοῦ ἀπὸ τᾶς εδ, πρός τε τὸ ὑπὸ τῶν δθ, θγ. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δγ. ὑπερέχει δὲ τὰ συναμφότερα τῶν συναμφοτέρων, τῷ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν εθδ, τοῦ ὑπὸ τῶν δθγ. ὑπερέχει δὲ τῷ ὑπὸ τῶν δθ, γε. τὸ ξ ἄρα ποτὶ τὸ κλμν λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τῶν θδ, γε ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν δθ, θγ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γδ τετραγώνου. διὰ δὲ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται καὶ τὸ ν ποτὶ τὸ κλμ χωρίον, λόγον ἔχον τὸν αὐτὸν, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν θγ, βδ ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ γθ, θβ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ γβ τετραγώνου. τὸ ν ἄρα ποτὶ τὸ κλμν χωρίον, τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ θγ, βδ ποτὶ τὸ ὑπὸ θγ, θβ. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γβ. καὶ ἀνάπαλιν. ταῦτα δὲ ἴσα ἐντὶ τῷ τε ὑπὸ τᾶν δθ, θγ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς γδ τετραγώνου. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ξ χωρίον πρὸς τὸ κλμν τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν θδ, γε ποτὶ τὰ συναμφότερα, τῷ τε ὑπὸ τᾶν δθγ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γδ τετραγώνου. τὰ δὲ κλμν ποτὶ τὸ ν ὄντα συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν δθγ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γδ τετραγώνου ποτὶ τὰ ὑπὸ τὰ θγ, δβ. ἔχει ἄρα καὶ τὸ ξ ποτὶ τὸ ν τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν θδ, γε, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν θγ, δβ. τὸ δὲ ὑπὸ τᾶν θδ, γε ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν θγ, δβ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ θδ ποτὶ τὰν θγ. ἐπεὶ ἴσαι ἐντὶ αἱ γε, βδ. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ ξ ποτὶ τὸ ν τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ θδ ποτὶ τὰν θγ.

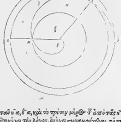
Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ τὸ ν ποτὶ τὸ μ τὸν αὐτὸν ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἁ θγ ποτὶ τὰν θβ. καὶ τὸ μ ποτὶ τὸ λ, ὃν ἁ βθ ποτὶ τὰν αθ. αἱ δὲ εθ, δθ, γθ, βθ, αθ εὐθεῖαι, τὸν τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν λόγον ἔχοντι.

κη

Εἴκα ἐπὶ τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν ὁποιᾳοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας δύο σημεῖα λαφθέωντι, μὴ τὰ πέρατα, ἀπὸ δὲ τῶν λαφθέντων σημείων ἐπιζευχθέωντι εὐθεῖαι ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, καὶ κέντρῳ μὲν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς ἕλικος, διαστήματι δὲ τοῖς ἀπὸ τῶν σημείων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος κύκλοι γραφέωντι, τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς μείζονος τᾶν περιφερειᾶν τᾶς μεταξὺ τᾶν εὐθειᾶν, καὶ τᾶς ἕλικος τᾶς μεταξὺ τᾶν αὐτᾶν εὐθειᾶν, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐκβληθείσας, τὸν αὐτὸν ἕξει τὸν λόγον ποτὶ τὸ ἀπολαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἐλάσσονος περιφερείας, καὶ τᾶς αὐτᾶς ἕλικος καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ πέρατα αὐτᾶν, ὃν ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου μετὰ δύο τριταμορίων τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου ἐλάσσονος κύκλου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου μετὰ ἑνὸς τριταμορίου τᾶς αὐτᾶς ὑπεροχᾶς. ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς ἁ αβγδ μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένα. καὶ λελάφθω ἐπ' αὐτᾶς δύο σημεῖα τὰ α, γ, ἔστω δὲ τὸ θ σημεῖον ἀρχὰ ἐμὲν τᾶς ἕλικος. καὶ ἀπὸ τῶν α, γ, ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι ἐπὶ τὸ θ. καὶ κέντρῳ τῷ θ, διαστήμασι δὲ τοῖς θα, θγ, κύκλοι γεγράφθωσαν. δεικτέον ὅτι τὸ ξ χωρίον ποτὶ τὸ π τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον, ἁ θα, καὶ δύο τριταμόρια τᾶς ηα, ποτὶ συναμφότερον τάν τε θα, καὶ ἓν τριταμόριον τᾶς ηα, τὸ γὰρ χωρίον τὸ νπ ποτὶ τὸν κγθ τομέα, δέ-

δεικται

δείκνυται ἴσον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει τό τε ὑπὸ τᾶν κθ, αθ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ακ τετραγώνου, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κθ τετραγώνον, αὐτὸ ἄρα τὸ ξ ποτὶ τὸ νπ ἴσον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν θα, κ μετὰ δύο τριτημορίων τοῦ ἀπὸ τᾶς κα τετραγώνου, ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν αθ, κ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα. καὶ ἐπεὶ τὸ νπξ χωρίον ποτὶ τὸν νξ τομέα ἴσον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον, τό τε ὑπὸ τῶν θα, θκ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θκ τετραγώνον, ὁ δὲ νπξ τομεὺς ποτὶ τὸν ν τομέα ἴσον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θκ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θα, ἕξει καὶ τὸ νπ χωρίον ποτὶ τὸν ν τομέα, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον τό τε ὑπὸ θα, θκ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα, ποτὶ τὸ ἀπὸ θα. τὸ ἄρα νπ χωρίον πρὸς τὸ π λόγον ἔχει, ὃν συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν κθ α. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα ποτὶ συναμφότερον, τό τε ὑπὸ τᾶν κα, θα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα τετραγώνου. ἐπεὶ οὖν τὸ ξ χωρίον ποτὶ τὸ νπ ἴσον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον, τό τε ὑπὸ θα, κ, καὶ δύο τριτημόρια τοῦ ἀπὸ τᾶς κα τετραγώνου ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν κθ α, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα. τὸ δὲ νπ χωρίον ποτὶ τὸ π ἴσον ἔχει τὸν λόγον, ὃν συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν κθ α, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα τετραγώνου, ποτὶ συναμφότερον, τό τε ὑπὸ τᾶν κα θ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα τετραγώνου. ἕξει καὶ τὸ ξ χωρίον ποτὶ τὸ π, ἴσον τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν θα, κα, καὶ δύο τριτημόρια τοῦ ἀπὸ τᾶς κα, ποτὶ συναμφότερον. τό τε ὑπὸ τᾶν θα, κα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα. τὰ δὲ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν θα, κα, καὶ δύο τριτημόρια τοῦ ἀπὸ τᾶς κα, ποτὶ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν θα, κα καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα τετραγώνου, ἴσον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα, ἅ τε θα καὶ δύο τριτημόρια τᾶς κα, ποτὶ συναμφότερον, τὰν θα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τᾶς κα. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ξ χωρίον ποτὶ τὸ ν χωρίον ἴσον ἔχει τὸν λόγον, ὃν συναμφότερα, ἅ τε θα, καὶ δύο τριτημόρια τᾶς κα, ποτὶ συναμφότερον τὰν θα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τᾶς κα.

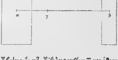


ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΩΝ, Η ΚΕΝΤΡΑ ΒΑΡΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ.

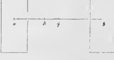
Αἰτούμεθα τὰ ἴσα βαρέα ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων ἰσοῤῥοπεῖν, τὰ δὲ ἴσα βαρέα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων μὴ ἰσοῤῥοπεῖν, ἀλλὰ ῥέπειν ἐπὶ τὸ βάρος τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος μάκεος. εἴκα βαρέων ἰσοῤῥοπεόντων ἀπό τινων μακέων ποτὶ τὸ ἕτερον τῶν βαρέων ποτιτεθῇ μὴ ἰσοῤῥοπεῖν, ἀλλὰ ῥέπειν ἐπὶ τὸ βάρος ἐκεῖνο ᾧ ποτετέθη. ὁμοίως δὲ καὶ εἴκα ἀπὸ τοῦ ἑτέρου τῶν βαρέων ἀφαιρεθῇ τι, μὴ ἰσοῤῥοπεῖν. ἀλλὰ ῥέπειν ἐπὶ τὸ βάρος ἐφ᾽ οὗ οὐκ ἀφῃρέθη, τῶν ἴσων καὶ ὁμοίων σχημάτων ἐπιπέδων ἐφαρμοζομένων ἐπάλληλα, καὶ τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐφαρμόζει ἐπάλληλα. τῶν δὲ ἀνίσων, ὁμοίων δὲ τὰ κέντρα τῶν βαρέων ὁμοίως ἔσται κείμενα. ὁμοίως δὲ λέγομεν σαμεῖα κέεσθαι ποτὶ τὰ ὅμοια σχήματα, ἀφ᾽ ὧν ἐπὶ τὰς ἴσας γωνίας ἀγόμεναι εὐθεῖαι ποιῶντι γωνίας ἴσας ποτὶ τὰς ὁμολόγους πλευράς. εἴκα μεγέθεα ἀπό τινων μακέων ἰσοῤῥοπέωντι, καὶ τὰ ἴσα αὐτοῖς ἀπὸ τῶν αὐτῶν μακέων ἰσοῤῥοπήσει, παντὸς σχήματος οὗ ἁ περίμετρος ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλα ἦ, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐντὸς εἶναι δεῖ τοῦ σχήματος. τούτων δὲ ὑποκειμένων, τὰ ἀπὸ ἴσων μακέων ἰσοῤῥοπέοντα βαρέα ἴσα ἐντί. εἴπερ γὰρ ἄνισα ἐσοῦνται, ἀφαιρεθείσας ἀπὸ τοῦ μείζονος τᾶς ὑπεροχᾶς, τὰ λοιπὰ οὐκ ἰσοῤῥοπησοῦντι, ἐπειδὴ ἰσοῤῥοπεόντων ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἀφῄρηται. ὥς τε τὰ ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων βαρέα ἰσοῤῥοπέοντα, ἴσα ἐντὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἴσων

τῶν ἴσων μακέων ἄνισα βάρεα, οὐκ ἰσοῤῥοπησοῦντι, ἀλλὰ ῥέψει ἐπὶ τὸ μεῖζον, ἀφαιρεθέσας τᾶς ὑπεροχᾶς ἰσοῤῥοπησοῦντι, ἐπειδὴ τὰ ἴσα ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων ἰσοῤῥοπέοντι, ποτιτεθέντος οὖν τοῦ ἀφαιρεθέντος ῥέψει ἐπὶ τὸ μεῖζον, ἐπεὶ ἰσοῤῥοπεόντων τῷ ἑτέρῳ ποτετέθη.

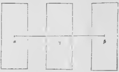
Τὰ ἄνισα βάρεα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων ἰσοῤῥοπησοῦντι, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος ἔσω ἄνισα βάρεα τὰ α, β. καὶ ἔσω τὸ α, καὶ ἰσοῤῥοπέοντα ἀπὸ τῶν α γ, γ β μακέων, δεικτέον ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἁ α γ τᾶς γ β. μὴ γίνεται, ἔσω. ἀφαιρεθέσας δὲ τᾶς ὑπεροχᾶς ἃ ὑπερέχει τὸ α τοῦ β, ἐπειδὴ ἰσοῤῥοπεόντων ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἀφῄρηται, ῥέψει ἐπὶ τὸ β, οὐ ῥέψει δέ. εἴτε γὰρ ἴσα ἐστὶν ἁ γ α τᾶ γ β, ἰσοῤῥοπησοῦντι· γὰρ ἴσα ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων. εἴτε μείζων ἁ γ α τᾶς γ β, ῥέψει ἐπὶ τὸ α. τὰ γὰρ ἴσα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων οὐκ ἰσοῤῥοπέοντι, ἀλλὰ ῥέπει ἀπὸ τοῦ μείζονος μάκεος. διὰ δὴ ταῦτα, ἐλάσσων ἐστὶν ἁ α γ τᾶς γ β. φανερὸν δὲ, ὅτι καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων ἰσοῤῥοπέοντα, ἄνισά ἐστι, καὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος.



α Εἴκα δύο ἴσα μεγέθεα, μὴ τὸ αὐτὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχοντι, τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ μέσον τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τῶν μεγεθέων τὰ κέντρα τοῦ βάρεος. ἔσω τοῦ μὲν α κέντρον τοῦ βάρεος τὸ α, τοῦ δὲ β τὸ β. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἁ α β τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ γ. λέγω ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον ἐστὶ τὸ γ. εἰ γὰρ μὴ, ἔσω τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α, β μεγεθέων κέντρον τοῦ βάρεος τὸ δ, εἰ δυνατόν. ὅτι γὰρ ἐστὶν ἐπὶ τᾶς α β, προδέδεικται. ἐπεὶ οὖν τὸ δ σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ ἐκ τῶν α, β συγκειμένου μεγέθεος, κατεχομένου τοῦ δ ἰσοῤῥοπήσει. τὰ ἄρα α, β μεγέθεα ἰσοῤῥοπησοῦντι ἀπὸ τῶν α δ, δ β μακέων, ὅπερ ἀδύνατον. τὰ γὰρ ἴσα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων οὐκ ἰσοῤῥοπέοντι. δῆλον οὖν τὸ ὅτι γ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος, τοῦ ἐκ τῶν α, β συγκειμένου μεγέθεος.

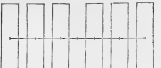


β Εἴκα τριῶν μεγεθέων τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἐπ' εὐθείας ἔοντι κείμενα, καὶ τὰ μεγέθεα ἴσον βάρος ἔχοντι, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι ἔοντι, τοῦ ἐκ πάντων μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου αὐτῶν κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος. ἔσω τρία μεγέθεα τὰ α, β, γ. κέντρα δὲ αὐτῶν τοῦ βάρεος, τὰ α, β, γ, σαμεῖα ἐπ' εὐθείας κείμενα. ἔσω δὲ τὰ α, β, γ ἴσα, καὶ αἱ α γ, γ β ἴσαι εὐθεῖαι. λέγω ὅτι τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ γ σαμεῖον. ἐπεὶ γὰρ τὰ α, β μεγέθεα ἴσον βάρος ἔχει, κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ γ σαμεῖον, ἐπειδὴ ἴσαι ἐντὶ αἱ α γ, γ β. ἐστὶ δὲ καὶ τοῦ γ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ γ σαμεῖον, δῆλον ὅτι καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος.



Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ὁποσωνοῦν καὶ τῷ πλήθει περισσῶν μεγεθέων τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἐπ' εὐθείας ἔωντι κείμενα, εἴκα τά τε ἴσον ἀπέχοντα, ἀπὸ τοῦ μέσου μεγέθεος

ἴσον βάρος ἔχοντι, καὶ αἱ εὐθεῖαι αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων αὐτῶν ἴσαι ἐῶντι, τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου αὐτῶν κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος. εἴκα καὶ ἄρτια ἐῶντι τῷ πλήθει τὰ μεγέθεα, καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπ' εὐθείας ἐῶντι κείμενα, καὶ τὰ μέσα αὐτῶν ἴσον βάρος ἔχοντι, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι ἐῶντι, τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος, τὸ μέσον τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τοῦ βάρεος τῶν μεγεθέων, ὡς ὑπογέγραπται.



ϛ Τὰ σύμμετρα μεγέθεα ἰσορροπέοντι ἀπὸ μακέων ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς βάρεσιν. ἔστω σύμμετρα μεγέθεα τὰ α, β, ὧν κέντρα τὰ α, β. καὶ μᾶκος ἔστω τι τὸ ε δ, καὶ ὡς τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως τὸ δ γ μᾶκος πρὸς τὸ γ ε μᾶκος. δεικτέον ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α, β συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ γ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ α ποτὶ τὸ β, οὕτω τὸ δ γ ποτὶ τὸ γ ε. τὸ δὲ α τῷ β σύμμετρον, καὶ τὸ γ δ ἄρα τῷ γ ε σύμμετρον. τουτέστιν εὐθεῖα τᾷ εὐθείᾳ, ὥστε τῶν ε γ, γ δ ἐστὶ κοινὸν μέτρον. ἔστω δὴ τὸ ν, καὶ κείσθω τᾷ μὲν ε γ ἴσα ἑκατέρα τῶν δ η, δ κ. τᾷ δὲ δ γ ἴσα ἁ ε λ. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἁ δ η τᾷ γ ε, ἴσα καὶ ἁ δ γ τᾷ ε η, ὥστε καὶ ἁ λ ε ἴσα τᾷ ε η. διπλασία ἄρα ἁ μὲν λ η τᾶς δ γ, ἁ δὲ η κ τᾶς γ ε. ὥστε τὸ ν καὶ ἑκατέραν τῶν λ η, η κ μετρεῖ. ἐπειδήπερ καὶ τὰ ἡμίσεα αὐτῶν. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως ἁ δ γ πρὸς γ ε. ὡς δὲ ἁ δ γ πρὸς γ ε, οὕτως ἁ λ η πρὸς η κ. διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας. καὶ ὡς ἄρα τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως ἁ λ η πρὸς η κ. ὁσαπλασίων δέ ἐστιν ἁ λ η τᾶς ν, τοσαυταπλασίων ἔστω τὸ α τοῦ ζ. ἐστὶν ἄρα ὡς ἁ λ η πρὸς ν, οὕτως τὸ α πρὸς ζ. ἐστὶ δὲ καὶ ὡς ἁ κ η πρὸς λ η, οὕτως τὸ β πρὸς α. δι' ἴσου ἄρα ἐστίν, ὡς ἁ κ η πρὸς ν, οὕτως τὸ β πρὸς ζ. ἰσάκις ἄρα πολλαπλασίων ἐστὶν ἁ κ η τᾶς ν, καὶ τὸ β τοῦ ζ. ἐδείχθη δὲ τοῦ ζ καὶ τὸ α πολλαπλασίων ὄν, ὥστε τὸ ζ τῶν α, β κοινόν ἐστι μέτρον. διαιρεθείσας οὖν τᾶς μὲν λ η εἰς τὰς τᾷ ν ἴσας, τοῦ δὲ α εἰς τὰ τῷ ζ ἴσα, τὰ ἐν τᾷ λ η τμήματα ἰσομεγέθη τᾷ ν, ἴσα ἐστὶ τῷ πλήθει τοῖς ἐν τῷ α τμήμασιν ἴσοις οὖσι τῷ ζ. ὥστε αἴ κ' ἐφ' ἕκαστον τῶν τμαμάτων τῶν ἐν τᾷ λ η ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον τῷ ζ, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχον ἐπὶ μέσου τοῦ τμάματος, τά τε πάντα μεγέθεα ἴσα ἐντὶ τῷ α, καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου κέντρον ἔσται τοῦ βάρεος τὸ ε. ἄρτιά τε γάρ ἐστι τὰ πάντα τῷ πλήθει, διὰ τὸ ἴσαν εἶν τὰν λ ε τᾷ η ε. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι κἂν εἴκα ἐφ' ἕκαστον τῶν ἐν τᾷ κ η τμαμάτων ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον τῷ ζ, κέντρον τοῦ βάρεος ἔχον ἐπὶ τοῦ μέσου τοῦ τμάματος, τά τε πάντα μεγέθεα ἴσα ἐσσεῖται τῷ β, καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται τὸ δ. ἀλλ' οὖν τὸ μὲν α ἐπικείμενον κατὰ τὸ ε, τὸ δὲ β κατὰ τὸ δ. ἐσσεῖται δὴ μεγέθεα ἴσα ἀλλήλοις ἐπ' εὐθείας κείμενα, ὧν τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἴσα ἀπ' ἀλλήλων διεστᾶμεν συγκείμενα, ἄρτια τῷ πλήθει. δῆλον οὖν ὅτι τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἁ διχοτομία τᾶς εὐθείας τᾶς ἐχούσας τὰ κέντρα τῶν μέσων μεγεθέων. ἐπεὶ δὲ ἴσαι εἰσὶν ἁ μὲν λ ε τᾷ γ δ, ἁ δὲ ε γ τᾷ δ κ, καὶ ὅλα ἄρα ἁ λ γ ἴσα τᾷ γ κ. ὥστε τοῦ ἐκ πάντων μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ γ σαμεῖον. τοῦ μὲν ἄρα α κειμένου κατὰ τὸ ε, τοῦ δὲ β κατὰ τὸ δ, ἰσορροπησοῦντι κατὰ τὸ γ.



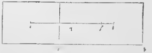
Καὶ

Καὶ τοίνυν εἴκα ἀσύμμετρα ἔωντι τὰ μεγέθεα, ὁμοίως ἰσορροπησοῦντι, ἀπὸ μακέων ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς μεγέθεσιν. ἔστω ἀσύμμετρα μεγέθεα τὰ αβ, γ, μάκεα, τὰ δὲ δε, εζ. ἐχέτω δὲ τὸ αβ ποτὶ τὸ γ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ τὸ εδ ποτὶ τὸ εζ μᾶκος. λέγω ὅτι τῶν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν αβ, γ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ ε. εἰ γὰρ μὴ, ἰσορροπήσει τὸ αβ τεθὲν ἐπὶ τῷ ζ, τῷ γ τεθέντι ἐπὶ τὸ δ, ἤτοι μεῖζόν ἐστι τὸ αβ τοῦ γ, ὥστε ἰσορροπεῖν τῷ γ, ἢ οὔ. ἔστω μεῖζον. καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ αβ ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ μεῖζόν ἐστι τὸ αβ τοῦ γ, ὥστε ἰσορροπεῖν. ὥστε



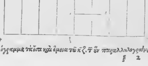
τὸ λοιπὸν τὸ α σύμμετρον εἶμεν τὸ γ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρά ἐστι τὰ α, γ μεγέθεα, καὶ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ α ποτὶ τὸ γ, ἢ ἁ δε πρὸς εζ, οὐκ ἰσορροπησοῦντι τὰ α, γ ἀπὸ τῶν δε, εζ μακέων, τεθέντος τοῦ μὲν α ἐπὶ τὸ ζ, τοῦ δὲ γ ἐπὶ τὸ δ. διὰ ταῦτα δὲ οὐδ' εἰ τὸ γ μεῖζόν ἐστιν, ἢ ὥστε ἰσορροπεῖν τὸ α.

Εἴκα ἀπό τινος μεγέθεος μέγεθος ἀφαιρεθῇ, μὴ τὸ αὐτὸ κέντρον ἔχον τῷ ὅλῳ, τοῦ λοιποῦ μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἐκβληθείσας τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τῶν βαρέων, τοῦ τε ὅλου μεγέθεος καὶ τοῦ ἀφῃρημένου ἐπὶ τὰ αὐτά, ἐφ' ὃ τὸ κέντρον τοῦ ὅλου μεγέθεος. καὶ ἀπολαφθείσας τινὸς ἀπὸ τᾶς ἐκβληθείσας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ εἰρημένα κέντρα, ὥστε τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον πρὸς τὴν μεταξὺ τῶν κέντρων, ὃν ἔχει τὸ βάρος τοῦ ἀφῃρημένου μεγέθεος πρὸς τὸ τοῦ λοιποῦ βάρος, τὸ πέρας τᾶς ἀπολαφθείσας. ἔστω μεγέθεος τινὸς τοῦ αβ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ γ. καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ αβ τὸ αδ. οὗ κέντρον τοῦ βάρεος ἔστω τὸ ε. ἐπιζευχθείσας δὲ τᾶς εγ, καὶ ἐκβληθείσας, ἀπολελάφθω ἁ γζ ποτὶ τὰν γε, λόγον ἔχουσα τὸν αὐτόν, ὃν ἔχει τὸ αδ μέγεθος ποτὶ τὸ δη. δεικτέον ὅτι τοῦ δη μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ ζ σημεῖον. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ θ σημεῖον. ἐπεὶ οὖν τοῦ μὲν αδ μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ ε, τοῦ δὲ δη τὸ θ σημεῖον, τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν αδ, δη μεγεθέων, κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς εθ τμαθείσας, ὥστε



τὰ τμάματα αὐτᾶς ἀντιπεπονθότως εἶμεν τὸν αὐτὸν λόγον τοῖς μεγέθεσιν, ὥστε οὐκ ἔσται τὸ γ σαμεῖον κατὰ τὰν ἀνάλογον τομὰν τὰ εἰρημένα. οὐκ ἄρα ἐστὶ τὸ γ κέντρον τοῦ ἐκ τῶν αδ, δη συγκειμένου μεγέθεος, τουτέστι τοῦ αβ. ἐστὶ δέ· ὑπόκειται γάρ. οὐκ ἐστὶ ἄρα τὸ θ κέντρον βάρεος τοῦ δη μεγέθεος.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς διχοτομίας τᾶς κατ' ἐναντίον τοῦ παραλληλογράμμου πλευρᾶς. ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ αβγδ. ἐπὶ δὲ τὰν διχοτομίαν τῶν αβ, γδ ἁ εζ. φημὶ δὴ ὅτι τοῦ αβγδ παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔσται ἐπὶ τᾶς εζ. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ θ. καὶ ἄχθω παρὰ τὴν αβ ἁ θι. τᾶς δὲ δὴ εβ διχοτομουμένας αἰεὶ ἐσσεῖταί ποκα καταλειπομένα ἐλάσσων τᾶς ιθ. καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα τῶν αε, εβ εἰς τὰς τᾷ εκ ἴσας. καὶ ἀπὸ τῶν κατὰ τὰς διαιρέσιας σαμείων ἄχθωσαν παρὰ τὰν εζ. διαιρεθήσεται δὴ τὸ ὅλον



παραλληλόγραμμον εἰς παραλληλόγραμμα τὰ ἴσα καὶ ὅμοια τῷ κζ. τῶν οὖν παραλληλογράμμων τῶν

ἴσων καὶ ὁμοίων τῶν κζ ἐφαρμοζομένων ἐπάλληλα, καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπάλληλα πεσοῦνται. ἐσσοῦνται δὴ μεγέθεα τινὰ παραλληλόγραμμα, ἴσα τῷ κζ, ἄρτια τῷ πλήθει. καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπ' εὐθείας κείμενα, καὶ τὰ μέσα ἴσα. καὶ πάντα τὰ ἐφ' ἑκάτερα τῶν μέσων, αὐτά τε ἴσα ἐντί, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι. τοῦ ἐκ πάντων αὐτῶν ἄρα συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τοῦ βάρεος τῶν μέσων χωρίων. οὐκ ἔστι δέ. τὸ γὰρ θ ἐκτός ἐστι τῶν μέσων παραλληλογράμμων. φανερὸν οὖν, ὅτι ἐπὶ τᾶς εζ εὐθείας τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ αβγδ παραλληλογράμμου.

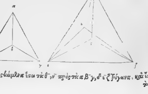
Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ αἱ διάμετροι συμπίπτοντι. ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ αβγδ, καὶ ἐν αὐτῷ ἁ εζ τέμνουσα τὰς αβ, γδ, ἁ δὲ κλ τὰς αγ, βδ. ἐστὶ δὴ τοῦ αβγδ παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εζ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. διὰ ταῦτα δὲ καὶ ἐπὶ τᾶς κλ. τὸ θ ἄρα σαμεῖον κέντρον τοῦ βάρεος. κατὰ δὲ τὸ θ, αἱ διάμετροι τοῦ παραλληλογράμμου πίπτοντι. ὥστε δέδεικται τὸ προτεθέν.



Ἔστι δὲ καὶ ἄλλως τὸ αὐτὸ δεῖξαι. ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ αβγδ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἁ δβ. τρίγωνα ἴσα ἐντί, καὶ ὅμοια ἀλλήλοις, ὥστε ἐφαρμοζομένων ἐπάλληλα τῶν τριγώνων, καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπάλληλα πεσοῦνται. ἔστω δὴ τοῦ αβδ τριγώνου, κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ε σαμεῖον. καὶ τετμήσθω δίχα ἁ δβ κατὰ τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἁ εθ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἀπειλήφθω ἁ ζθ ἴσα τᾷ θε. ἐφαρμοζομένου δὴ τοῦ αβδ τριγώνου ἐπὶ τὸ βδγ τρίγωνον, καὶ τεθεμένας τᾶς αβ πλευρᾶς ἐπὶ τὰν δγ, τᾶς δὲ αδ ἐπὶ τὰν βγ, ἐφαρμόζει καὶ ἁ θε εὐθεῖα ἐπὶ τὰν ζθ. καὶ τὸ ε σαμεῖον ἐπὶ τὸ ζ πεσεῖται. ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ αδγ τριγώνου. ἐπεὶ οὖν τοῦ μὲν αβδ τριγωνίου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ε σαμεῖον, τοῦ δὲ δβγ τὸ ζ. δῆλον ὡς τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ μέσον τᾶς εζ εὐθείας, ὅπερ ἐστὶ τὸ θ σαμεῖον.



Ἐὰν δύο τρίγωνα ὅμοια ἀλλήλοις ᾖ, καὶ ἐν αὐτοῖς σαμεῖα ὁμοίως κείμενα πρὸς τὰ τρίγωνα, καὶ τὸ ἐν σαμεῖον τοῦ ἐν ᾧ ἐστὶ τριγώνου κέντρον ᾖ τοῦ βάρεος, καὶ τὸ λοιπὸν σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος, τοῦ ἐν ᾧ ἐστὶ τριγώνου. ὁμοίως δὲ λέγομεν σαμεῖον κέεσθαι περὶ τὰ ὅμοια σχήματα, ἀφ' ὧν αἱ ἐπὶ τὰς ἴσας γωνίας ἀγόμεναι εὐθεῖαι, ἴσας ποιοῦσι γωνίας πρὸς ταῖς ὁμολόγοις πλευραῖς. ἔστω δύο τρίγωνα τὰ αβγ, δεζ. καὶ ἔστω ὡς ἁ αγ πρὸς δζ, οὕτως ἅ τε αβ πρὸς δε. καὶ ἁ βγ πρὸς εζ. καὶ ἐν τοῖς εἰρημένοις τριγώνοις σαμεῖα ὁμοίως κείμενα ἔστω τὰ θ, ν πρὸς τὰ αβγ, δεζ τρίγωνα. καὶ ἔστω τὸ θ



τὸ θ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ αβγ τριγώνου. λέγω ὅτι καὶ τὸ ν κέντρον βάρεός ἐστι τοῦ δεζ τριγώνου. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ η κέντρον βάρεος τοῦ δεζ τριγώνου. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θα, θβ, θγ, δν, εν, ζν, δη, εη, ζη. ἐπεὶ οὖν ὅμοιόν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον τῷ δεζ τριγώνῳ, καὶ κέντρα τῶν βαρέων ἐστὶ τὰ θ, η σαμεῖα. τῶν δὲ ὁμοίων σχημάτων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ὁμοίως ἐντι κείμενα, ὥστε ἴσας ποιοῦσιν τι γωνίας πρὸς ταῖς ὁμολόγοις πλευραῖς, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. ἴση ἄρα ἁ ὑπὸ η δε γωνία, τᾷ ὑπὸ θ α β. ἀλλὰ ἁ ὑπὸ θ α β γωνία ἴσα ἐντὶ τᾷ ὑπὸ ε δ ν, διὰ τὸ ὁμοίως κεῖσθαι τὰ θ, ν σημεῖα, καὶ ἁ ὑπὸ ε δ η γωνία ἄρα ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ ε δ ν, ἁ μείζων τᾷ ἐλάσσονι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οὐκ ἐστὶ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ δεζ τριγώνου τὸ ν σαμεῖον. ἐστὶν ἄρα τὸ ν σαμεῖον, ὅπερ.

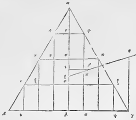
Εἴκα δύο τρίγωνα ὅμοια ἐῶντι, τοῦ δὲ ἑνὸς τριγώνου κέντρον ἦ τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας, ἅ ἐντι ἀπό τινος γωνίας ἐπὶ μέσαν βάσιν ἀγομένα, καὶ τοῦ λοιποῦ τριγώνου τὸ κέντρον ἐσεῖται, τοῦ βάρεος ἐπὶ τὰς ὁμοίας ἀγομένας γραμμάς. ἔστω δύο τρίγωνα, τὰ αβγ, δεζ, καὶ ἔστω ὡς ἁ αγ πρὸς δζ, οὕτως ἅ τε αβ πρὸς δε, καὶ ἁ βγ πρὸς ζε. καὶ τμαθείσας τᾶς αγ δίχα κατὰ τὸ η, ἐπιζεύχθω ἁ βη, καὶ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ αβγ τριγώνου, ἐπὶ τᾶς βη, τὸ θ. λέγω ὅτι καὶ τοῦ εδζ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς ὁμοίως ἀγομένας εὐθείας. τετμάσθω ἁ δζ δίχα κατὰ τὸ μ, καὶ ἐπιζεύχθω ἁ εμ καὶ γεγονέτω ὡς ἁ βη πρὸς βθ, οὕτως ἁ με πρὸς εν. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αθ, θγ, δν, νζ. ἐπεὶ ἐστὶ τᾶς μὲν γα, ἡμίσεια ἁ αη, τᾶς δὲ δζ, ἡμίσεια ἁ δμ. ἐστὶν ἄρα καὶ ὡς ἁ



βα πρὸς εδ, οὕτως ἁ αη πρὸς δμ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσι. ἴσα τε ἄρα ἐστὶν ἁ ὑπὸ αηβ, τᾷ ὑπὸ δμε, καὶ ἐστὶν ὡς ἁ αη πρὸς δμ, οὕτως ἁ βη πρὸς εμ. ἐστὶ δὲ καὶ ὡς ἁ βη πρὸς βθ, οὕτως ἁ με πρὸς εν. καὶ δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἁ αβ πρὸς δε, οὕτως ἁ βθ πρὸς εν. καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσι. εἰ δὲ τοῦτο, ἴσα ἐστὶν ἁ ὑπὸ βαθ γωνία τᾷ ὑπὸ εδν, ὥστε καὶ λοιπὰ ἁ ὑπὸ θαγ γωνία ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ νδζ γωνίᾳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἁ μὲν ὑπὸ βγθ γωνία ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ εζν, ἁ δὲ ὑπὸ θγη, τᾷ ὑπὸ νζμ ἴσα. ἐδείχθη δὲ καὶ ἁ ὑπὸ αβθ τᾷ ὑπὸ δεμ ἴσα, ὥστε καὶ λοιπὰ ἁ ὑπὸ θβγ γωνία ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ νεζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ πάντα ὁμοίως κεῖται τὰ θ, ν σαμεῖα ποτὶ ὁμολόγους πλευράς, καὶ ἴσας γωνίας ποιεῖ. ἐπεὶ οὖν ὁμοίως κεῖται τὰ θ ν σαμεῖα, καὶ ἐστὶ τὸ θ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ αβγ τριγώνου, καὶ τὸ ν ἄρα κέντρον βάρεος τοῦ δεζ.

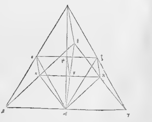
Παντὸς τριγώνου τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας, ἅ ἐστιν ἐκ τᾶς γωνίας ἐπὶ μέσαν ἀναγομένα τὰν βάσιν. ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ. καὶ ἐν αὐτῷ ἁ αδ ἐπὶ μέσαν τὰν βγ βάσιν. δεικτέον ὅτι ἐπὶ τᾶς αδ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ αβγ. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ θ, καὶ δι' αὐτοῦ παρὰ τὰν βγ ἄχθω ἁ θι, ἁ εἰ δὴ δίχα τεμνομένας τᾶς δγ ἔσται ἅπερ ἁ καταλειπομένα ἐλάσσων τᾶς θι. καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα τῶν βδ, δγ εἰς τὰς ἴσας. καὶ διὰ τῶν τομῶν παρὰ τὰν δα ἄχθωσαν καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εζ, ηκ, λμ. ἐσοῦνται δὴ αὗται παρὰ τὰν βγ. τοῦ δὴ παραλληλογράμμου τοῦ μὲν μν, τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς υσ, τοῦ δὲ κξ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς τυ, τοῦ δὲ ζο, ἐπὶ τᾶς τδ. τοῦ ἄρα ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς σδ εὐθείας. ἔσται δὴ τὸ ρ. καὶ ἐπιζεύχθω ἁ ρθ, καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν αδ ἁ γφ. τὸ δὴ αδγ τρίγωνον ποτὶ πάντα τὰ τρίγωνα τὰ ἀπὸ τῶν αμ, μκ, κζ, ζγ ἀναγεγραμμένα ὅμοια τῷ αδγ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ γα πρὸς αμ. διὰ τὸ ἴσας εἶν τὰς αμ, μκ, κζ, ζγ. ἐπεὶ δὲ καὶ τὸ αδβ τρίγωνον ποτὶ πάντα τὰ ἀπὸ τῶν αλ, λη, ηε, εβ ἀναγεγραμμένα ὅμοια τρίγωνα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ βα πρὸς αλ, τὸ ἄρα αβγ τρίγωνον ποτὶ πάντα τὰ εἰρημένα τρίγωνα τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ γα πρὸς αμ. ἀλλὰ ἁ γα πρὸς αμ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἁ φρ πρὸς ρθ. ὁ γὰρ τᾶς γα πρὸς αμ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὅλας τᾶς φρ πρὸς ρπ, διὰ τὸ ὅμοια εἶν τὰ τρίγωνα. καὶ τὸ αβγ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὰ εἰρημένα μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἁ φρ πρὸς ρθ ὥς τε

καὶ διελόντι τὰ μν, κξ, ζο παραλληλόγραμμα πρὸς τὰ καταλειπόμενα τρίγωνα, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἁ φθ πρὸς θε. γεγονέτω οὖν ἐν τῷ τῶν παραλληλογράμμων πρὸς τὰ τρίγωνα λόγῳ ἁ χθ πρὸς θε. ἐπεὶ οὖν ἐστὶ τὸ μέγεθος τὸ αβγ, οὗ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ θ. καὶ ἀφῄρηται ἀπ' αὐτοῦ μέγεθος τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν μν, κξ, ζο παραλληλογράμμων, καὶ ἐστὶ τοῦ ἀφῃρημένου μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ρ σημεῖον, τοῦ ἄρα λοιποῦ μεγέθεος τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν περιλειπομένων τριγώνων κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ τᾶς ρθ εὐθείας ἐκβληθείσας, καὶ ἀπολαφθείσας ἐπὶ ταῦ θε, τὰν ἐχούσας τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἀφαιρεθὲν μέγεθος ποτὶ τὸ λοιπόν. τὸ ἄρα χ σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ συγκειμένου μεγέθεος ἐκ τῶν περιλειπομένων, ὅπερ ἀδύνατον. τᾶς γὰρ διὰ τοῦ χ εὐθείας παρὰ ταὺ αδ ἀγομένας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐπὶ ταῦτα πάντα ἐστί, τουτέστιν ἐπὶ θάτερον μέρος. δῆλον οὖν τὸ προτεθέν.



ΑΛΛΩΣ ΤΟ ΑΥΤΟ.

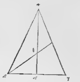
Ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ ἄχθω ἁ αδ ἐπὶ μέσαν ταὺ βγ, λέγω ὅτι ἐπὶ τᾶς αδ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ αβγ τριγώνου. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν ἔστω τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν, αἵ τε αθ, θβ, θγ. καὶ αἱ εδ, ζδ ἐπὶ μέσας τὰς βα, αγ. καὶ παρὰ ταὺ αθ ἄχθωσαν αἱ εκ, ζλ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κλ, λδ, δκ, δθ, μν. ἐπεὶ ὅμοιον ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον τῷ δζγ τριγώνῳ, διὰ τὸ παράλληλον εἶν τὰν βα τᾷ ζδ. καὶ ἐστὶ τοῦ αβγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ θ σαμεῖον. καὶ τοῦ ζδγ ἄρα τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ λ σαμεῖον. ὁμοίως γὰρ ἀντικείμενα τὰ θ, λ σαμεῖα ἐν ἑκατέρῳ τῶν τριγώνων ἐπεὶ δήπερ ποτὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἴσας ποιοῦντι γωνίας φανερόν γάρ τοῦτο. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῦ εβδ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ κ σαμεῖον. ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν εβδ, ζδγ τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος ἐστίν, ἐπὶ μέσας τᾶς κλ εὐθείας. ἐπειδήπερ ἴσα ἐντὶ τὰ εβδ, ζδγ τρίγωνα. καὶ ἐστὶ τᾶς κλ μέσον τὸ ν. ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἁ βε πρὸς εα, οὕτως ἁ βκ πρὸς θκ. ὡς δὲ ἁ γζ



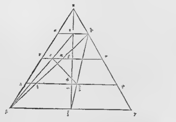
πρὸς ζα, οὕτως ἁ γλ πρὸς λθ. εἰ δὲ τοῦτο, ἐστὶν ἁ βγ τᾷ κλ παράλληλος. καὶ ἐπέζευκται ἁ δθ. ἐστὶν ἄρα ὡς ἁ βδ πρὸς δγ, οὕτως ἁ κν πρὸς ταὺ νλ. ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν εἰρημένων τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τὸ ν. ἔστι δὲ καὶ τοῦ αεδζ παραλληλογράμμου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ μ σαμεῖον, ὥστε τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ τᾶς μν εὐθείας. ἔστι δὲ καὶ τοῦ αβγ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ θ σαμεῖον. ἁ μν ἄρα ἐκβαλλομένα πορεύεται

ρεύεται διὰ τοῦ θ σαμείου, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ αβγ τριγώνου, οὐκ ἔστιν ἐπὶ τᾶς αδ εὐθείας. ἔστιν ἄρα ἐπ᾽ αὐτᾶς.

Παντὸς τριγώνου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ σαμεῖον, καθ᾽ ὃ συμπίπτοντι τοῦ τριγώνου αἱ ἐκ τῶν γωνιῶν ἐπὶ μέσας τὰς πλευρὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι. ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ ἄχθω ἁ μὲν αδ ἐπὶ μέσαν τὰν βγ. ἁ δὲ βε ἐπὶ μέσαν τὰν αγ. ἐπεὶ δὴ τοῦ αβγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος, ἐφ᾽ ἑκατέρας τῶν αδ, βε. δέδεικται γὰρ τοῦτο, ὥστε τὸ θ σαμεῖον, κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν. ιβ



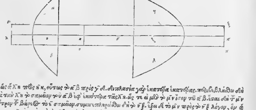
Παντὸς τραπεζίου τὰς δύο πλευρὰς ἔχοντος παραλλήλους ἀλλήλαις, τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς διχοτομίας τῶν παραλλήλων διαιρεθείσας, ὥστε τὸ τμᾶμα αὐτᾶς τὸ πέρας ἔχον τὴν διχοτομίαν τᾶς ἐλάσσονος τῶν παραλλήλων ποτὶ τὸ λοιπὸν τμᾶμα τὸν τοῦ ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἁ ἴσα τᾶς διπλασίας τᾶς μείζονος μετὰ τᾶς ἐλάσσονος, πρὸς τὰν διπλασίαν τᾶς ἐλάσσονος μετὰ τᾶς μείζονος τῶν παραλλήλων. ἔστω τραπέζιον τὸ αβγδ παραλλήλους ἔχον τὰς αδ, βγ. ἁ δὲ εζ ἐπιζευγνυέτω τὰς διχοτομίας τᾶν αδ, βγ. ὅτι οὖν ἐπὶ τᾶς εζ ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ τραπεζίου, φανερόν. ἐὰν γὰρ ἐκβάλῃς τὰς γδ κ, ζε κ, βα κ, δῆλον ὅτι ἐπὶ τὸ αὐτὸ σαμεῖον ἔρχονται. ἔσται τὸ τοῦ κβγ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς κζ. καὶ ὁμοίως τοῦ ακδ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος, ἐπὶ τᾶς εκ, καὶ λοιποῦ ἄρα τοῦ αβγδ τραπεζίου κέντρον τοῦ βάρεος ἔσται ἐπὶ τᾶς εζ. ἐπιζευχθεῖσα δὲ ἁ βδ διῃρήσθω εἰς τρία ἴσα κατὰ τὰ κ, θ σαμεῖα, καὶ διὰ αὐτῶν παρὰ τὰν βγ ἄχθωσαν αἱ λθμ, νκτ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δζ, βε, οξ. ἔσται δὴ τοῦ μὲν δβγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς θμ. ἐπειδήπερ τρίτον μέρος ἁ θβ τᾶς βδ, καὶ διὰ τοῦ θ σαμείου παράλληλος τᾷ βάσει ἐκ τᾶς ἁ μ θ, ἔστι δὲ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ δβγ τριγώνου, καὶ ἐπὶ τᾶς δζ. ὥστε τὸ ξ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ εἰρημένου τριγώνου. διὰ ταῦτα δὲ καὶ τὸ ο σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ αβδ τριγώνου. τοῦ ἄρα ἐξ ἀμφοτέρων τῶν αβδ, βδγ τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος, ὅπερ ἐστὶ τραπέζιον κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς οξ εὐθείας, ἐστὶ δὲ τοῦ εἰρημένου τραπεζίου κέντρον τοῦ βάρεος καὶ ἐπὶ τᾶς εζ. ὥστε τοῦ αβγδ τραπεζίου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ π σαμεῖον. ἔχοι δ᾽ ἂν τὸ βγδ τρίγωνον πρὸς τὸ αβδ λόγον, ὃν ἁ οπ πρὸς πξ. ἀλλ᾽ ὡς τὸ βδγ τρίγωνον πρὸς τὸ αβδ τρίγωνον, οὕτως ἐστὶ ἁ βγ πρὸς αδ. ὡς δὲ ἁ οπ πρὸς πξ, οὕτως ἁ πρ πρὸς πσ. καὶ ὡς ἄρα ἁ βγ πρὸς αδ, οὕτως ἁ ρπ πρὸς πσ. ὥστε καὶ ὡς δύο αἱ βγ μετὰ τᾶς αδ, πρὸς δύο τὰς αδ, μετὰ τᾶς βγ, οὕτως δύο αἱ ρπ μετὰ τᾶς πσ, πρὸς δύο τὰς πσ, μετὰ τᾶς πρ. ἀλλὰ δύο μὲν αἱ ρπ μετὰ τᾶς πσ, συναμφότερος ἐστὶν ἁ σρπ, τουτέστιν ἁ πε. δύο δὲ αἱ πσ μετὰ τᾶς πρ, συναμφότερος ἐστὶν ἁ ρπσ, τουτέστιν ἁ πζ. δέδεικται ἄρα τὰ προτεθέντα. ιγ



Αρχι-

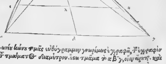
ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΚΩΝ Β.

α Εἴκα δύο χωρία περιεχόμενα ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἃ δυνάμεθα παρὰ τὰν δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραβαλεῖν, μὴ τὸ αὐτὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχοντα, τοῦ δὲ ἀμφοτέρων αὐτῶν συγκειμένου μεγέθεος, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν, διαιρέον οὕτως τὰν εἰρημέναν εὐθεῖαν, ὥστε τὰ τμάματα αὐτᾶς ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν τοῖς χωρίοις. ἔστω δύο χωρία τὰ αβ, γδ, οἷα εἴρηται, κέντρα δὲ αὐτῶν τοῦ βάρεος τὰ ε, ζ σαμεῖα, καὶ ὃν ἔχει λόγον τὸ αβ ποτὶ τὸ γδ, τοῦτον ἐχέτω ἁ ζθ πρὸς θε. δεικτέον ὅτι τοῦ δὲ ἀμφοτέρων τῶν αβ, γδ χωρίων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ θ σαμεῖον. ἔστω δὴ τᾶ μὲν εθ ἑκατέρα ἴσα τῶν ζη, ζκ, τᾶ δὲ ζθ, τουτέστι τᾷ ηε ἴσα ἁ ελ. ἔσται καὶ ἁ λθ τᾷ κθ ἴσα. καὶ



ἔτι ὡς ἁ λη πρὸς ηκ, οὕτως τὸ αβ πρὸς γδ. διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας. παραβεβλήσθω δὴ παρὰ τὰν λη τὸ σαμεῖον τοῦ αβ ἐφ᾽ ἑκάτερα τᾶς λη. ὥστε εἶμεν τὸ μν ἴσον τῷ αβ. ἔσται δὴ τοῦ μν κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ε σαμεῖον. συμπεπληρώσθω δὴ τὸ νξ. ἕξει δὲ τὸ μν πρὸς τὸ νξ λόγον, ὃν ἁ λη πρὸς ηκ. ἔχει δὲ καὶ τὸ αβ πρὸς τὸ γδ, τὸν τᾶς λη πρὸς ηκ λόγον. καὶ ὡς ἄρα τὸ αβ πρὸς γδ, οὕτως τὸ μν πρὸς τὸ νξ. καὶ ἐναλλάξ, ἴσον δὲ τὸ αβ τῷ μν. ἴσον ἄρα καὶ τὸ γδ τῷ νξ. καὶ κέντρον ἐστὶν αὐτοῦ τοῦ βάρεος τὸ ζ σαμεῖον. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶν ἁ λθ τᾷ θκ, καὶ ὅλα ἁ λκ τᾶς ἀπεναντίον πλευρᾶς δίχα τέμνει, τοῦ ὅλου τοῦ μπ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ θ σαμεῖον, ἀλλὰ τὸ μπ ἴσον τῷ δὲ ἀμφοτέρων τῶν μν, νξ. καὶ τοῦ δὲ ἀμφοτέρων τῶν αβ, γδ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ θ σαμεῖον.

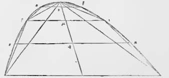
Εἴκα εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τρίγωνον ἐγγραφῇ, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον, καὶ πάλιν εἰς τὰ καταλειπόμενα τμάματα τρίγωνα ἐγγραφέωντι τὰς αὐτὰς βάσεις ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσι, καὶ ὕψος ἴσον, καὶ ἀεὶ εἰς τὰ καταλειπόμενα τμάματα τρίγωνα ἐγγραφέωντι τὸν αὐτὸν τρόπον, τὸ γενόμενον σχῆμα ἐν τῷ τμάματι γνωρίμως ἐγγράφεσθαι λεγέσθω. φανερὸν δὲ ὅτι τοῦ οὕτως ἐγγραφέντος σχήματος, αἱ τὰς γωνίας ἐπιζευγνύουσαι, τάς τε ἔγγιστα ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμάματος καὶ τὰς ἑξῆς, παρὰ τὰν βάσιν ἐσσοῦνται τοῦ τμάματος. καὶ δίχα τμαθήσονται ὑπὸ τᾶς τοῦ τμάματος διαμέτρου, καὶ τὰν διάμετρον τεμοῦντι εἰς τοὺς τῶν ἑξῆς περισσῶν ἀριθμῶν λόγους, ἑνὸς λεγομένου ποτὶ τᾷ κορυφᾷ τοῦ τμάματος, ὅπερ δέδεικται ἐν ταῖς τάξεσιν.

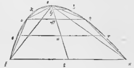


β Εἰ δὲ καὶ εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς εὐθύγραμμον γνωρίμως ἐγγραφῇ, τοῦ ἐγγραφέντος κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς τοῦ τμάματος διαμέτρου. ἔστω τμᾶμα τὸ αβγ, οἷον εἴρηται, καὶ ἐγγε-

ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ εὐθύγραμμον γνωρίμως τὸ α ε ζ η β θ ι κ γ. διάμετρος δὲ τοῦ τμήματος ἔστω ἁ β δ. δεικτέον ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ εὐθυγράμμου ἐστὶν ἐπὶ τᾶς β δ. ἐπεὶ γὰρ τοῦ μὲν α ε κ γ τραπεζίου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς λ δ ἐστί, τοῦ δὲ ε ζ ι κ τραπεζίου τὸ κέντρον ἐπὶ τᾶς μ λ. τοῦ δὲ ζ η θ ι τραπεζίου τὸ κέντρον ἐπὶ τᾶς μ ν. ἔτι δὲ καὶ τοῦ η β θ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς β ν. δῆλον ὅτι καὶ τοῦ ὅλου εὐθυγράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς β δ ἐστίν.

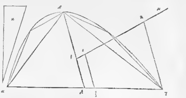
Εἴκα δύο τμαμάτων ὁμοίων περιεχομένων ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς εἰς ἑκάτερον εὐθύγραμμον ἐγγραφῇ γνωρίμως, ἔχωντι δὲ τὰ ἐγγραφέντα εὐθύγραμμα τὰς πλευρὰς ἴσας τῷ πλήθει ἀλλάλαις, τῶν εὐθυγράμμων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ὁμοίως τέμνοντι τὰς διαμέτρους τῶν τμαμάτων. ἔστω δύο τμάματα τὰ α β γ, ξ ο π. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὰ εὐθύγραμμα γνωρίμως καὶ πᾶσαι πλευραὶ τὸν ἀριθμὸν ἐχόντων ἀλλήλοις ἴσον. διάμετροι δὲ ἔστωσαν τῶν τμαμάτων αἱ β δ, ο ρ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ε κ, ζ ι, η θ. καὶ σ τ, υ φ, χ ψ. ἐπεὶ οὖν ἅ τε β δ διαιρεῖται ὑπὸ τῶν παραλλήλων εἰς τοὺς τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν περισσῶν λόγους, καὶ ἁ ο ρ ὁμοίως καὶ τῷ πλήθει τὰ τμάματα αὐτῶν ἴσα ἐντί, δῆλον ὡς τά τε τμάματα τῶν διαμέτρων τοῖς αὐτοῖς λόγοις ἐσσεῖται. καὶ αἱ παράλληλοι τοὺς αὐτοὺς λόγους ἑξοῦνται. καὶ τῶν τραπεζίων, τοῦ τε α ε κ γ. καὶ τοῦ ξ σ τ π τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐσσεῖται ἐπὶ τῶν λ δ, ω ρ εὐθειῶν ὁμοίως κείμενα, ἐπεὶ τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον αἱ α γ, ε κ ταῖς ξ π, σ τ. πάλιν δὲ καὶ τῶν ε ζ ι κ, σ υ φ τ τραπεζίων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐσσοῦνται, ὁμοίως διαιρέοντα τὰς λ μ, ω ϟ. καὶ ἐν τοῖς ζ θ, υ ψ τραπεζίοις τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐσσοῦνται ὁμοίως διαιρέοντα τὰς μ ν, ϟ ϡ. ἔσται δὲ καὶ τῶν η β θ, χ ο ψ τριγώνων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐπὶ τῶν β ν, ο ϡ ὁμοίως κείμενα. ἔχοντι δὲ αὐτὸν λόγον τὰ τραπέζια καὶ τὰ τρίγωνα, δῆλον οὖν ὅτι τοῦ ὅλου εὐθυγράμμου τοῦ ἐν τῷ α β γ τμάματι γεγραμμένου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ὁμοίως διαιρεῖ τὰν β δ. καὶ τοῦ ἐν τῷ ξ ο π τμάματι ἐγγεγραμμένου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τὰν ο ρ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.





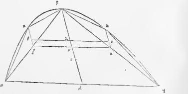
Παντὸς τμάματος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς τοῦ τμάματος διαμέτρου. ἔστω τμᾶμα ὡς εἴρηται τὸ α β γ, ἁ διάμετρος ἔστω ἁ β δ. δεικτέον ὅτι τοῦ εἰρημένου τμάματος, κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς β δ. εἰ γὰρ μή, ἔστω τὸ ε. καὶ δι' αὐτοῦ ἄχθω παρὰ τὰν β δ ἁ ε ζ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τμᾶμα τρίγωνον τὸ α β γ, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον καὶ ὕψος ἴσον. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ γ ζ πρὸς δ ζ, τοῦτον ἐχέτω τὸ α β γ τρίγωνον πρὸς τὸ κ χωρίον. ἐγγεγράφθω δὲ καὶ εὐθύγραμμον εἰς τὸ τμᾶμα γνωρίμως. ὥστε τὰ περιλειπόμενα τμάματα ἐλάσσονα εἶμεν τοῦ κ. τοῦ δὲ ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς β δ. ἔστω τὸ θ. καὶ ἐπεζεύχθω ἁ θ ε, καὶ ἐκβεβλήσθω. καὶ παρὰ τὰν β δ ἄχθω ἁ γ λ. δῆλον δὲ ὅτι μείζονα λόγον ἔχει τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τῷ τμάματι ποτὶ τὰ λειπόμενα τμάματα, ἢ τὸ α β γ τρίγωνον ποτὶ τὸ κ. ἀλλ' ἐστὶ ὡς τὸ α β γ τρίγωνον ποτὶ τὸ κ, οὕτως ἁ γ ζ πρὸς ζ δ. καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον πρὸς τὰ περιλειπόμενα τμάματα μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ γ ζ πρὸς ζ δ, τουτέστιν ἁ λ ε πρὸς ε θ. ἐχέτω οὖν ἁ μ ε πρὸς ε θ τὸν αὐτὸν λόγον τοῦ ἐγγεγραμμένου

μένου περὶ τὰ τμάματα. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ε κέντρον τοῦ ὅλου τμάματος, τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου ἐν αὐτῷ εὐθυγράμμου τὸ θ, δῆλον ὅτι λοιποῦ τοῦ συγκειμένου μεγέθεος ἐκ τῶν περιλειπομένων τμαμάτων τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐκβληθείσας τᾶς θ ε, καὶ ἀπολαφθείσας τινὸς εὐθείας, ἣ λόγον ἔχει ποτὶ τὰν θ ε, ὃν τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον πρὸς τὰ



περιλειπόμενα τμάματα. ὥστε εἴη κέντρον τοῦ συγκειμένου μεγέθεος ἐκ τῶν περιλειπομένων τμαμάτων, κέντρον τοῦ βάρεος τὸ μ σαμεῖον, ὅπερ ἄτοπον. τὰ γὰρ διὰ τοῦ μ παρὰ τὰν β δ ἀγομένας, ἐπὶ ταῦτα ἐσοῦνται πάντα τὰ περιλειπόμενα τμάματα. δῆλον οὖν, ὅτι ἐπὶ τᾶς β δ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος.

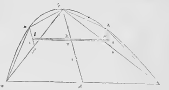
ε Εἴκα εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, εὐθύγραμμον ἐγγραφῇ γνωρίμως, τοῦ ὅλου τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐγγύτερόν ἐστι τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμάματος, ἢ τὸ τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου κέντρον. ἔστω τὸ α β γ τμᾶμα, οἷον εἴρηται. διάμετρος δ᾽ αὐτοῦ, ἁ δ β. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον πρῶτον γνωρίμως τὸ α β γ, καὶ τετμήσθω ἁ β δ κατὰ τὸ ε. ὥστε εἶμεν διπλασίαν τὰν β ε τᾶς ε δ, ἐστὶν οὖν τοῦ α β γ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ε σαμεῖον. τετμάσθω δὲ δίχα ἑκατέρα τᾶν α β, β γ, κατὰ τὰ ζ, η. καὶ διὰ τῶν ζ, η παρὰ τὰν β δ ἄχθωσαν αἱ ζ κ, λ η. ἔσται ἄρα τοῦ μὲν α κ β τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ζ κ. τοῦ δὲ β γ λ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς η λ. ἔστω δὲ τὰ θ, ι. καὶ



ἐπεζεύχθω ἁ θ ι, ζ η. καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ θ ζ η ι, καὶ ἴσα ἐστὶ τᾶ ζ ν ἁ ν η, ἔστιν ἄρα ἁ χ θ ἴσα τᾶ χ ι. ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α κ β, β λ γ τμαμάτων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος εἶμεν ἐπὶ μέσας τᾶς θ ι. ἐπειδήπερ ἴσα ἐντὶ τμάματα, τουτέστι τὸ χ σαμεῖον. ἐπεὶ δὲ τοῦ μὲν α β γ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ ε σαμεῖον, τοῦ δὲ συγκειμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α κ β, λ γ τὸ χ, δῆλον οὖν ὅτι ὅλου τοῦ τμάματος τοῦ α β γ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς χ ε, τουτέστι μεταξὺ τῶν χ, ε σαμείων, ὥστε εἴη κα ἐγγύτερον τᾶς τοῦ τμάματος κορυφᾶς τὸ κέντρον τοῦ ὅλου τμάματος, ἢ τοῦ ἐγγραφομένου τριγώνου γνωρίμως.

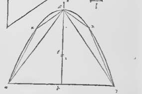
Ἐγγεγράφθω πάλιν εἰς τὸ τμᾶμα πεντάγωνον εὐθύγραμμον γνωρίμως τὸ α κ β λ γ. καὶ ἔστω τοῦ μὲν ὅλου τμάματος διάμετρος ἁ β δ. ἑκατέρου δὲ τῶν τμαμάτων, ἑκατέρα τῶν κ ζ, λ η διαμέτρων. καὶ ἐπεὶ ἐν τῷ α κ β τμάματι ἐγγέγραπται εὐθύγραμμον γνωρίμως, τοῦ ὅλου τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος εἶμεν ἐγγύτερον τᾶς κορυφᾶς, ἢ τὸ τοῦ εὐθυγράμμου. ἔστω οὖν τοῦ μὲν α κ β τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ θ, τοῦ δὲ τριγώνου τὸ ι. πάλιν δὲ ἔστω τοῦ μὲν β λ γ τμάματος, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ μ, τοῦ δὲ τριγώνου τὸ ν, καὶ ἐπεζεύχθω τὰ θ μ, ι ν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἁ θ χ τᾶ χ μ,

τᾶς χμ, ἃ δεῖ τᾶς τν. ἀλλὰ καὶ τριγώνου τῶ ακβ ἴσον ἐστὶ τὸ βλγ. τμᾶμα δὲ τὸ ακβ τμάματι τῷ βλγ. δέδεικται γὰρ ἐν ἄλλοις, τὰ τμάματα ἐπίτριτα εἶμεν τῶν τριγώνων. ἐπεὶ οὖν τοῦ μὲν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ακβ, βλγ τμαμάτων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον τοῦ βάρεος τὸ χ. τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ακβ, βλγ τριγώνων τὸ τ, πάλιν οὖν ἐπεὶ τοῦ αβγ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ ε. τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ακβ, βλγ τμαμάτων, τὸ χ, δῆλον ὡς τοῦ ὅλου τοῦ αβγ τμάματος



τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς χε τμαθείσας οὕτως, ὥστε ὃν ἔχει λόγον τὸ αβγ τρίγωνον ποτὶ τὰ συναμφότερα τὰ ακβ, βλγ τμάματα, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν τὸ τμᾶμα αὐτᾶς, τὸ πέρας ἔχον τὸ χ, ποτὶ τὸ ἔλασσον τμᾶμα. τοῦ δὲ ακβλγ πενταγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ τᾶς ετ εὐθείας τμαθείσας οὕτως, ὥστε ὃν ἔχει λόγον τὸ αβγ τρίγωνον ποτὶ τὰ ακβ, βλγ τρίγωνα, τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον τὸ τμᾶμα αὐτᾶς τὸ πέρας ἔχον τὸ τ ποτὶ τὸ λοιπόν. ἐπεὶ οὖν μείζονα λόγον ἔχει τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὰ καβ, λβγ τρίγωνα, ἢ ποτὶ τμάματα. δῆλον οὖν ὅτι τοῦ αβγ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος, ἐγγύτερον ἐστὶ τῆς β κορυφῆς, ἢ τὸ τοῦ ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου, καὶ ἐπὶ πάντων εὐθυγράμμων, τῶν ἐγγραφομένων ἐν τὰ τμάματα γνωρίμως ὁ αὐτὸς λόγος.

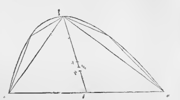
Τμάματος δοθέντος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, δυνατόν ἐστι τὸ τμᾶμα εὐθύγραμμον γνωρίμως ἐγγράψαι, ὥστε τὰν μεταξὺ εὐθεῖαν τῶν κέντρων τοῦ βάρεος τοῦ τμάματος καὶ τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου, ἐλάσσονα εἶμεν τᾶς προτεθείσας εὐθείας. δεδόσθω τμᾶμα τὸ αβγ, οἷον εἴρηται. οὗ κέντρον ἔστω τοῦ βάρεος τὸ θ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον γνωρίμως τὸ αβγ. καὶ ἔστω ἁ προτεθεῖσα εὐθεῖα ἁ ζ, καὶ ὃν λόγον ἔχει ἁ βθ πρὸς ζ, τοῦτον τὸν λόγον ἐχέτω τὸ αβγ τρίγωνον, πρὸς τὸ κ χωρίον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ αβγ τμᾶμα εὐθύγραμμον γνωρίμως τὸ ακβλγ, ὥστε τὰ περιλειπόμενα τμάματα ἐλάσσονα εἶμεν τοῦ κ. καὶ ἔστω τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ε, φαμὶ δὴ τὰν θε ἐλάσσονα εἶμεν τᾶς ζ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴσα ἐστὶν ἢ μείζων. ἐπεὶ δὲ τὸ ακβλγ εὐθύγραμμον πρὸς τὰ περιλειπόμενα τμάματα μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς κ, τουτέστιν ἢ θβ πρὸς ζ. ἔχει δὲ καὶ ἁ βθ πρὸς ζ οὐκ ἐλάσσονα λόγον, ἢ ὃν ἔχει πρὸς θε. διὰ τὸ μὴ ἐλάσσονα εἶμεν τὰν θε τᾶς ζ. πολλῷ ἄρα τὸ ακβλγ εὐθύγραμμον πρὸς τὰ περιλειπόμενα τμάματα μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ βθ πρὸς θε. ὥστε ἐὰν ποιῶμεν, ὡς τὸ ακβλγ εὐθύγραμμον πρὸς περιλειπόμενα τμάματα, οὕτως ἄλλαν τινὰ πρὸς θε, ἔσται μείζων τᾶς βθ. καὶ



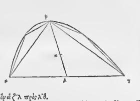
ἔστω ἁ θη. ἐπεὶ οὖν τοῦ αβγ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ θ, εὐθυγράμμου δὲ τοῦ ακβλγ τὸ ε, ἐκβληθείσας τᾶς εθ, καὶ ἀπολαφθείσας τινὸς εὐθείας ἐχούσας λόγον πρὸς τὰν εθ, ὃν τὸ ακβλγ εὐθύγραμμον πρὸς τὰ περιλειπόμενα τμάματα, ἔσται μείζων τᾶς θβ. ἐχέτω οὖν ἁ ηθ πρὸς θε

τὸ κ ἄρα κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν περιλειπομένων τμαμάτων, ὅπερ ἀδύνατον. τᾶς γὰρ διὰ τοῦ κ ἀχθείσας παρὰ τὰν α γ ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἐστὶ τὸ τμᾶμα, δηλονότι ἁ β ε ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ζ. ἔδει δὲ τοῦτο δεῖξαι.

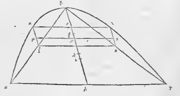
ζ Δύο τμαμάτων ὁμοίων περιεχομένων ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, τὰ κέντρα τῶν βαρέων εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τέμνοντι τὰς διαμέτρους. ἔστω δύο τμάματα, οἷα εἴρηται, τὰ α β γ, ε ζ η. ὧν διάμετροι αἱ β δ, ζ θ. καὶ ἔστω τοῦ μὲν α β γ τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ κ σαμεῖον, τοῦ δὲ ε ζ η τὸ λ. δεικτέον ὅτι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τέμνοντι τὰς διαμέτρους τὰ κ, λ. εἰ γὰρ μή, ἔστω ὡς ἁ κ β πρὸς κ δ, οὕτως ἁ ζ μ πρὸς θ μ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ε ζ η τμᾶμα εὐθύγραμμον γνωρίμως, ὥστε τὰν μεταξὺ τοῦ κέντρου τοῦ τμάματος καὶ τοῦ



ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου ἐλάσσονα εἶμεν τᾶς λ μ. καὶ ἔστω τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ξ σαμεῖον. ἐγγεγράφθω δὲ εἰς τὸ α β γ τμᾶμα τῷ ἐν τῷ ε ζ η ἐγγεγραμμένῳ εὐθυγράμμῳ ὅμοιον εὐθύγραμμον, τουτέστιν ὁμοίως γνωρίμως, οὗ κέντρον τοῦ βάρεος τᾶς κορυφᾶς ἐγγύτερον ἤπερ τοῦ τμάματος, ὅπερ ἀδύνατον. δῆλον οὖν ὅτι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἁ β πρὸς κ δ, ὃν ἁ ζ λ πρὸς λ θ.



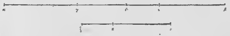
η Παντὸς τμάματος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, κέντρον τοῦ βάρεος διαιρεῖ τὰν τοῦ τμάματος διάμετρον, ὥστε εἶμεν ἡμιόλιον τὸ μέρος αὐτᾶς τὸ ποτὶ τᾶ κορυφᾶ τοῦ τμάματος, τοῦ ποτὶ τὰν βάσιν. ἔστω τὸ α β γ τμᾶμα, οἷον ὡς εἴρηται, διάμετρος δ' αὐτοῦ ἔστω ἁ β δ. κέντρον δὲ τοῦ βάρεος τὸ θ σαμεῖον. δεικτέον ὅτι ἡμιόλιά ἐστιν ἁ β θ τᾶς θ δ. ἐγγεγράφθω δὴ τὸ α β γ τμᾶμα γνωρίμως τρίγωνον τὸ α β γ οὗ κέντρον τοῦ βάρεος ἔστω τὸ ε. καὶ τετμάσθω δίχα ἑκατέρα τῶν α β, β γ, κατὰ τὰ ζ η, καὶ ἄχθωσαν παρὰ τὰν β δ,



αἱ κ ζ, η λ. διάμετροι ἄρα γίνοντι τῶν α κ β, β λ γ τμαμάτων. ἔστω δὴ τοῦ μὲν α κ β τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ μ, τοῦ δὲ β λ γ τὸ ν. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζ η, μ ν, κ λ. τοῦ ἄρα ἐξ ἀμφοτέρων τμαμάτων συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ χ. καὶ ἐπεὶ δή ἐστιν ὡς ἁ β θ πρὸς θ δ, οὕτως

ἁ ΚΜ ποτὶ ΜΖ. καὶ συνθέντι καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΚΖ, οὕτως ἁ ΘΔ ποτὶ τὰν ΜΖ. ἁ δὲ ΒΔ τετραπλασίων τᾶς ΚΖ· τοῦτο γὰρ ὕστερον δείκνυται, οὗ σημεῖόν ἐστι τὸ Θ. τετραπλασίων ἄρα καὶ ἁ ΔΘ τᾶς ΜΖ. ὥστε καὶ λοιπὰ ἁ ΒΘ λοιπᾶς τᾶς ΚΜ, τουτέστι τᾶς ΣΧ τετραπλασίων. καὶ λοιπὸν ἄρα συναμφότερα ἁ ΒΣ, ΧΘ τριπλασίων τᾶς ΣΧ. ἔστω τριπλασία ἁ ΒΣ τᾶς ΣΞ. καὶ ἁ ΧΘ ἄρα τᾶς ΞΧ ἐστὶ τριπλασία. καὶ ἐπεὶ τετραπλασίων ἁ ΒΔ τᾶς ΒΣ, καὶ τῶς ὕστερον δείκνυται. ἁ ΒΣ τᾶς ΣΞ τριπλασίων. ἁ ΞΒ ἄρα τᾶς ΒΔ τρίτον μέρος ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἁ ΕΔ τᾶς ΔΒ τρίτον μέρος. ἐπειδήπερ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐστὶ τὸ Ε, καὶ λοιπὰ ἄρα ἁ ΞΕ τρίτον μέρος τᾶς ΒΔ. καὶ ἐπεὶ τοῦ μὲν ὅλου τμάματος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Θ σαμεῖον, τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΑΚΒ, ΒΛΓ τμαμάτων συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Χ, τοῦ δὲ ΑΒΓ τριγώνου τὸ Ε. ἐσσεῖται ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὰ καταλειπόμενα τμάματα, οὕτως ἁ ΧΘ πρὸς ΘΕ. τριπλάσιον δὲ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῶν τμαμάτων. ἐπειδήπερ τὸ ὅλον τμᾶμα ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. τριπλασία ἄρα καὶ ἁ ΧΘ τᾶς ΘΕ. ἐδείχθη δὲ ἁ ΧΘ τριπλασία καὶ τᾶς ΧΞ. πενταπλασία ἄρα ἐστὶν ἁ ΞΕ τᾶς ΕΘ. τουτέστιν ἁ ΔΕ τᾶς ΕΘ. ἴσα γὰρ ἐντὶ αὐταῖ. ὥστε ἑξαπλασία ἐστὶν ἁ ΔΘ τᾶς ΘΕ. καὶ ἐντὶ τᾶς ΔΕ τριπλασία ἁ ΒΔ. ἁμιολία ἄρα ἐντὶ ἁ ΒΘ τᾶς ΘΔ.

Εἴκα τέσσαρες γραμμαὶ ἀνὰ λόγον ἔωντι ἐν τᾷ συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ ἐλαχίστα ποτὶ τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἐλαχίστας, τοῦτον ἔχουσά τις λαφθῇ ποτὶ τὰ τρία πεμπτημόρια τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἀνὰ λόγον τᾶς τρίτας. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ἴσα τᾷ τε διπλασίᾳ τᾶς μεγίστας τᾶς ἀνὰ λόγον, καὶ τᾷ τετραπλασίᾳ τᾶς δευτέρας, καὶ τᾷ ἑξαπλασίᾳ τᾶς Γ, καὶ τᾷ Γ τᾶς Δ, ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ τε Ε τᾶς μεγίστας, καὶ τᾷ Ι τᾶς Β, καὶ τᾷ Ι τᾶς Γ, καὶ τᾷ πενταπλασίᾳ τᾶς Δ, τοῦτον ἔχουσά τις λαφθῇ ποτὶ τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἀνὰ λόγον τᾶς τρίτας, συναμφότεραι αἱ λαφθεῖσαι ἐσσοῦνται δύο πεμπτημόρια τᾶς μεγίστας. ἔστωσαν τέσσαρες γραμμαὶ ἀνὰ λόγον αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ. καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἁ ΒΕ πρὸς ΕΑ, τοῦτον ἐχέτω ἁ ΖΗ ποτὶ τὰ τρία πέμπτα τᾶς ΑΔ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ἴσα τᾷ Β τᾶς ΑΒ, καὶ Δ τᾶς ΒΓ, καὶ Ϛ τᾶς ΒΔ, καὶ Γ τᾶς ΒΕ, ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ Ε τᾶς ΑΒ, καὶ Ι τᾶς ΓΒ, καὶ Ι τᾶς ΒΔ, καὶ Ε τᾶς ΒΕ, τοῦτον ἐχέτω τὸν λόγον ἁ ΗΘ ποτὶ τὰν ΑΔ. δεικτέον ὅτι ἁ ΖΘ δύο



πεμπταμόριά ἐντι τᾶς ΑΒ. ἐπεὶ γὰρ ἀνὰ λόγον ἐντὶ αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ, καὶ αἱ ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἐντί. καὶ συναμφότερος ἁ ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὰν ΒΔ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ΑΔ ποτὶ τὰν ΔΕ. καὶ συναμφότερος ἁ ΒΔ, ΒΓ ποτὶ τὰν ΕΒ. καὶ πάντα πρὸς πάντα. τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει ἁ ΑΔ ποτὶ τὰν ΔΕ, ὃν ἁ ἴσα τᾷ τε Β τᾶς ΑΒ, καὶ τᾷ Γ τᾶς ΓΒ, καὶ ἁ ΔΒ ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ τε Β, τᾶς ΒΔ καὶ τὰν ΒΕ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ἴσα τᾷ τε Β τᾶς ΑΒ, καὶ τᾷ Δ τᾶς ΒΓ, καὶ τᾷ Δ τᾶς ΒΔ, καὶ τᾷ Β τᾶς ΒΕ, ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ τε Β τᾶς ΔΒ, καὶ τὰν ΕΒ, τοῦτον ἔξει ἁ ΔΑ πρὸς ἐλάσσονα τᾶς ΔΕ. ἐχέτω οὖν πρὸς ΔΘ. καὶ ἀμφότεραι δὲ ποτὶ τὰς πρώτας αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον. ἕξει οὖν ἁ ΕΑ πρὸς ΑΔ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ἴσα τᾷ τε Β τᾶς ΑΒ, καὶ Δ τᾶς ΓΒ, καὶ Ϛ τᾶς ΒΔ, καὶ Γ τᾶς ΒΕ, πρὸς τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς Β συναμφοτέρας τᾶς ΑΒ, ΕΒ, καὶ Δ συναμφοτέρου τᾶς ΓΒ, ΒΔ. ἔχει δὲ καὶ ἁ ΑΔ πρὸς ΗΘ, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ Ε συναμφοτέρου τᾶς ΑΒ, ΒΕ, μετὰ τᾶς Ι συναμφοτέρου τᾶς ΓΒ, ΒΔ, πρὸς τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς Β τᾶς ΑΒ, καὶ τᾶς Δ τᾶς ΓΒ, καὶ τᾶς Γ τᾶς ΕΒ, καὶ Ϛ τᾶς ΒΔ. ἀνομοίως δὲ τῶν λόγων τεταγμένων, τουτέστιν ἐντεταραγμένων ἀναλογία, δι' ἴσου τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ΘΑ πρὸς ΗΘ, ὃν ἁ πενταπλασία συναμφοτέρου τᾶς ΑΒ, ΒΕ, μετὰ τᾶς Ι τᾶς ΓΒ, ΒΔ. πρὸς τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας συναμφοτέρας τᾶς ΑΒ, ΒΕ, καὶ τᾶς τετραπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΓΒ, ΒΔ. ἀλλ' ἁ συγκειμένα

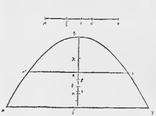
e 3 ἔκ τε

ἐκ τε τᾶς ε̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, μετὰ τᾶς ϛ̄ συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ. πρὸς τὰν συγκειμέναν ἐκ τε τᾶς β̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ, λόγον ἔχει ὃν πέντε πρὸς δύο, καὶ ἁ αο πρὸς ηθ λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. πάλιν ἐπεὶ ἁ οδ πρὸς δε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ εβ, μετὰ τᾶς β̄ τᾶς βδ, πρὸς τὰν ἴσαν τᾷ συγκειμένᾳ ἐκ τε τᾶς β̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, μετὰ τᾶς δ̄ συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ. δεῖ δὲ καὶ ὡς ἁ αδ πρὸς δε, οὕτως ἁ συγκειμένα ἐκ τε τᾶς β̄ τᾶς αβ, καὶ γ̄ τᾶς γβ, καὶ τᾶς β̄ δ ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ τε εβ, καὶ τᾷ ϛ̄ τᾶς βδ. ἀνομοίως οὖν τῶν λόγων τεταγμένων, τουτέστι τεταραγμένας οὔσας τᾶς ἀναλογίας, δι' ἴσου δεῖν ὡς ἁ οδ πρὸς δε, οὕτως ἁ β̄ τᾶς αβ, μετὰ τᾶς γ̄ τᾶς βγ. καὶ ἁ β̄ δ πρὸς τὰν συγκειμέναν ἐκ τᾶς β̄, συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, καὶ τᾶς δ̄ τᾶς γβ, βδ. ὥστε καὶ ὡς ἁ εο πρὸς εδ δεῖν, οὕτως ἁ γβ μετὰ τᾶς γ̄ τᾶς βδ, καὶ β̄ τᾶς εβ, πρὸς τὰν β̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἁ δε πρὸς εβ, οὕτως ἅ τε αγ πρὸς γβ, ἐπεὶ καὶ κατὰ σύνθεσιν καὶ ἁ γ̄ τᾶς γδ, πρὸς τὰν γ̄ τᾶς δβ, καὶ ἁ β̄ τᾶς δε, πρὸς τὰν β̄ τᾶς εβ, ὥστε καὶ ἁ συγκειμένα ἐκ τε τᾶς αγ, καὶ ἁ γ̄ τᾶς γδ, καὶ β̄ τᾶς δε, πρὸς τὰν συγκειμέναν ἐκ τε τᾶς γβ, καὶ γ̄ τᾶς δβ, καὶ ϛ̄ τᾶς εβ. ἀνομοίως οὖν πάλιν τῶν λόγων τεταγμένων, τουτέστιν ἐν τεταραγμένᾳ ἀναλογίᾳ, δι' ἴσου τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ εο πρὸς εβ, ὃν ἁ αγ μετὰ τᾶς γ̄ τᾶς γδ, καὶ β̄ τᾶς δε, πρὸς διπλασίαν συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, μετὰ τᾶς δ̄ συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ. ὅλα οὖν ἁ οβ πρὸς τὰν εβ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἴσα τᾷ τε γ̄ τᾶς αβ μετὰ τᾶς ϛ̄ τᾶς γβ, καὶ τᾷ γ̄ τᾶς βδ πρὸς τὰν β̄, συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, μετὰ τᾶς δ̄ συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ. καὶ ἐπεὶ αἵ τε εδ, δγ, γα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἐντί, καὶ συναμφότερος ἑκάστα τῶν εβ, βδ, δβ, βγ, γβ, γα. ἔσται καὶ ὡς ἁ εδ πρὸς δα, οὕτως συναμφότερος ἁ εβ, βδ, πρὸς συναμφότερον τὰν δβ, βγ, μετὰ τᾶς συναμφοτέρου τᾶς γβ, βα. καὶ συνθέντι ἄρα δεῖν ὡς ἁ εα πρὸς αδ, οὕτως συναμφότερος ἁ εβ, βδ, μετὰ συναμφοτέρου τᾶς αβ, βγ καὶ συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ. ὃ δεῖ συναμφότερος ἁ εβα, μετὰ τᾶς β̄ συναμφοτέρου τᾶς δβ, βγ, πρὸς συναμφότερον τὰν βδ, βα, μετὰ τᾶς β̄ τᾶς βγ. ὥστε καὶ ἁ β̄ πρὸς τὰν β̄ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, τουτέστιν ὡς ἁ εα πρὸς αδ, οὕτως ἁ β̄ συναμφοτέρου τᾶς εβ, βα, μετὰ τᾶς δ̄ συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ, πρὸς τὰν β̄, συναμφοτέρου τᾶς αβ, βδ, μετὰ τᾶς δ̄ τᾶς γβ. ὥστε ἁ εα πρὸς τὰ τρία πέμπτα τᾶς αδ, οὕτως ἁ συγκειμένα ἐκ τε τᾶς συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε καὶ δ̄ συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ, πρὸς τὰ τρία πέμπτα τᾶς συγκειμένας ἐκ τε τᾶς β̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ, βδ, καὶ δ̄ τᾶς γβ. ἀλλ' ὡς ἁ εα πρὸς τὰ τρία πέμπτα τᾶς αδ, οὕτως δεῖν ἁ εβ πρὸς ζη. καὶ ὡς ἄρα ἁ εβ πρὸς ζη, οὕτως ἁ β̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, μετὰ τᾶς δ̄ συναμφοτέρου τᾶς δβ, βγ, πρὸς τὰ τρία πέμπτα τᾶς συγκειμένας ἐκ τε τᾶς β̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ, βδ, μετὰ τᾶς δ̄ τᾶς γβ. ἐδείχθη δὲ ὡς ὁ οβ πρὸς εβ, οὕτως ἁ γ̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ, βδ, μετὰ τᾶς ϛ̄ τᾶς γβ, πρὸς τὰν β̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ. καὶ δι' ἴσου ἄρα δεῖν ὡς ἁ οβ, οὕτως ἁ συγκειμένα ἐκ τε τᾶς γ̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ, βδ, καὶ ϛ̄ τᾶς γβ, πρὸς τὰ τριάπεμπτα τᾶς συγκειμένας ἐκ τε τᾶς β̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ, βδ, καὶ δ̄ τᾶς γβ. ἀλλὰ ἁ συγκειμένα ἐκ τε τᾶς γ̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ, βδ, καὶ ϛ̄ τᾶς γβ, πρὸς μὲν τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς β̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ, βδ, τᾶς γβ, λόγον ἔχει ὃν τρία πρὸς δύο. πρὸς δὲ τὰ τρία πέμπτα τᾶς αὐτᾶς λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. ἐδείχθη δὲ καὶ ἁ αο πρὸς ηθ λόγον ἔχουσα, ὃν πέντε πρὸς δύο. καὶ ὅλα ἄρα ἁ βα πρὸς ὅλαν τὰν ζθ, λόγον ἔχει ὃν πέντε πρὸς δύο, εἰ δὲ τοῦτο, δύο πεμπτημορία ἐντὶ ἁ ζθ τᾶς αβ, ὅπερ ἔδει.

ι Παντὸς τμάματος ἀπὸ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἀφαιρουμένου, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας ἐστὶν ἃ διάμετρός ἐστι τοῦ τόμου, τὸν δὲ τρόπον κείμενον, διαιρεθείσας τᾶς εὐθείας εἰς ἴσα πέντε τῶν μέσου πεμπτημορίων. ὥστε τὸ τμᾶμα αὐτοῦ τὸ ἐγγύτερον τᾶς ἐλάσσονος βάσιος τοῦ τόμου ποτὶ τὸ λοιπὸν τμᾶμα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ ἡμίσεος τᾶς μείζονος τῶν βάσεων τοῦ τόμου, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν συναμφοτέρᾳ τᾷ τε διπλασίᾳ τᾶς ἐλάσσονος τῶν βάσεων, καὶ τᾷ μείζονι ποτὶ τὸ στερεὸν, τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ ἡμίσεος τᾶς ἐλάσσονος τᾶν βάσεων τοῦ τόμου, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἀμφοτέρας, τᾷ τε διπλασίᾳ τᾶς μείζονος καὶ τᾷ ἐλάσσονι αὐτᾶν. ἔστωσαν ὀρθογωνίου κώνου τομαὶ δύο εὐθείαι αἱ αγ, δε. διάμετρος δὲ ἔστω τοῦ αβγ τμάματος, ἁ βζ. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ τοῦ αδεγ διάμετρος ἐστὶν ἁ ηζ. καὶ αἱ μὲν αγ, δε παράλληλοι ἐντὶ τᾷ κατὰ τὸ β ἐφαπτομένᾳ τᾶς τομᾶς. καὶ τᾶς ηζ εὐθείας, διαιρεθείσας εἰς πέντε ἴσα μέσον ἔστω πεμπτημόριον ἁ θκ. ἁ δὲ θι πρὸς τὰν ικ, τὸν αὐ-

τόν

τὸν ἔχεται λόγον, ὃν ἔχει τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ τᾶς α ζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις ταῖς τε β τᾶς δ κ, καὶ τᾷ α ζ, ποτὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ τᾶς δ κ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τᾷ β τᾶς α ζ, καὶ τᾷ δ κ. δεικτέον ὅτι τοῦ α δ γ τόμου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ ι σαμεῖον. ἔστω δὴ τᾷ μὲν ζ β ἴσα ἁ μν, τᾷ δὲ κ β ἴσα ἁ νο. καὶ εἰλήφθω ταῖν μὲν μν ο μετὰ ἀνάλογον ἁ ο ξ. τετάρτα δ᾽ ἀνὰ λόγον ἁ τν. καὶ ὡς τ μ πρὸς τ γ, οὕτως ἁ ζ θ πρὸς τινα ἀπὸ τοῦ ι, ὅπου ἂν ἔρχηται τὸ ἕτερον σαμεῖον.



οὐδὲν γὰρ διαφέρει, εἴτε καὶ μεταξὺ τῶν ζ, κ, εἴτε καὶ μεταξὺ τῶν κ, β, τὰν ι ρ. καὶ ἐπεὶ γὰρ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶ διάμετρός ἐστι τοῦ τμάματος ἁ ζ β. ἁ β ζ δὲ, ἤγουν ἀρχὴ ἐστὶ τῆς τομῆς, ἡ παρὰ τὴν διάμετρον ἦκται. αἱ δὲ α ζ, δ κ εἰς αὐτὴν τεταγμέναι εἰσὶ κατηγμέναι. ἐπειδὴ παράλληλοι εἰσὶ ταῖς ἀπὸ τοῦ β τᾶς τομᾶς ἐφαπτομένᾳ. εἰ δὲ τοῦτο, ἐστὶν ὡς ἁ α ζ πρὸς δ κ δυνάμει, οὕτως ἁ ζ β πρὸς β κ μάκει, τουτέστιν ἁ μν πρὸς νο. ὡς δὲ ἁ μν πρὸς νο μάκει, οὕτως ἁ μν πρὸς νξ δυνάμει. καὶ ὡς ἄρα ἁ α ζ πρὸς δ κ δυνάμει, οὕτως ἁ μν πρὸς νξ δυνάμει. ὥστε καὶ μάκει γὰρ τῷ αὐτῷ λόγῳ. καὶ ὡς ἄρα ὁ ἀπὸ α ζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δ κ κύβον, οὕτως ὁ ἀπὸ μν κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ νξ κύβον. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ὁ ἀπὸ α ζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δ κ κύβον, οὕτω τὸ β α γ τμᾶμα πρὸς τὸ δ β ε τμᾶμα. ὡς δὲ ὁ ἀπὸ μν κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ νξ κύβον, οὕτως ἁ μν πρὸς ντ. ὥστε καὶ διελόντι ἐστὶν ὡς ὁ α δ γ ε τομεὺς πρὸς τὸ δ β ε τμᾶμα, οὕτως ἁ μτ πρὸς ντ, τουτέστι τὰ γ ε τᾶς κ ζ πρὸς ο τ. καὶ ἐπεὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ α ζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμέναν, ἔκ τε τᾶς β τᾶς δ κ καὶ τᾶς α ζ, πρὸς τὸν ἀπὸ α ζ κύβον λόγον ἔχει, ὃν ἁ β τᾶς δ κ μετὰ τᾶς α ζ πρὸς ζ α. ὥστε καὶ ἁ β τᾶς νξ μετὰ τᾶς νμ, πρὸς νμ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ ἀπὸ α ζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δ κ κύβον, οὕτως ἁ μν πρὸς ο τ. ὡς δὲ ὁ ἀπὸ δ κ κύβος πρὸς τὸ στερεὸν, τὸ βάσιν μὲν ἔχον, τὸ ἀπὸ δ κ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς διπλασίας τῆς α ζ, μετὰ τᾶς δ κ, οὕτως ἁ δ κ πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς α ζ, καὶ τᾶς δ κ. ὥστε καὶ ἁ τν πρὸς τὴν συγκειμένην, ἔκ τε τᾶς β τᾶς ο ν καὶ τᾶς τν. γέγονεν οὖν τέσσαρα μεγέθη, τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ α ζ τετράγωνον, ὕψος δὲ ταὶ συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς δ κ, καὶ τᾶς α ζ. καὶ ὁ ἀπὸ α ζ κύβος, καὶ ὁ ἀπὸ δ κ κύβος, καὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ δ κ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην, ἔκ τε τῆς β τῆς α ζ, καὶ τῆς δ κ, τέτταρσι μεγέθεσιν ἀνάλογον σὺν δύο λαμβανομένοις, τῇ τε συγκειμένῃ ἔκ τε τῆς β τῆς ο ξ, καὶ τῆς νμ, καὶ ἑτέρου μεγέθους τῆς μο. καὶ ἄλλο ἑξῆς ἁ ντ. καὶ τελευταῖον ἡ συγκειμένη, ἔκ τε τῆς β τῆς νο, καὶ τῆς ντ. δι᾽ ἴσου ἄρα γίνεται, ὡς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ α ζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς δ κ, καὶ τῆς α ζ, πρὸς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ δ κ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς α ζ, καὶ τῆς δ κ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς β τῆς νξ, καὶ τῆς μν, πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς ο ο, καὶ τῆς ντ. ἀλλ᾽ ὡς τὸ εἰρημένον στερεὸν πρὸς τὸ εἰρημένον στερεὸν, οὕτως ἡ θ ι πρὸς ι κ. καὶ ὡς ἄρα ἡ θ ι πρὸς ι κ, οὕτως ἡ συγκειμένη πρὸς τὴν συγκειμένην. ὥστε καὶ συνθέντι, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ πενταπλάσια, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζ κ πρὸς ι κ, οὕτως ἡ πενταπλῆ συναμφοτέρου τῆς μντ, καὶ ι συναμφοτέρου τῆς ο ξ, ο ο, πρὸς τὴν β τῆς ο ν, καὶ τὴν ντ. καὶ ὡς ἡ ζ κ πρὸς ζ κ οὔσης αὐτῆς δύο πέμπτα, οὕτως ἡ ε συναμφοτέρου τῆς μντ, καὶ δεκαπλῆ

συναμ-

συναμφοτέρου τῆς ν ξ ο, πρὸς τὴν β συναμφοτέρου τῆς μ ν τ, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς ν ξ ο. ἔσται οὖν ὡς ζ η πρὸς ζ ι, οὕτως ἡ ε συναμφοτέρου τῆς μ ν τ, καὶ ι συναμφοτέρου τῆς ξ ν ο πρὸς τὴν συγκειμένην, ἔκ τε τῆς β τῆς μ ν, καὶ δ τῆς ν ξ, καὶ ε τῆς ο ν, καὶ γ τῆς ν τ. ἐπεὶ οὖν τέσσαρες εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνὰ λόγον αἱ μ ν ξ ο ν τ. καί ἐστιν ὡς μὲν ἡ ν τ πρὸς τ μ, οὕτως ἀλλημμένη τις ἡ ρ ι πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς ζ η, τουτέστι τῆς μ ο. ὡς δὲ ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς β τῆς ν μ, καὶ δ τῆς ν ξ, καὶ ε τῆς ν ο, καὶ γ τῆς ν τ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς ε συναμφοτέρου τῆς μ ν τ, καὶ ι συναμφοτέρου τῆς ξ ν ο, οὕτως ἑτέρα τις ἀλλημμένη ἡ ι ζ πρὸς τὴν ζ η, τουτέστι πρὸς τὴν μ ο, ἔσται διὰ τὰ πρότερον ἡ ρ ζ δύο πέμπτα τῆς μ ν. τουτέστι τῆς ζ β. ὥστε κέντρον βάρους ἐστὶ τοῦ α β γ τμήματος τὸ ρ σημεῖον. ἔστω δὴ καὶ τοῦ δ β ε τμάματος κέντρον βάρους τὸ χ σημεῖον. τοῦ α δ ε τόμου ἔσται τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς ἐπ' εὐθείας τῆς χ ρ, τὸν αὐτὸν πρὸς αὐτὴν λόγον ἐχούσης, ὃν ἔχει ὁ τομεὺς πρὸς τὸ λοιπὸν τμᾶμα. ἔστι δὲ τὸ ι σημεῖον. ἐπεὶ γὰρ τῆς μὲν ζ β τρία πέμπτα ἐστὶν ἡ β ρ, τῆς δὲ η β τρία πέμπτα ἐστὶν ἡ β χ. καὶ λοιπῆς ἄρα τῆς η ζ, τρία πέμπτα ἐστὶν ἡ χ ρ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς μὲν ὁ α δ ε γ τομεὺς πρὸς τὸ δ β ε τμᾶμα, οὕτως ἡ μ τ πρὸς ν τ. ὡς δὲ ἡ μ τ πρὸς τὴν ν τ, οὕτως τὰ τρία πέμπτα τῆς η ζ, ἅ τις ἐστὶν ἡ χ ρ πρὸς ρ ι. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ὁ α δ ε γ τομεὺς πρὸς τὸ δ β ε τμᾶμα, οὕτως ἡ χ ρ πρὸς ρ ι. καὶ ἔστι μὲν τοῦ ὅλου τμάματος κέντρον τοῦ βάρους τὸ ρ σημεῖον, τοῦ δὲ δ β ε κέντρον βάρους τὸ χ. φανερὸν οὖν, ὅτι καὶ τοῦ δ ε γ τομέως τὸ κέντρον τοῦ βάρους τὸ ι σημεῖον.

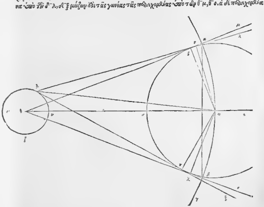
ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΨΑΜΜΙΤΗΣ.

Οἴονταί τινες βασιλεῦ Γέλων τοῦ ψάμμου τὸν ἄπειρον εἶμεν τῷ πλήθει. λέγω δὲ οὐ μόνον τοῦ περὶ Συρακούσας τε καὶ τὰν ἄλλαν Σικελίαν ὑπάρχοντος, ἀλλὰ καὶ τοῦ κατὰ πᾶσαν χώραν τάν τε οἰκημένην καὶ τὰν ἀοίκητον. * ἐντί τινες δὲ αὐτὸν ἄπειρον γνιμεν ἔχ' ὑπολαμβάνοντι, μηδένα μέντοι ταλικοῦτον κατωνομασμένον ὑπάρχειν, ὅς τις ὑπερβάλλει τὸ πλῆθος αὐτοῦ. οἱ δὲ οὐ † δοξάζοντες, δῆλον ὡς εἰ νοήσαιεν ἐκ τοῦ ψάμμου ταλικοῦτον ὄγκον συγκείμενον τὰ ἁλίκαν ὁ πᾶς γῆς ὄγκος ἀναπεπληρωμένων ἐν αὐτῷ τῶν τε πελαγέων πάντων, καὶ τῶν κοιλωμάτων τᾶς γᾶς ἴσον ὕψος τοῖς ὑψηλοτάτοις τῶν ὀρέων πολλαπλασίως μὴ γνωσοῦνται μηδ' ἐν ἀναρεθῆ ἐμμέναι ὑπερβάλλοντα τὸ πλῆθος αὐτοῦ. ἐγὼ δὲ πειρασοῦμαι τοῦτο δεικνύειν δι' ἀποδείξιων γεωμετρικῶν, αἷς παρακολουθήσεις, ὅτι τῶν ὑφ' ἁμῶν κατονομασμένων ἀριθμῶν, καὶ ἐνδεδομένων ἐν τοῖς ποτὶ Ζεύξιππον γεγραμμένοις, ὑπερβάλλοντί τινες οὐ μόνον τὸν τοῦ ψάμμου τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ γᾷ πεπληρωμένᾳ, καθάπερ εἴπαμεν, ἀλλὰ καὶ τὸν τοῦ μέγεθος ἴσον ἔχοντος τῷ κόσμῳ. κατέχεις δὲ διότι καλεῖται κόσμος ὑπὸ μὲν τῶν πλείστων ἀστρολόγων ἁ σφαῖρα, ἇς ἐστι κέντρον μὲν τὸ τᾶς γᾶς κέντρον. ἡ δὲ τοῦ κέντρου εὐθείᾳ τᾷ μεταξὺ τοῦ κέντρου τοῦ ἁλίου, καὶ τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς. ταῦτα γὰρ ἐν ταῖς γραφομέναις παρὰ τῶν ἀστρολόγων διακούσας Ἀρίσταρχος ὁ Σάμιος ὑποθεσίων ἐξέδωκεν γράψας, ἐν αἷς ἐκ τῶν ὑποκειμένων συμβαίνει τὸν κόσμον πολλαπλάσιον εἶμεν τοῦ νῦν εἰρημένου. ὑποτίθεται γὰρ τὰ μὲν ἀπλανῆ τῶν ἄστρων, καὶ τὸν ἅλιον μένειν ἀκίνητον, τὰν δὲ γᾶν περιφέρεσθαι περὶ τὸν ἅλιον κατὰ κύκλου περιφέρειαν, ὅς ἐστιν ἐν μέσῳ τῷ δρόμῳ κείμενος, τὰν δὲ τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τῷ ἁλίῳ κειμέναν τῷ μεγέθει ταλικαύταν εἶμεν, ἔστι ὥστε τὸν κύκλον καθ' ὃν τὰν γᾶν ὑποτίθεται περιφέρεσθαι, τοιαύταν ἔχειν ἀναλογίαν ποτὶ τὰν τῶν ἀπλανῶν ἀποστασίαν, οἵαν ἔχει τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν. τοῦτο δ' εὔδηλον, ὡς ἀδύνατόν ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ τὸ τῆς σφαίρας κέντρον οὐδὲν ἔχει μέγεθος, οὐδὲ λόγον ἔχειν οὐδένα ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τᾶς σφαίρας ὑπολαπτέον αὐτό. ἐκδεκτέον γὰρ τὸν Ἀρίσταρχον διανοεῖσθαι τόδε. ἐπειδὴ τὰν γᾶν ὑπολαμβάνομεν, ὥσπερ μὲν τὸ κέντρον τοῦ κόσμου, ὃν ἔχει λόγον ἁ γᾶ ποτὶ τὸν ὑφ' ἁμῶν εἰρημένον κόσμον, τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον τὰν σφαῖραν, ἐν ᾗ ἐστιν ὁ κύκλος καθ' ὃν τὰν γᾶν ὑποτίθενται περιφέρεσθαι, ποτὶ τὰν τῶν ἀπλανῶν ἄστρων σφαῖραν. τὰς ἀποδείξιας τῶν φαινομένων οὕτως ὑποκείμενον ἐναρμόζει. καὶ μάλιστα φαίνεται τὸ μέγεθος τᾶς σφαίρας, ἐν ᾇ ποιεῖται τὰν γᾶν κινουμέναν ἴσον ὑποτίθεσθαι τῷ ὑφ' ἁμῶν εἰρημένῳ κόσμῳ. φαμὲν δὴ ὦν, εἰ γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκαν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν εἶμεν καὶ ὥς τινας,

† οὕτως

ὄντας, δειχθεῖσι τῶν ἐν ἀρχαῖς τῶν κατονομαζίων ἐχόντων, ὑπερβάλλοντας τῷ πλήθει τόν καὶ τοῦ
τοῦ ψάμμου, τοῦ μεγέθεος ἔχοντος ἴσον τᾷ εἰρημένᾳ σφαίρᾳ. ὑποκειμένων τῶνδε, πρῶτον μὲν τὰν περίμε-
τρον τᾶς γᾶς εἶμεν, ὡς τῶν μυριάδων σταδίων καὶ μείζω, καὶ περὶ τῶν πειρωμένων ἀποδεικνύ-
ειν, καθὼς καὶ τὺ παρακολουθεῖς ἐοῦσαν αὐτάν, ὡς λ̄ μυριάδων σταδίων. ἐγὼ δὲ ὑπερβαλλό-
μενος καὶ θεὶς τὸ μέγεθος τᾶς γᾶς ὡς δεκαπλάσιον τοῦ ὑπὸ τῶν προτέρων δεδοξασμένων, τὰν
περίμετρον αὐτᾶς ὑποτίθεμαι εἶμεν, ὡς τῶν λ̄ λ σταδίων, καὶ μείζω μετὰ δὲ τοῦτο τὰν διάμε-
τρον τᾶς γᾶς μείζονα εἶμεν τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας. καὶ τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου μείζονα
εἶμεν τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς, ὁμοίως τὰ αὐτὰ λαμβάνων τοῖς πλείοσι τῶν προτέρων ἀστρολόγων.
μετὰ δὲ ταῦτα τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας, ὡς τριακονταπλασίαν
εἶμεν, καὶ μὴ μείζονα. καὶ περὶ τῶν προτέρων ἀστρολόγων Εὔδοξος μὲν, ὡς ἐννεαπλάσιον ἀποφαι-
νόμενος. Φειδίας δὲ ὁ ἀκούπατρος, ὡς δυωδεκαπλασίαν. Ἀρίσταρχος δὲ πεπειραμένος δεικνύ-
ειν, ὅτι ἐστὶν ἁ διάμετρος τοῦ ἁλίου τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας, μείζων μὲν ἢ ὀκτὼ καὶ δεκαπλα-
σίων, ἐλάττων δὲ ἢ εἰκοσαπλασίων. ἐγὼ δὲ ὑπερβαλλόμενος καὶ τοῦτον, ὅπως τὸ ὑποκείμε-
νον ἀμφιλόγου ἦ δεδειγμένον, ὑποτίθεμαι τὰν διάμετρον τᾶς σελήνας, ὡς τριακονταπλα-
σίας εἶμεν, καὶ μὴ μειζόνων. ποτὶ δὲ τούτοις τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου μείζονα εἶμεν τᾶς τοῦ χιλια-
γώνου πλευρᾶς, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου τῶν ἐν τῷ κόσμῳ. τοῦτο δὲ ὑποτίθεμαι. Ἀρί-
σταρχου μὲν εὑρηκότος τοῦ κύκλου τῶν ζωδίων τὸν ἅλιον φαινόμενον, ὡς τὸ εἰκοστὸν καὶ ἑπτακοσιοστόν. αὐ-
τὸς δὲ ἐπισκεψάμενος τόνδε τὸν τρόπον ἐπειράθην ὀργανικῶς λαβεῖν τὰν γωνίαν ὡς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρ-
μόζῃ τὰν κορυφὰν ἔχουσα ποτὶ τᾷ ὄψει, τὸ μὲν ὅμοιον ἀκριβὲς λαβεῖν οὐκ εὐχερές ἐστι, διὰ τὸ μήτε τὰν
ὄψιν, μήτε τὰς χεῖρας μήτε τὰ ὄργανα, δι' ὧν λαβεῖν ἀξιοπίστας εἶμεν τὸ ἀκριβὲς ἀποφαίνεσθαι.
περὶ δὲ τούτων ἐπὶ τοῦ παρόντος οὐκ εὔκαιρον μακύνειν, ἄλλως τε καὶ πλεονάκις τοιούτων ἐμπε-
φανισμένων. ἀπόχρη δὲ μοι εἰς τὰν ἀπόδειξιν τοῦ προκειμένου γωνίαν λαβεῖν, ἅ τις ἐστὶ μείζων τᾶς
γωνίας εἰς ἃν ὁ ἅλιος ἐναρμόζῃ τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ ὄψει, καὶ πάλιν ἄλλαν γωνίαν λαβεῖν,
ἅ τις ἐστὶν οὐκ ἐλάττων τᾶς γωνίας ἃς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζῃ τὰν κορυφάν, ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει τε-
θέντος οὖν μακροῦ κανόνος ἐπὶ πεδίου ὀρθοῦ ἐν τόπῳ κειμένου, ὅθεν ἤμελλεν ἀνατέλλειν ὁ ἅλιος ὁρᾶ-
σθαι, καὶ κυλίνδρου μικροῦ τορνευθέντος, καὶ τεθέντος ἐπὶ τὸν κανόνα ὀρθοῦ εὐθέως μετὰ τὰν ἀνα-
τολὰν τοῦ ἁλίου ἔπειτα ἰόντος αὐτοῦ ποτὶ τῷ ὁρίζοντι, καὶ δυναμένου τοῦ ἀντιβλέπεσθαι, ἐπεστρα-
φῆ ὁ κανὼν ἐς τὸν ἅλιον, καὶ ἁ ὄψις κατεστάθη ἐπὶ τὸ ἄκρον τοῦ κανόνος. ὁ δὲ κύλινδρος ἐν μέσῳ
κείμενος τοῦ τε ἁλίου καὶ τᾶς ὄψιος, ἐπεσκότει τῷ ἁλίῳ, ἀποχωριζόμενος τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ τᾶς ὄ-
ψιος ἐν ᾧ ἄρξατο παραφαίνεσθαι τοῦ ἁλίου μικροῦ ἐφ' ἑκάτερα τοῦ κυλίνδρου κατεστάθη ὁ κύλινδρος,
εἰ μὲν ὁμοίως συνέβαινεν τὰν ὄψιν ἀφ' ἑνὸς σαμείου βλέπειν, εὐθείαν ἀχθεῖσαν ἀπὸ ἄκρου τοῦ κανό-
νος ἐν ᾧ τόπῳ ἁ ὄψις κατεστάθη ἐπιψαύουσα τοῦ κυλίνδρου, ἁ περιεχομένα γωνία ὑπὸ τᾶν ἀχθεισᾶν
ἐν ἐλάσσων κα εἴς τᾶς γωνίας, εἰς ἃν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει διὰ τὸ
ὁρῆσθαι βλέπεσθαί τι τοῦ ἁλίου ἐφ' ἑκάτερα τοῦ κυλίνδρου. ἐπεὶ δ' αἱ ὄψιες οὐκ ἀφανῆ σημεῖον βλέπον-
τι, ἀλλὰ ἀπό τινος μεγέθεος ἐλάφθη τι μέγεθος στρογγύλον, οὐκ ἔλαττον ὄψιος. καὶ τεθέντος τοῦ
μεγέθεος ἐπὶ τὸ ἄκρον τοῦ κανόνος, ἐν ᾧ τόπῳ ἁ ὄψις κατεστάθη ἀχθεῖσαι εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι τοῦ με-
γέθεος καὶ τοῦ κυλίνδρου. ἁ οὖν περιεχομένα γωνία ὑπὸ τᾶν ἀχθεισᾶν ἐλάττων ἦς τᾶς γωνίας,
εἰς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει. τὸ δὲ μέγεθος τὸ οὐκ ἔλαττον ὄψιος, τοῦ-
δε τρόπον εὑρίσκεται. δύο κύλινδροι λαμβάνονται λεπτοὶ ἰσοπαχέες ἀλλήλοις, τὸ μὲν λευ-
κόν, τὸ δὲ οὔ. καὶ προστίθενται πρὸ τᾶς ὄψιος, τὸ μὲν λευκὸν ἀφεστακὸς ἀπ' αὐτᾶς, τὸ δὲ οὐ λευ-
κὸν ὡς ἔστι ἐγγυτάτω τᾶς ὄψιος, ὥστε καὶ θιγγάνειν τοῦ προσώπου. εἰ μὲν οὖν τὰ λαφθέντα κυλίν-
δρια λεπτότερα ἐόντι τᾶς ὄψιος, περιλαμβάνεται ὑπὸ τᾶς ὄψιος τὸ ἐγγὺς κυλίνδριον, καὶ ὁ-
ρᾶται ὑπ' αὐτᾶς τὸ λευκὸν εἰκόνα παραπολὺ λεπτοτέραν ἐόντι ταν, εἰ δέκα μὴ παραπολυ-
ρέα τινὰ τοῦ λευκοῦ ὁρῶνται ἀφ' ἑκάτερα τᾶς ἐγγὺς τᾶς ὄψιος. λαφθέντων δὲ τῶνδε τῶν
κυλίνδρων, ἔπειτα δι' ὧν πῶς τῷ πάχει ἐπισκοτεῖ τὸ ἕτερον αὐτῶν τῷ ἑτέρῳ, καὶ οὐ πλέονι τόπῳ
δὲ τηλικοῦτον μέγεθος ἁλίκον ἐστὶ τὸ πάχος τῶν κυλίνδρων τῶν ὑπὲρ ποιούντων μάλιστα πως
ἢ οὐκ ἔλαττον τᾶς ὄψιος, ὁ δὲ γωνία, οὐκ ἐλάττων τᾶς γωνίας εἰς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζεται κορυ-
φὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει. οὕτως ἐλάφθη ἀποσταθέντος ἀπὸ τοῦ κανονίου τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ τᾶς ὄψιος
τως ὡς ἐπισκοτεῖν τὸν κύλινδρον ὅλῳ ἁλίῳ, καὶ ἀχθεῖσαν εὐθεῖαν ἀπ' ἄκρου τοῦ κανόνος, ἐν ᾧ τό-
πῳ ἁ ὄψις κατεστάθη. ἐπιψαυουσᾶν τοῦ κυλίνδρου ἁ περιεχομένα γωνία ὑπὸ τᾶν ἀχθεισᾶν εὐθειᾶν
οὐκ ἐλάττων γίνεται τᾶς γωνίας, εἰς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει.

ταῖς δὴ γωνίαις ταῖς οὕτως λαφθείσαις καταμετρηθείσας ὀρθὰς γωνίας ἐγγύς, ἁ μὲν εἴη διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς ρξδ ἐλάττων ἢ ἓν μέρος τούτων. ἁ δὲ ἐλάττων διαιρεθείσα τᾶς ὀρθᾶς εἰς σ, μείζων ἢ ἓν μέρος τούτων. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ γωνία ἁ ἴσαν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει, ἐλάττων μέν ἐστιν, ἢ διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς, εἰς ρξδ. τούτων ἓν μέρος μείζων δὲ, ἢ διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς σ, τούτων ἓν μέρος. πεπιστευμένων δὲ τούτων δι' ὧν διάμετρος τοῦ ἁλίου μείζων ἐοῦσα τᾶς τοῦ χιλιαγωνίου πλευρᾶς, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου τᾶς ἐν τῷ κόσμῳ. νοείσθω γὰρ ἐπίπεδον ἐκβεβλημένον διά τε τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς, καὶ διὰ τᾶς ὄψιος, μικρὸν ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα ἐόντος τοῦ ἁλίου. τεμνέτω δὲ τὸ ἐκβεβλημένον ἐπίπεδον, τὸν μὲν κόσμον κατὰ τὸν αβγ κύκλον, τὰν δὲ γᾶν κατὰ τὸν δεζ. τὸν δὲ ἅλιον κατὰ τὸν ση κύκλον. κέντρον δὲ ἔστω τᾶς μὲν γᾶς τὸ θ, τοῦ δὲ ἁλίου τὸ κ, ὄψις δὲ ἔστω τὸ δ. καὶ ἄχθωσαν εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι τοῦ ση κύκλου. ἀπὸ μὲν τοῦ δ αἱ δλ, δξ. ἐπιψαυόντων δὲ, κατὰ τὸ ν καὶ τὸ τ. ἀπὸ δὲ τοῦ θ, αἱ θμ, θο. ἐπιψαυόντων δὲ κατὰ τὸ χ καὶ τὸ ρ. τὸν δὲ αβγ κύκλον τεμνόντων αἱ θμ, θο κατὰ τὸ α καὶ τὸ β. ἐστι δὴ μείζων ἁ θκ τᾶς δκ, ἐπεὶ ὑπόκειται ὁ ἅλιος ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα εἶμεν, ὥστε καὶ ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν δλ, δξ μείζων ἐστὶ τᾶς γωνίας τᾶς περιεχομένας ὑπὸ τῶν θμ, θο. ἁ δὲ περιεχομένα



γωνία ὑπὸ τᾶν δλ, δξ, μείζων μέν ἐστιν ἢ διακοσιοστὸν μέρος ὀρθᾶς. ἐλάττων δὲ, ἢ τᾶς ὀρθᾶς διαιρεθείσας εἰς ρξδ. τούτων ἓν μέρος, * ἴσον γωνίαι ἐστὶ τᾷ γωνίᾳ, εἰς ἃν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει. ὥστε καὶ ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν θμ, θο ἐλάττων ἐστὶν ἢ τᾶς ὀρθᾶς διαιρεθείσας εἰς ρξδ, τούτων ἓν μέρος. ἁ δὲ αβ εὐθεῖα ἐλάττων ἐστὶ τᾶς ὑποτεινούσας ἓν τμᾶμα διαιρεθείσας τᾶς τοῦ αβγ κύκλου περιφερείας εἰς χνϛ. ἁ δὲ τοῦ εἰρημένου πολυγωνίου περίμετρος ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ αβγ κύκλου, ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἢ τὰ μδ ποτὶ τὰ ζ. διὰ τὸ παντὸς πολυγωνίου ἐγγεγραμμένου ἐν κύκλῳ τὰν περίμετρον ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἐλάττονα λόγον ἔχειν, ἢ τὰ μδ ποτὶ τὰ ζ. ἐπίστασαι γὰρ δεδειγμένον ὑφ' ἁμῶν, ὅτι παντὸς κύκλου ἁ περιφέρεια μείζων ἐστὶν ἢ τριπλασίων τᾶς διαμέτρου, ἐλάσσονι ἢ ἑβδόμῳ μέρει, τᾶς δὲ ἐλάττω λόγον ἔχει, ἢ ἁ βα ποτὶ τὰν θκ. ἢ τὰ ια ποτὶ τὰ αρμη. ὥστε ἐλάττων ἐστὶν ἁ βα τᾶς θκ, ἢ ἑκατοστὸν μέρος. τᾷ δὲ βα ἴσα ἐστὶν ἁ διάμετρος τοῦ ση κύκλου. διότι καὶ ἁ ἡμίσεια αὐτᾶς ἁ φα, ἴσα ἐστὶ τᾷ κρ. ἴσαν γὰρ ἐουσᾶν τᾶν θκ τᾷ θα, ἀπὸ τῶν περάτων κάθετοι ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τὰν

* αὐτὴ ἡ γωνία ἴση τῇ γωνίᾳ

ταὰν αὐτὰν γωνίαν. δῆλον οὖν, ὅτι ἁ διάμετρος τοῦ αβγ κύκλου ἐλάσσων ἐστὶν ἢ ἑκατοστὸν μέρος τᾶς θκ. καὶ ἁ εθυ γωνία ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς διαμέτρου τοῦ αβγ κύκλου, ἐπεὶ ἐλάσσων ἐστὶν ὁ δεζ κύκλος τοῦ σκ κύκλου. ἐλάσσονες ἄρα ἐντὶ ἀμφότεραι αἱ θυ, κσ, ἢ ἑκατοστὸν μέρος τοῦ θκ. ὥστε ἁ θκ ποτὶ τὰν ~ ς ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὰ ρ ποτὶ τὰ ϙθ. καὶ ἐπεὶ ἁ μὲν θκ ~ ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς θρ, ἁ δὲ σν ἐλάσσων τᾶς δτ, ἐλάσσω ἄρα καὶ λόγον ἔχει ἁ θρ ποτὶ τὰν δτ, ἢ τὰ ρ ποτὶ τὰ ϙθ, ἐπὶ τῶν θκρ, δκτ τριγώνων ὀρθογωνίων ἐόντων, αἱ μὲν κρ, κτ πλευραὶ ἶσαι ἐντί, αἱ δὲ θρ, δτ ἄνισοι. καὶ μείζων ἁ ορα γωνία περιεχομένα ὑπὸ τῶν δτ, δκ, ποτὶ ταὰν γωνίαν τὰν περιεχομέναν ὑπὸ τῶν θρ, θκ, μείζονα μὲν ἔχει λόγον ἢ ἁ θκ ποτὶ τὰν δκ. ἐλάσσω δὲ, ἢ ἁ θρ ποτὶ τὰν δτ. εἰ γὰρ κα δύο τριγώνων ὀρθογωνίων αἱ μὲν ἅτεραι πλευραὶ αἱ περὶ τὰν ὀρθὰν γωνίαν ἶσαι ἐῶντι, αἱ δὲ ἅτεραι ἄνισοι, ἁ μείζων γωνία τᾶν ποτὶ ταῖς ἀνίσοις πλευραῖς ποτὶ τὰν ἐλάσσονα, μείζονα μὲν ἔχει λόγον ἢ ἁ μείζων γραμμὰ, τᾶν ὑπὸ τὰν ὀρθὰν γωνίαν ὑποτείνουσα, ποτὶ τὰν ἐλάσσονα. ἐλάσσονα δὲ, ἢ ἁ μείζων γραμμὰ τᾶν περὶ ταὰν ὀρθὰν γωνίαν ποτὶ ταὰν ἐλάσσονα. ὥστε ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τῶν δλ, δξ ποτὶ τὰν γωνίαν τὰν περιεχομέναν ὑπὸ τῶν θν, θμ, ἐλάσσω λόγον ἔχει, ἢ ἁ θρ ποτὶ ταὰν δτ. ἅ τις ἐλάσσω λόγον ἔχει, ἢ τὰ ρ ποτὶ τὰ ϙθ. ὥστε ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τῶν δλ, δξ, ποτὶ τὰν γωνίαν τὰν περιεχομέναν ὑπὸ τῶν θμ, θο, ἐλάσσω λόγον ἔχει ἢ τὰ ρ ποτὶ τὰ ϙθ. καὶ ἐπεί ἐστιν ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τῶν δλ, δξ μείζων ἢ διακοσιοστὸν μέρος, ὀρθᾶς, εἴη κα ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τῶν θμ, θο μείζων, ἢ τᾶς ὀρθᾶς διαιρεθείσας εἰς δισμύρια τούτων ϙθ μέρος, ὥστε μείζων ἐστὶν ἢ διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς σ, καὶ γ. τούτων ἓν μέρος ἄρα ἁ βα μείζων ἐστὶ τᾶς ὑποτεινούσας, ἓν τμᾶμα διῃρημένας τᾶς τοῦ αβγ κύκλου περιφερείας, εἰς ωιβ, τὰν δὲ αβ ἴσα ἐντὶ ἁ τοῦ ἁλίου διάμετρος. δῆλον οὖν, ὅτι μείζων ἐστὶν ἁ τοῦ ἁλίου διάμετρος τᾶς τοῦ χιλιαγώνου πλευρᾶς.

Τούτων δὲ ὑποκειμένων, δείκνυται καὶ τάδε, οἷον ἁ διάμετρος τοῦ κόσμου τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ μυριοπλασίων, καὶ ἔτι ἁ διάμετρος τοῦ κόσμου ἐλάσσων ἐστὶν ἢ σταδίων μυριάκις, μυριάδες ρ. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου μὴ μείζων εἶμεν ἢ τριακονταπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας, τὰν δὲ διάμετρον τᾶς γᾶς μείζων εἶμεν τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας, δῆλον ὡς ἁ διάμετρος τοῦ ἁλίου ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τριακονταπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς. πάλιν δὲ ἐπεὶ ἐδείχθη ἁ διάμετρος τοῦ ἁλίου μείζων ἐοῦσα τᾶς τοῦ χιλιαγώνου πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου τῶν ἐν τῷ κόσμῳ, φανερὸν ὅτι ἁ τοῦ χιλιαγώνου περίμετρος τοῦ εἰρημένου ἐλάσσων ἐστὶν ἢ χιλιοπλασίων τᾶς διαμέτρου τοῦ ἁλίου. ἁ δὲ διάμετρος τοῦ ἁλίου ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τριακονταπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς. ὥστε ἁ περίμετρος τοῦ χιλιαγώνου ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ τρισμυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς. ἐπεὶ οὖν ἁ περίμετρος τοῦ χιλιαγώνου, τᾶς μὲν διαμέτρου τᾶς γᾶς ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ τρισμυριοπλασίων, τᾶς δὲ διαμέτρου τοῦ κόσμου μείζων ἢ τριπλασίων δέδεικται γάρ τοι, διότι παντὸς κύκλου ἁ διάμετρος ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ τρίτον μέρος παντὸς πολυγωνίου περιμέτρου, ὅ καὶ εἰς ὁ ε θ πλευρον, καὶ πολυγώνου. ὅτι τοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου μὲν τοῦ κύκλου εἴη, καὶ ἁ διάμετρος τοῦ κόσμου ἐλάσσων ἢ μυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς. ἁ μὲν οὖν διάμετρος τοῦ κόσμου ἐλάσσων ἐοῦσα, ἢ μυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τοῦ κόσμου, ἢ σταδίων μυριάκις μυριάδες ρ, ἐκ τούτου δῆλον. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται, τὸν περίμετρον τᾶς γᾶς μὴ μείζονα εἶμεν, ἢ τριακοσίας μυριάδας σταδίων ἐστίν. ἁ δὲ περίμετρος τᾶς γᾶς, μείζων ἐστὶ τριπλασία τᾶς διαμέτρου, διὰ τὸ παντὸς κύκλου τὰν περιφέρειαν μείζονα εἶμεν ἢ τριπλασίαν τᾶς διαμέτρου, δῆλον ὡς ἁ διάμετρος τᾶς γᾶς ἐλάσσων ἐστὶν ἢ σταδίων ρ μυριάδων. ἐπεὶ οὖν ἁ τοῦ κόσμου διάμετρος ἐλάσσων ἐστὶν ἢ μυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς, δῆλον ὡς ἁ τοῦ κόσμου διάμετρος ἐλάσσων ἐστὶν ἢ σταδίων μυριάκις μυριάδες ρ. περὶ μεγεθέων καὶ τῶν ἀποστημάτων ταῦτα ὑποτίθεμαι, περὶ δὲ τοῦ ψάμμου τάδε. εἴκα ἦ τι συγκείμενον μέγεθος ἐκ τοῦ ψάμμου, μὴ μεῖζον μάκωνος, τὸν ἀριθμὸν αὐτοῦ μὴ μείζονα εἶμεν μυρίων, καὶ τὰν διάμετρον τᾶς μάκωνος μὴ ἐλάσσονα εἶμεν ἢ τετρακοστὸν μέρος δακτύλου. ὑποτίθεμαι δὲ τοῦτο, ἐπισκεψάμενος τόνδε τὸν τρόπον. ἐτέθεν ἐπὶ κανόνα λεῖον μάκωνες ἐπ᾽ εὐθείας ἐπὶ μίαν κείμεναι, ἁπτόμεναι ἀλλάλων. καὶ ἀνέλαβον αἱ κε μάκωνες πλέονα τόπον δακτυλιαίου μάκεος. ἐλάσσονα λαβὼν τὰν διάμετρον τᾶς μάκωνος, ὑποτίθεμαι ὡς τετρακοστομόριον εἶμεν δακτύλου, καὶ μὴ ἐλάσσονα βουλόμενος καὶ διὰ τούτων ἀναμφιλογώτατον δείκνυσθαι τὸ προκείμενον. ἃ μὲν οὖν ὑποτίθεμαι, ταῦτα. χρήσιμον δὲ εἶμεν ὑπολαμβάνω τὰν κατονόμαξιν τῶν ἀριθμῶν ῥηθῆμεν, ὅπως καὶ τῶν ἄλλων οἱ τῷ βιβλίῳ μὴ περιτετευχότες τῷ ποτὶ Ζεύξιππον γεγραμμένῳ μὴ πλανῶνται, διὰ τὸ μηδὲν εἶμεν

ὑπὲρ αὐτᾶς ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ πρὸς εἰρημένων. συμβαίνει δὴ τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν ἐς τὸ μὲν τῶν μυρίων ὑπάρχειν ἁμῖν παραδεδομένα, καὶ ὑπὲρ τῶν μυρίων μὲν ἀποχρεόντως γιγνώσκομεν, μυριάδων ἀριθμὸν λέγοντες ἔστε ποτὶ τὰς μυρίας μυριάδας. ἔστω οὖν ἁμῖν, οἱ μὲν νῦν εἰρημένοι ἀριθμοὶ ἐς τὰς μυρίας μυριάδας πρῶτοι καλούμενοι. τῶν δὲ πρώτων ἀριθμῶν αἱ μυρίαι μυριάδες μονὰς καλείσθω δευτέρων ἀριθμῶν, καὶ ἀριθμείσθω τῶν δευτέρων μονάδες, καὶ ἐκ τᾶν μονάδων δεκάδες, καὶ ἑκατοντάδες καὶ χιλιάδες, καὶ μυριάδες ἔστε μυρίων μυριάδων. πάλιν δὲ καὶ αἱ μύριαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν, μονὰς καλείσθω τρίτων ἀριθμῶν, καὶ ἀριθμείσθω τῶν τρίτων ἀριθμῶν μονάδες καὶ αἱ ἀπὸ τᾶν μονάδων δεκάδες, καὶ ἑκατοντάδες, καὶ χιλιάδες, καὶ μυριάδες, ἔστε μυρίαι μυριάδες. τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ τῶν τρίτων ἀριθμῶν μυρίαι μυριάδες μονὰς καλείσθω τετάρτων ἀριθμῶν, καὶ αἱ τῶν τετάρτων ἀριθμῶν μύριαι μυριάδες μονὰς καλείσθω πέμπτων ἀριθμῶν, καὶ ἀεὶ οὕτως προάγοντες οἱ ἀριθμοὶ τὰ ὀνόματα ἐχόντες ἔστε μυριακις μυριοστῶν ἀριθμῶν μυρίαι μυριάδες. ἀπαρκέοντι μὲν οὖν καὶ ἐπὶ τοσοῦτον οἱ ἀριθμοὶ γινωσκόμενοι. ἔξεστι δὲ καὶ ἐπὶ πλέον προάγειν. ἔστων γὰρ οἱ μὲν νῦν εἰρημένοι ἀριθμοὶ πρώτης περιόδου καλούμενοι, ὁ δὲ ἔσχατος ἀριθμὸς τᾶς περιόδου μονὰς καλείσθω δευτέρας περιόδου πρώτων ἀριθμῶν. πάλιν δὲ καὶ αἱ μυρίαι μυριάδες τᾶς δευτέρας περιόδου δευτέρων ἀριθμῶν. ὁμοίως δὲ καὶ τούτων ὁ ἔσχατος μονὰς καλείσθω δευτέρας περιόδου τρίτων ἀριθμῶν. καὶ ἀεὶ οὕτως οἱ ἀριθμοὶ προάγοντες, τὰ ὀνόματα ἐχόντων τᾶς δευτέρας περιόδου, ἔστε μυριάκις μυριοστῶν ἀριθμῶν μυρίαι μυριάδες. πάλιν δὲ καὶ ὁ ἔσχατος ἀριθμὸς τᾶς δευτέρας περιόδου μονὰς καλείσθω τρίτας περιόδου πρώτων ἀριθμῶν. καὶ ἀεὶ οὕτως προαγόντων ἔστε μυριάκις μυριοστᾶς περιόδου μυριάκις μυριοστῶν ἀριθμῶν μυρίαι μυριάδες. τούτων δὲ οὕτως κατωνομασμένων, εἴκα ἐῶντι ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἑξῆς κείμενοι, ὁ δὲ παρὰ τὰν μονάδα δεκὰς ᾖ, οἱ ὀκτὼ εἴην αὐτῶν, οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων ἀριθμῶν καλουμένων ἐσσοῦνται. οἱ δὲ μετ' αὐτοὺς ἄλλοι ὀκτὼ τῶν δευτέρων καλούμενοι, καὶ οἱ ἄλλοι τὸν αὐτὸν τρόπον τούτοις τῶν συνωνύμων καλουμένων ἐσσοῦνται ἀποστάσει τᾶς ὀκτάδος τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τᾶς πρώτας ὀκτάδος τῶν ἀριθμῶν. ἁ μὲν οὖν πρώτας ὀκτάδος τῶν ἀριθμῶν ὄγδοος ἐστὶν ἀριθμὸς χίλιαι μυριάδες, τᾶς δὲ δευτέρας ὀκτάδος ὁ πρῶτος, ἐπεὶ δεκαπλασίων ἐστὶ τοῦ πρὸ αὐτοῦ μυρίαι μυριάδες ἐσσεῖται. οὗτος δέ ἐστι μονὰς τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. ὁ δὲ ὄγδοος τᾶς δευτέρας ὀκτάδος ἐστὶ χίλιαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. πάλιν δὲ καὶ τᾶς τρίτας ὀκτάδος, ὁ πρῶτος. ἐπεὶ δεκαπλασίων ἐστὶ τοῦ πρὸ αὐτοῦ μυρίαι μυριάδες ἐσσεῖται τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. οὗτος δέ ἐστι μονὰς τῶν τρίτων ἀριθμῶν. φανερὸν δὲ, ὅτι πολλαὶ ὀκτάδες ἐσσοῦντι ὡς εἴρηται. χρήσιμον δέ ἐστι καὶ τόδε γιγνωσκόμενον. εἴκα ἀριθμῶν ἀπὸ τᾶς μονάδος ἀνάλογον ἐόντων πολλαπλασιάζοντες, τινὲς ἀλλάλους τῶν ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, ἔσται ὁμοίως ἐσσεῖται ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἀπέχων. ἀπὸ μὲν οὖν τῶν πολλαπλασιαξάντων ἀλλάλους, ὅσους ὁ ἐλάσσων τῶν πολλαπλασιαξάντων ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἀπέχει. ἀπὸ δὲ τᾶς μονάδος ἀφέξει ἑνὶ ἐλάσσονας, ἢ ὅσος ἐστὶν ἀριθμὸς συναμφοτέρων, ὡς ἀπέχοντι ἀπὸ μονάδος οἱ πολλαπλασιάξαντες ἀλλάλους. ἔστων γὰρ ἀριθμοί τινες ἀνὰ λόγον ἀπὸ μονάδος, οἱ α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ι, κ, λ. μονὰς δὲ ἔστω ὁ α, καὶ πεπολλαπλασιάσθω ὁ δ τῷ θ. ὁ δὲ γενόμενος ἔστω ὁ χ. εἰλήφθω δὴ ὁ θ ἐκ τᾶς ἀναλογίας ὁ λ, ἀπέχων ἀπὸ τοῦ θ τοσούτους, ὅσους ὁ δ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει. δεικτέον ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ χ τῷ λ. ἐπεὶ οὖν ἀνάλογον ἐόντων ἴσον ἴσους ἀπέχει ὅ τε δ ἀπὸ τοῦ α, καὶ ὁ λ ἀπὸ τοῦ θ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὁ δ ποτὶ τὸν α, ὃν ὁ λ ποτὶ τὸν θ. πολλαπλασίων δέ ἐστιν ὁ δ τοῦ α, τῷ δ. πολλαπλασίων ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ λ τοῦ θ τῷ δ. ὥστε ἴσος ἐστὶν ὁ λ τῷ χ. δῆλον οὖν ὅτι ὁ γενόμενος ἐκ τᾶς ἀναλογίας τέ ἐστι, καὶ ἀπὸ τοῦ μείζονος πολλαπλασιαξάντων ἀλλάλους ἴσον ἀπέχων, ὅσους ὁ ἐλάσσων ἀπὸ τᾶς μονάδος ἀπέχει. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει ἑνὶ ἐλάσσονας ἢ ὅσος ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς συναμφοτέρων οὓς ἀπέχοντι ἀπὸ τᾶς μονάδος. οἵδε μὲν γὰρ οἱ α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, τοσοῦτοί ἐντι ὅσους ὁ θ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει. οἱ δὲ ι, κ, λ ἑνὶ ἐλάσσονες, ἢ ὅσους ὁ δ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει. σὺν γὰρ τῷ θ, τοσοῦτοί ἐντι.

Τούτων δὲ τῶν μὲν ὑποκειμένων, τῶν δὲ ἀποδεδειγμένων, τὸ προκείμενον δειχθήσεται. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται τὰν διάμετρον τᾶς μάκωνος μὴ ἐλάσσονα εἶμεν, ἢ τετρωκοστομόριον δακτύλου, δῆλον ὡς ἁ σφαῖρα δακτυλιαίαν ἔχουσα τὰν διάμετρον, οὐ μείζων ἐστὶν, ἢ ὥστε χωρεῖν μάκωνας ἑξακισμυρίας καὶ τετρακισχιλίας. τᾶς γὰρ σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον τετρακοστομόριον δακτύλου πολλαπλασία ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ ἀριθμῷ. δέδεικται γὰρ τοῦτο ὅτι αἱ σφαῖραι τριπλάσιον λόγον ἔχοντι ποτὶ ἀλλάλας τᾶν διαμέτρων. ἐπεὶ δὲ ὑπόκειται καὶ τοῦ ψάμμου τὸν ἀριθμὸν, ἐς τὸ τᾶς μάκωνος μέγεθος, μὴ μεῖζον εἶμεν μυρίων. δῆλον ὡς εἰ πληρωθείη ψάμμου ἁ σφαῖρα ἁ δακτυλιαίαν ἔχουσα

ἐχούσας τὰν διάμετρον, ὁ μείζων καὶ ὁ ἀριθμὸς τοῦ ψάμμου ἢ μυριάκις τὰ ἑξακισμύρια καὶ τετρακισχίλια, οὗτος δέ ἐστιν ὁ ἀριθμὸς, μονάδες τε ἀριθμὸς τῶν δευτέρων ἀριθμῶν, καὶ τῶν πρώτων μυριάδες τετρακισχίλιαι. ἐλάσσων οὖν ἐστιν ἢ ῑ μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. ἁ δὲ τὰν ρ̄ δακτύλων ἔχουσα τὰν διάμετρον σφαῖρα πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς δακτυλιαίας ἐχούσας τὰν διάμετρον ἢ ταῖς ρ̄ μυριάδεσσι, διὰ τὸ τριπλάσιον ἔχειν ποτ' ἀλλάλας τὰν διάμετρον τᾶς σφαίρας. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα τηλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον δακτύλων ρ̄, δῆλον ὡς ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθεισᾶν τᾶν δεκαμονάδων τῶν δευτέρων ἀριθμῶν ταῖς ρ̄ μυριάδεσσιν. ἐπὶ δὲ τοῦ δευτέρων ἀριθμῶν δέκα μονάδες, δέκατός ἐστιν ἀριθμὸς ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἐόντων τοῦ δεκαπλασίων ὅρων ἀνάλογον. αἱ δὲ ἑκατὸν μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὡς ὁ γενόμενος ἐκτὸς ἐσσεῖται τῶν ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἑκκαιδέκατος ἀπὸ μονάδος. δέδεικται γὰρ ὅτι ἐντὶ ἐλάσσονες ἀπὸ τᾶς μονάδος ὅσος ἐστὶν ἐλάσσων συναμφοτέρων δὲ ὅσον ἀπέχοντι ἀπὸ μονάδος οἱ πολλαπλασιάξαντες ἀλλάλους. τῶν δὲ ἑκκαίδεκα τούτων ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τοῦ πρώτων καλουμένων ἐντί, οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτὼ τοῦ δευτέρων. καὶ ὁ ἔσχατος ἐστὶν αὐτοῦ χίλιαι μυριάδες ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ρ̄ δακτύλων ἐχούσῃ, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ χίλιαι μυριάδες τοῦ δευτέρων ἀριθμῶν. πάλιν δὲ καὶ ἁ σφαῖρα, ἁ τῶν μυρίων δακτύλων ἔχουσα τὰν διάμετρον πολλαπλασία τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον ρ̄ δακτύλων ταῖς ρ̄ μυριάδεσσι. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα τηλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ ἔχουσα σφαῖρα τὰν διάμετρον μυριάδων δακτύλων, δῆλον ὡς ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου πολλαπλασιασθεισᾶν τᾶν χιλιᾶν μυριάδων τοῦ δευτέρων ἀριθμῶν ταῖς ρ̄ μυριάδεσσιν. ἐπειδὴ αἱ μὲν τῶν δευτέρων ἀριθμῶν χίλιαι μυριάδες ἑκκαιδέκατός ἐστιν ἀριθμὸς ἀπὸ μονάδος, ἀναλογίας δὲ ρ̄ μυριάδες ἕβδομος, ἀπὸ μονάδος ἐν τᾷ αὐτᾷ ἀναλογίᾳ, δῆλον ὡς ὁ γενόμενος ἐσσεῖται δύο καὶ εἰκοστὸς τῶν ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἀπὸ μονάδος. τῶν δὲ δύο καὶ εἴκοσι τούτων, ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐστίν. ὀκτὼ δὲ οἱ μετὰ τοὺς δευτέρων καλουμένων. οἱ δὲ λοιποὶ ἐκ τῶν τρίων καλουμένων, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ δέκα μυριάδες τῶν τρίτων ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μεγέθους ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ μυρίων δακτύλων, ἔλασσον ἐστὶν ἢ ῑ μυριάδες τρίτων ἀριθμῶν. καὶ ἐπεὶ ἐλάσσων ἐστὶν ἁ σταδιαίαν ἔχουσα τὰν διάμετρον σφαῖρα, τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον μυρίων δακτύλων, δῆλον ὅτι καὶ τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μεγέθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδιαίαν, ἔλασσον ἐστὶν ἢ ῑ μυριάδες τῶν τρίτων ἀριθμῶν. πάλιν δὲ ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον ρ̄ σταδίων, πολλαπλασίων ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον σταδιαίαν ταῖς ρ̄ μυριάδεσσιν. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα τηλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἔχουσα τὰν διάμετρον ρ̄ σταδίων, δῆλον ὅτι ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ, πολλαπλασιασθεισᾶν τᾶν δέκα μυριάδων τρίτων ἀριθμῶν ταῖς ρ̄ μυριάδεσσι, καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν τοῦ τρίτων ἀριθμῶν δέκα μυριάδες δύο καὶ εἰκοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ ρ̄ μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὡς ὁ γενόμενος ἐσσεῖται ὀκτὼ καὶ εἰκοστὸς ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἀπὸ μονάδος, τῶν δὲ ὀκτὼ καὶ εἴκοσι τούτων, ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, οἱ δὲ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ὀκτὼ τῶν τρίτων, οἱ δὲ λοιποὶ τέσσαρες τῶν τετάρτων καλουμένων, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτοῦ ἐστὶ χίλιαι μυριάδες τοῦ τετάρτων ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν, ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μεγέθεος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων ρ̄, ἔλασσον ἐστὶν ἢ χίλιαι μονάδες τοῦ τετάρτων ἀριθμῶν. τοῦ δὲ τετάρτων ἀριθμῶν, πάλιν δὲ ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον μυρίων σταδίων, πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον σταδίων ρ̄, ταῖς ρ̄ μυριάδεσσιν. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα τηλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων μυρίων, δῆλον ὅτι ἐλάσσων ἐσσεῖται τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθεισᾶν τᾶν χιλιᾶν μονάδων τοῦ τετάρτων ἀριθμῶν ταῖς ρ̄ μυριάδεσσιν. ἐπεὶ δὲ αἱ μὲν τοῦ τετάρτων ἀριθμῶν χίλιαι μονάδες ὀκτὼ καὶ εἰκοστός ἐστιν, ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον. αἱ δὲ ἑκατὸν μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος, ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὅτι ὁ γενόμενος ἐσσεῖται ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, τέταρτος καὶ τριακοστὸς ἀπὸ μονάδος. τῶν δὲ τεσσάρων καὶ τριάκοντα τούτων ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτὼ τοῦ δευτέρων. καὶ οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ τοῦ τρίτων. καὶ οἱ μετὰ τούτους ὀκτὼ, τοῦ

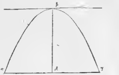
τετάρτων. οἱ δὲ λοιποὶ δύο τῶν πέμπτων καλουμένων ἐσοῦνται. καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ δέκα μονάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. δῆλον οὖν ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων μυρίων, ἔλασσον ἐσεῖται ἢ ι̅ μονάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. πάλιν δὲ ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων ρ̅ μυριάδων πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς σφαίρας τὰν διάμετρον ἐχούσας σταδίων μυρίων, ταῖς ρ̅ μυριάδεσσιν. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαῦτα, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων ρ̅ μυριάδων, δῆλον ὡς ἐλάσσων ἐσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθεισᾶν τᾶν δὲ μονάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν ταῖς ρ̅ μυριάσι. καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν τῶν πέμπτων ἀριθμῶν δέκα μονάδες, τέταρτος ἐστὶ καὶ τριακοστὸς ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ ρ̅ μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὅτι ὁ γενόμενος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἐσεῖται τετρακοστὸς ἀπὸ μονάδος, τῶν δὲ τεσσαράκοντα τούτων ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τῇ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί. οἱ δὲ μετὰ ταῦτα ἄλλοι ὀκτὼ τῶν δευτέρων. καὶ οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν τρίτων. οἱ δὲ μετὰ τοὺς τρίτους ὀκτὼ τῶν τετάρτων. οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτὼ τῶν πέμπτων καλουμένων. καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ χίλιαι μυριάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων ρ̅ μυριάδες, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ χίλιαι μυριάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. ἁ δὲ τὰν διάμετρον ἔχουσα σφαῖρα σταδίων μυριὰς μυριάδων πολλαπλασίων ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον σταδίων ρ̅ μυριάδων ταῖς ρ̅ μυριάδεσσιν, εἰ δὲ γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαῦτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων μυριὰς μυριάδων, φανερὸν ὅτι ἐλάσσων ἐσεῖται τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλάσιον χιλίων μυριάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν ταῖς ρ̅ μυριάδεσσιν. ἐπεὶ δὲ αἱ μὲν τῶν πέμπτων ἀριθμῶν χίλιαι μυριάδες τετρακοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ ρ̅ μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὡς ὁ γενόμενος ἐσεῖται ἕκτος καὶ τετρακοστὸς ἀπὸ μονάδος. τῶν δὲ τεσσαράκοντα καὶ ἓξ τούτων ἐμμέν, οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, ὀκτὼ δὲ οἱ μετὰ τούτους τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν τρίτων. οἱ δὲ μετὰ τοὺς τρίτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν τετάρτων, καὶ οἱ μετὰ τοὺς τετάρτους ὀκτὼ τῶν πέμπτων, οἱ δὲ λοιποὶ τῶν ἕκτων καλουμένων ἐντί, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ ι̅ μυριάδων τῶν ἕκτων ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν, ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μεγέθεος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων μυριάκις μυριάδων μυρίων ἔλασσον ἐστὶν ἢ ι̅ μυριάδες τῶν ἕκτων ἀριθμῶν. ἁ δὲ τὰν διάμετρον ἔχουσα σφαῖρα σταδίων μυριάκις μυριάδων ρ̅, πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον σταδίων μυριάδας μυρίας, ταῖς ρ̅ μυριάδεσσιν. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαῦτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων μυριάκις μυριάδων, φανερὸν ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος ἔλασσον ἐσεῖται τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασίων τᾶν ι̅ μυριάδων, τῶν ἕκτων ἀριθμῶν ταῖν ρ̅ μυριάδες. ἐπεὶ δὲ αἱ μὲν τῶν ἕκτων ἀριθμῶν δέκα μυριάδες ἕκτος καὶ τεσσαρακοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ ρ̅ μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος, ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὅτι ὁ γενόμενος ἐσεῖται δύο καὶ πεντηκοστὸς ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας. τῶν δὲ δύο καὶ πεντήκοντα τούτων, οἱ μὲν ἑπτὰ καὶ τεσσαράκοντα σὺν τᾷ μονάδι, οἵ τε πρῶτοι καλούμενοι ἐντὶ καὶ οἱ δεύτεροι καὶ τρίτοι καὶ τέταρτοι καὶ πέμπτοι καὶ ἕκτοι. οἱ δὲ λοιποὶ τέσσαρες τῶν ἑβδόμων καλουμένων ἐντί, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ χίλιαι μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσα τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὸν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων μυριάκις μυριάδων ρ̅, ἔλασσον ἐστὶν ἢ ͵α μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ἁ τοῦ κόσμου διάμετρος ἐλάσσων ἐοῦσα σταδίων μυριάκις μυριάδων ρ̅, δῆλον ὅτι καὶ τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῷ κόσμῳ, ἔλασσον ἐστὶν ἢ ͵α μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν. ὅτι μὲν ὁμοίως τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν πλείστων ἀστρολόγων καλουμένῳ κόσμῳ, ἔλασσον ἐστὶν ἢ ͵α μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν, δέδεικται. ὅτι δὲ καὶ τὸ πλῆθος τοῦ ψάμμου τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ ταλικαύτᾳ, ἁλίκαν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν, εἶμεν ἐλάσσων ἐστὶν ἢ ͵α μυριάδες τῶν ὀγδόων ἀριθμῶν, δειχθήσεται. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται τὰν γᾶν τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον ποτὶ τὸν ὑφ' ἁμῶν εἰρημένον κόσμον, ὃν ἔχει λόγον ὁ εἰρημένος κόσμος ποτὶ τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν, ἃν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται. καὶ αἱ διάμετροι τᾶν σφαιρᾶν τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτὶ ἀλλάλας. ἁ δὲ τοῦ κόσμου διάμετρος τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς δέδεικται ἐλάσσων ἐοῦσα ἢ μυριοπλασίων. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ ἁ διάμετρος τᾶς τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαίρας

σφαίρας ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ μυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τοῦ κόσμου. ἐπειδὴ αἱ σφαῖραι τριπλασίονα λόγον ἔχοντι ποτ' ἀλλάλας τᾶν διαμέτρων, φανερὸν, ὅτι ἁ τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖρα ἂν ἀρίσταρχος ὑποτίθεται, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ μυριάκις μυριάδεσσι πολλαπλασίων τοῦ κόσμου. δέδεικται γὰρ τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῷ κόσμῳ, ἔλασσον ἐστὶν ἢ ͵α μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν. δῆλον ὦν ὅτι εἰ γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαῦτα τὸ μέγεθος, ἁλίκαν ὁ ἀρίσταρχος ὑποτίθεται τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν εἶμεν, ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασίων τᾶν χιλίων μονάδων, ταῖς μυριάκις μυρίαις μυριάδεσσι. καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν τῶν ἑβδόμων ͵α μονάδες δύο καὶ πεντηκοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, δὲ μυριάκις μύριαι μυριάδες τρισκαιδέκατος ἀπὸ μονάδος, ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας δῆλον, ὅτι ὁ γενόμενος ἐσσεῖται τέταρτος καὶ ἑξηκοστὸς ἀπὸ μονάδος, ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας. οὗτος δὲ ἐστὶ τῶν ὀγδόων ὄγδοος καὶ πεντακισχίλιαι μυριάδες τῶν ὀγδόων ἀριθμῶν. φανερὸν τοίνυν, ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῇ τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαίρᾳ ἂν ἀρίσταρχος ὑποτίθεται, ἔλασσον ἐστὶν ἢ ͵α μυριάδες τῶν ὀγδόων ἀριθμῶν. ταῦτα δὲ βασιλεῦ γέλων, τοῖς μὲν πολλοῖς καὶ μὴ κεκοινωνηκότεσσι τῶν μαθημάτων οὐκ εὔπιστα φανήσειν ὑπολαμβάνω, τοῖς δὲ μεταλελαβηκότεσσι καὶ περὶ τῶν ἀποστημάτων καὶ τῶν μεγεθέων τᾶς τε γᾶς καὶ τοῦ ἁλίου, καὶ τᾶς σελάνας καὶ τοῦ ὅλου κόσμου πεφροντικότεσσι πιστὰ, διὰ τὰν ἀπόδειξιν ἐσσεῖσθαι. διόπερ ᾠήθην καὶ τινας οὐκ ἀνάρμοστον εἶν ἔτι ἐπιθεωρῆσαι ταῦτα.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ.

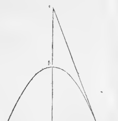
ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΔΟΣΙΘΕΩ ΕΥΠΡΑΤΤΕΙΝ.

Ἀκούσας Κόνωνα μὲν τετελευτηκέναι, ὃς ἦν οὐδὲν ἐλλείπων ἁμὶν ἐν φιλίᾳ, τὶν δὲ Κόνωνος γνώριμον γεγενῆσθαι καὶ γεωμετρίας οἰκεῖον εἶμεν, τοῦ μὲν τετελευτηκότος εἵνεκεν ἐλυπήθημεν, ὡς καὶ φίλου τοῦ ἀνδρὸς γεγενημένου, καὶ ἐν τοῖς μαθήμασι θαυμαστοῦ τινος. ἐπεχειρίξαμεθα δὲ ἀποστεῖλαι, γράψαντες ὡς Κόνωνι γράφειν ἐγνωκότες εἶμεν γεωμετρικῶν θεωρημάτων, ὃ πρότερον μὲν οὐκ ἦν τεθεωρημένον, νῦν δὲ ὑφ' ἁμῶν τεθεώρηται, πρότερον μὲν διὰ μηχανικῶν εὑρεθὲν, ἔπειτα δὲ καὶ διὰ τῶν γεωμετρικῶν ἐπιδειχθέν. τῶν μὲν πρότερον περὶ γεωμετρίαν πραγματευθέντων ἐπεχείρησάν τινες γράφειν, ὡς δυνατὸν ἐὸν κύκλῳ τῷ δοθέντι, καὶ κύκλου τμάματι τῷ δοθέντι χωρίον εὑρεῖν εὐθύγραμμον ἴσον. καὶ μετὰ ταῦτα τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς ὅλου τοῦ κώνου τομᾶς καὶ εὐθείας τετραγωνίζειν ἐπειρῶντο, λαμβάνοντες οὐκ εὐπαραχώρητα λήμματα, διόπερ αὐτοῖς ὑπὸ τῶν πλείστων οὐχ εὑρισκόμενα ταῦτα κατεγνώσθη, τὸ καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τμᾶμα περιεχόμενον, οὐδένα τῶν πρώτων ἐγχειρήσαντα τετραγωνίζειν ἐπιστάμεθα, ὃ δὴ νῦν ὑφ' ἁμῶν εὕρηται. δείκνυται γὰρ ὅτι πᾶν τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἐπίτριτον ἐστὶ τοῦ τριγώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν, καὶ ὕψος ἴσον τῷ τμάματι, λαμβανομένου τοῦδε τοῦ λήμματος εἰς τὰν ἀπόδειξιν αὐτοῦ, τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχὰν ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, δυνατὸν εἶμεν αὐτὰν συντιθεμέναν παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος πεπερασμένου χωρίου. κέχρηνται δὲ καὶ οἱ πρότερον γεωμέτραι τῷδε τῷ λήμματι. τούς τε γὰρ κύκλους διπλασίονα λόγον ἔχειν πρὸς ἀλλήλους τῶν διαμέτρων ἀποδεδείχασιν αὐτῷ τῷ λήμματι χρώμενοι. καὶ τὰς σφαίρας ὅτι τριπλασίονα λόγον ἔχοντι πρὸς ἀλλήλας τᾶν διαμέτρων. ἔτι δὲ καὶ πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος τᾷ πυραμίδι, καὶ ὕψος ἴσον. καὶ διότι πᾶς κῶνος τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος τῷ κώνῳ, καὶ ὕψος ἴσον. ὁμοίως τῷ προειρημένῳ λήμματι λαμβάνοντες ἔγγραφον συμβαίνει τῶν προειρημένων θεωρημάτων ἕκαστον μηδενὸς ἧσσον τοῦ τούτου λήμματος ἀποδεδειγμένον πεπιστευκέναι. ἄρτι δὲ ἐν τὰν ὁμοίαν πίστιν τούτοις ἀναγμένον τῶν ὑφ' ἁμῶν ἐκδιδομένων. ἀναγράψαντες οὖν αὐτοῦ τὰς ἀποδείξεις, ἀποστέλλομεν πρῶτον μὲν, ὡς διὰ τῶν μηχανικῶν ἐθεωρήθη. μετὰ ταῦτα δὲ καὶ ὡς διὰ τῶν γεωμετρουμένων ἀποδείκνυται. προγράφεται δὲ καὶ στοιχεῖα κωνικὰ χρεῖαν ἔχοντα ἐν τὰν ἀπόδειξιν. ἔρρωσο.

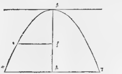


α. Εἴκα ἁ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ β γ, ἁ δὲ ἁ μὲν β δ παρὰ τὰν διάμετρον ἢ αὐτὰ διάμετρος. ἁ δὲ α δ γ παρὰ τὰν κατὰ τὸ β, ἐπιψαύουσαν τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ β, ἐσσοῦνται αἱ α δ, δ γ ἴσαι.

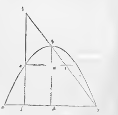
β. Εἴκα ἁ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ α β, ἁ δὲ ἁ β δ παρὰ τὰν διάμετρον, ἢ αὐτὰ διάμετρος, ἁ δὲ α δ γ παρὰ τὰν κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσαν τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, καὶ ἁ γ ε τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς ἐπιψαύουσα κατὰ τὸ γ, ἐσσοῦνται αἱ δ β, β ε ἴσαι.



γ. Εἴκα ἁ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ α β, ἁ δὲ β δ παρὰ τὰν διάμετρον ἢ αὐτὰ ἁ διάμετρος, καὶ ἀχθῶσι τινὲς αἱ α δ, ε ζ παρὰ τὰν κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσαν τᾶς τοῦ

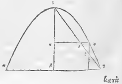


κώνου τομᾶς, ἐσσεῖται ὡς ἁ β δ μήκει ποτὶ τὰν β ζ, οὕτως δυνάμει ἁ α δ ποτὶ τὰν ε ζ. ἀποδέδεικται δὴ ταῦτα ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις.



δ. Ἔστω τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, τὸ α β γ, ἁ δὲ β δ ἀπὸ μέσας τᾶς α γ παρὰ τὰν διάμετρον ἄχθω, ἢ αὐτὴ διάμετρος ἔστω, καὶ ἁ β γ εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω. εἰ δή κα ταχθείη τις ἄλλα ἁ ζ θ παρὰ τὰν β δ τέμνουσαν, * τὰν δὴ τῶν α γ εὐθειᾶν, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ ζ θ ποτὶ τὰν θ κ, ὃν ἁ δ α ποτὶ τὰν δ ζ. ἄχθω γὰρ διὰ τοῦ κ παρὰ τὰν α γ ἁ κ η. ἔστιν ἄρα ὡς ἁ β δ ποτὶ τὰν β κ μάκει, οὕτως ἁ δ γ ποτὶ τὰν κ η δυνάμει. ἀποδέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐσσεῖται ἄρα ὡς ἁ β γ ποτὶ τὰν β ε μάκει, οὕτως ἁ β γ ποτὶ τὰν β θ δυνάμει. ὥστε τὸν αὐτὸν ἕχει λόγον ἁ β γ ποτὶ τὰν β θ, ὃν ἁ γ θ ποτὶ τὰν θ ι. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γ δ ποτὶ τὰν δ ζ, οὕτως ἁ θ ζ ποτὶ τὰν θ κ. τᾶ δὲ δ γ ἴσα ἐστὶν ἁ δ α. δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ δ α ποτὶ τὰν δ ζ, ὃν ἁ ζ θ ποτὶ τὰν θ η.

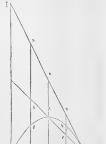
* τέμνουσα ἑκατέραν τῶν α γ β εὐθειᾶν



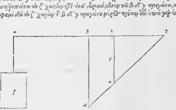
ε. Ἔστω τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τὸ α β γ. καὶ ἄχθω ἀπὸ τοῦ α παρὰ τὰν διάμετρον ἁ ζ α, ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς

κατὰ

κατὰ τὸ γ, ἁ γ ζ. αἰ δή τις ἀχθείη ἐν τῷ ζ α γ τριγώνῳ παρὰ τὰν α ζ, τὸν αὐτὸν λόγον ἁ ἀχθεῖσα τετμήσεται ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἁ α γ ὑπὸ τᾶς ἀχθείσας (ἀνάλογον) ὁμόλογον δὲ ἐσσεῖται τὸ τμᾶμα τᾶς α γ ποτὶ τὸ α, τῷ τμάματι τᾶς ἀχθείσας τῷ ποτὶ τᾷ α. ἄχθω γάρ τις ἁ δ ε παρὰ τὰν α ζ, καὶ τεμνέτω πρῶτον ἁ δ ε τὰν α γ δίχα. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ α β γ, καὶ ἄγμένα ἁ β δ παρὰ τὰν διάμετρον. αἱ δὲ α δ, δ γ ἴσαι. ἐσσεῖται τᾷ α γ παράλληλος ἁ κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. πάλιν ἐπεὶ παρὰ τὰν διάμετρον ἐστὶν ἁ δ ε, καὶ ἀπὸ τοῦ γ ἁ γ ε, ἅπτεται ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. ἁ δὲ δ γ παράλληλος τᾷ κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσᾳ, ἴσα ἐστὶν ἁ ε β τᾷ β δ. ὥστε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ α δ ποτὶ τὰν δ γ, ὃν ἁ δ β ποτὶ τὰν β ε. εἰ μὲν οὖν δίχα τέμνει ἁ ἀχθεῖσα τὰν α γ, δέδεικται. εἰ δὲ μή, ἄχθω τις ἄλλα ἁ κ λ παρὰ τὰν α ζ. δεικτέον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ α κ ποτὶ τὰν κ γ, ὃν ἁ κ θ ποτὶ τὰν θ λ. ἐπεὶ γὰρ ἴσα ἐστὶν ἁ β ε τᾷ β δ, ἴσα ἐστὶ καὶ ἁ ι λ τᾷ κ ι, τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει ποτὶ τὰν κ ι, ὃν ἁ α γ ποτὶ τὰν δ α. ἔχει δὲ καὶ ἁ κ ι ποτὶ τὰν θ κ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ δ α ποτὶ τὰν α κ. δέδεικται γὰρ ἐν τῷ πρότερον, ὡς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἁ κ θ ποτὶ τὰν θ λ, ὃν ἁ α κ ποτὶ τὰν κ γ. δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

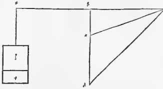


Νοείσθω δὲ τό, ὅτε ἐστὶ τὸ ἐν τῇ θεωρίᾳ προκείμενον ὁρώμενον ἐπὶ ὀρθοῦ ποτὶ τὸν ὁρίζοντα, καὶ τᾶς α β γραμμᾶς. ἔπειτα τὰ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ δ κάτω νοείσθω, τὰ δὲ ἐπὶ θάτερα ἄνω, τὸ δὲ β δ γ τρίγωνον ἔστω ὀρθογώνιον, ὀρθὰν ἔχον τὰν ποτὶ τᾷ β γωνίαν, καὶ τὰν β γ πλευρὰν ἴσαν τᾷ ἡμισείᾳ τοῦ ζυγοῦ, δῆλον ὅτι ἴσας οὔσας τᾶς α β τᾷ β γ. κρεμάσθω δὲ τὸ τρίγωνον ἐκ τῶν β γ σαμείων. κρεμάσθω δὲ καὶ ἄλλο χωρίον τὸ ζ ἐκ τοῦ ἑτέρου μέρους τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ α. καὶ ἰσορροπείτω τὸ ζ χωρίον κατὰ τὸ α, κρεμάμενον τῷ β δ γ τριγώνῳ, οὕτως ἔοντι ὡς νῦν κεῖται. φαμὶ δὴ τὸ ζ χωρίον τοῦ β δ γ τριγώνου μέρος τρίτον εἶν. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται ἰσορρόπων ὁ ζυγὸς ε κ, καὶ ἁ α ε γραμμὰ αὐτῷ. ὁρίζονται δὲ ποτ᾽ ὀρθὰς ἀγόμεναι τᾷ α ε ἐν τῷ ὀρθῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸν ὁρίζοντα, κάθετοι ἐσσοῦνται ἐπὶ τὸν ὁρίζοντα. τετμήσθω δὴ ἁ β γ γραμμὰ κατὰ τὸ ε οὕτως, ὥστε διπλασίονα εἶμεν τὰν γ ε τᾶς ε β, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν δ β ἁ κ ε. καὶ τετμάσθω δίχα κατὰ τὸ θ. τοῦ δὲ β δ γ τριγώνου κέντρον βάρεος ἐστὶ τὸ θ σαμεῖον. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς μηχανικοῖς. εἰ κα οὖν τῷ β δ γ τριγώνῳ, ὁ μὲν κατὰ τὰ β γ κρέμασις λυθείη, κατὰ δὲ τὸ ε κρεμασθῇ, μένει τὸ τρίγωνον, ὡς νῦν ἔχει. ἕκαστον γὰρ τῶν κρεμαμένων ἐξ τοῦ σαμείου καταστᾶσθ᾽ ἐν μένει, ὥστε κατὰ κάθετον εἶμεν τό τε σαμεῖον τῷ κρεμαστῷ, καὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ κρεμαμένου. δέδεικται οὖν καὶ τοῦτο. ἐπεὶ οὖν τὰν αὐτὰν ἕξει κατάστασιν τὸ β γ δ τρίγωνον ποτὶ τὸν ζυγόν, ἰσορροπήσει ὁμοίως τὸ ζ χωρίον. ἐπεὶ δὲ ἰσορροπέοντι τὸ μὲν ζ κρεμάμενον κατὰ τὸ α, τὸ δὲ β δ γ κατὰ τὸ ε, δῆλον ὡς ἀντιπεπόνθει τοῖς μακεσι;



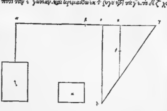
κεσι. καὶ ἔστιν ὡς ἁ αβ ποτὶ ταὶν βε, οὕτως τὸ βδγ τρίγωνον ποτὶ τὸ ζ χωρίον. τριπλασία δὲ ἁ αβ τᾶς βε. καὶ τὸ βδγ ἄρα τρίγωνον τριπλάσιον ἐστὶ τοῦ ζ χωρίου. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ εἴκα τριπλάσιον ᾖ τὸ βδγ τρίγωνον τοῦ ζ χωρίου, ὅτι ἰσορροπήσει.

ζ Ἔστω πάλιν ζυγὸς ὁ αγ γραμμά, μέσον δὲ αὐτοῦ ἔστω τὸ β. καὶ κρεμάσθω ἐπὶ τὸ β τὸ γδκ τρίγωνον. τὸ δὲ γδκ ἔστω τρίγωνον ἀμβλυγώνιον, βάσιν ἔχον ταὶν δκ, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἐοῦσαν τᾷ ἡμισείᾳ τοῦ ζυγοῦ. καὶ κρεμάσθω τὸ δγκ τρίγωνον ἐκ τῶν βγ σαμείων, τὸ δὲ ζ χωρίον κρεμάμενον ἐπὶ τὸ α ἰσορροπὲς ἔστω τῷ γδκ τριγώνῳ, οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται.

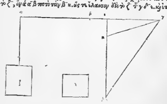


ὁμοίως δὲ δειχθήσεται τὸ ζ χωρίον τρίτον μέρος τοῦ γδκ τριγώνου. κρεμάσθω γάρ τι καὶ ἄλλο χωρίον ἐκ τοῦ α, τρίτον μέρος ἐὸν τοῦ βγκ τριγώνου. ἰσορροπήσει δὲ τὸ βδγ τρίγωνον τῷ ζλ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν βγκ τρίγωνον ἰσορροπεῖ τῷ α, τὸ δὲ βγδ τῷ ζλ, καὶ τρίτον ἐστὶ τοῦ βγδ τὸ ζλ, φανερὸν ὅτι καὶ τὸ γδκ τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ ζ.

η Ἔστω ζυγὸς ὁ αβ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ β. καὶ κρεμάσθω ἐπὶ τὸ β τὸ γδε τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὀρθὰν ἔχον τὰν ποτὶ τὰν ε γωνίαν. καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ ἐπὶ τὰ γε. τὸ δὲ ζ χωρίον κρεμάσθω ἐπὶ τὸ α. καὶ ἰσορροπείτω τῷ γδε οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ αβ ποτὶ ταὶν βε, τοῦτον ἐχέτω τὸ γδε τρίγωνον ποτὶ τὸ κ χωρίον. φαμὶ δὴ τὸ ζ χωρίον τοῦ μὲν γδε τριγώνου ἔλασσον εἶμεν, τοῦ δὲ κ μεῖζον. λελάφθω γὰρ τοῦ δεγ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος,



καὶ ἔστω τὸ θ. καὶ ἀπὸ θ ἡ ἄχθω παρὰ ταὶν δε. ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ τὸ γδε τρίγωνον τῷ ζ χωρίῳ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον τὸ γδε χωρίον ποτὶ τὸ ζ, ὃν ἁ αβ ποτὶ ταὶν βη. ὥστε ἔλασσον ἐστὶ τὸ ζ τοῦ γδε. καὶ ἐπεὶ τὸ γδε τρίγωνον ποτὶ μὲν τὸ ζ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ βα ποτὶ ταὶν βη, ποτὶ δὲ τὸ κ, ὃν ἁ βα ποτὶ ταὶν βε. δῆλον ὡς μείζονα λόγον ἔχει τὸ γδε τρίγωνον ποτὶ τὸ κ, ἢ ποτὶ τὸ ζ. ὥστε μεῖζον ἐστὶ τὸ ζ τοῦ κ.

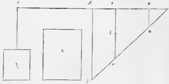


θ Ἔστω πάλιν τὸ μὲν αγ ζύγιον, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ β. τὸ δὲ γδκ τρίγωνον ἀμβλυγώνιον βάσιν μὲν ἔχον ταὶν δκ, ὕψος δὲ ταὶν εγ. καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ ἐπὶ τὰ γ, ε. τὸ δὲ ζ χωρίον κρεμάσθω ἐπὶ

κατὰ τὸ α, ἰσορροπείτω τῷ δεκ τριγώνῳ, οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ αβ ποτὶ τὰν βε, τοῦτον ἐχέτω τὸ γδκ τρίγωνον ποτὶ τὸ λ. φαμὶ δὴ τὸ ζ τοῦ μὲν λ μεῖζον εἶμεν, τοῦ δὲ γδκ ἔλασσον. δειχθήσεται ὁμοίως τῷ πρότερον.

ι

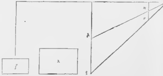
Ἔστω πάλιν τὸ μὲν αβγ ζύγιον, καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ β. τὸ δὲ βδηκ τραπέζιον, τὰς μὲν ποτὶ τοῖς βκ σαμείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰν δὲ κη πλευρὰν ἐπὶ τὸ γ νεύουσαν. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ βα ποτὶ τὰν βκ, τοῦτον ἐχέτω τὸ βδηκ τραπέζιον ποτὶ τὸ λ. κεκρεμάσθω δὲ τὸ βδηκ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ βκ σημεῖον. κεκρεμάσθω δὲ καὶ τὸ ζ χωρίον κατὰ τὸ α. καὶ ἰσορροπείτω τῷ βδηκ τραπεζίῳ, οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν ὑπόκειται. φαμὶ τὸ ζ χωρίον ἔλασσον εἶμεν τοῦ λ. τετμάσθω γὰρ ἁ αγ κατὰ τὸ ε οὕτως, ὥστε



ἔχει λόγον ἁ διπλασία τᾶς δβ, καὶ ἁ κη ποτὶ τὰν διπλασίαν τᾶς κη, καὶ τᾶς βδ, τοῦτον ἔχειν τὰν εκ ποτὶ τὰν βε. καὶ διὰ τοῦ ε παρὰ τὰν βδ ἀχθεῖσα ἁ εν τετμάσθω δίχα κατὰ τὸ θ, τοῦ δὴ βδηκ τραπεζίου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ θ. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς μηχανικοῖς. ἂν οὖν τὸ βδηκ τραπέζιον κατὰ μὲν τὸ ε κρεμασθῇ, ἀπὸ δὲ τῶν βκ σημείων λυθῇ, μένει τὰν αὐτὰν ἔχον κατάστασιν, διὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, καὶ ἰσορροπήσει τῷ ζ χωρίῳ. ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ τὸ βδηκ τραπέζιον κατὰ τὸ ε κρεμάμενον, τῷ ζ χωρίῳ κατὰ τὸ α κρεμαμένῳ, ἐσσεῖται ὡς ἁ βα ποτὶ τὰν βε, τὸ βδηκ τραπέζιον ποτὶ τὸ ζ χωρίον, μείζονα ἄρα λόγον ἔχει τὸ βδηκ τραπέζιον ποτὶ τὸ ζ, ἤπερ ποτὶ τὸ λ. ἐπεὶ καὶ ἁ αβ ποτὶ τὰν βε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ποτὶ τὰν βκ. ὥστε ἔλασσον ἐσσεῖται τὸ ζ τοῦ λ.

ια

Ἔστω πάλιν τὸ μὲν αγ ζύγιον, καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ β. τὸ δὲ κδτρ τραπέζιον ἔστω τὰς μὲν κδ, τρ πλευρὰς ἔχον ἐπὶ τὸ γ νευούσας. τὰς δὲ δρ, κτ καθέτους ἐπὶ τὰν βγ. καὶ ἁ δρ ἐπὶ τὸ β πιπτέτω. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ αβ ποτὶ τὰν βκ, τοῦτον ἐχέτω τὸ δκτρ τραπέζιον ποτὶ τὸ λ. τὸ δὲ δκτρ τραπέζιον κεκρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ

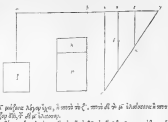


τὸ β, κ, καὶ τὸ ζ κατὰ τὸ α, καὶ ἰσορροπείτω τὸ ζ τῷ δκρτ τραπεζίῳ, οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται ἔλασσον τὸ ζ χωρίον τοῦ λ.

ιβ

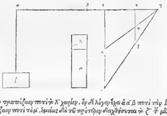
Ἔστω πάλιν τὸ μὲν αγ ζύγιον, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ β. τὸ δὲ δεκη τραπέζιον ἔστω τὰς μὲν ποτὶ τοῖς ε, κ σημείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰς δὲ κδ, εη γραμμὰς ποτὶ τὸ γ νευούσας. καὶ ὃν μὲν λόγον ἔχει ἁ αβ ποτὶ τὰν βκ, τοῦτον ἐχέτω τὸ δκεη τραπέζιον ποτὶ τὸ μ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ αβ ποτὶ τὰν βε, τοῦτον τὸν λόγον ἐχέτω τὸ δκεη τραπέζιον ποτὶ τὸ λ. κεκρεμάσθω δὲ τὸ δκεη τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ ε, κ. τὸ δὲ ζ χωρίον ἐκκεκρεμάσθω κατὰ τὸ α, καὶ ἰσορροπείτω τῷ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν ὑπόκειται. φαμὶ δὴ τὸ ζ τοῦ λ μεῖζον εἶμεν, τοῦ δὲ μ ἔλασσον. ἔλαβον γὰρ τοῦ δκεη τραπεζίου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος. ἔστω δὲ τὸ θ. ληφθήσεται δὲ ὁμοί-

ὡς τῶν πρότερον. καὶ ἄγω τὰν βι παρὰ τὰν δε. αὖ οὖν τὸ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κρεμασθήσεται κατὰ τὸ ι, ἀπὸ δὲ τῶν ε, η λυθῇ. μενεῖ τὰν αὐτὰν ἔχον κατάστασιν, καὶ ἰσορροπήσει τῷ ζ, διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. ἐπεὶ γὰρ ἰσορροπεῖ τὸ τραπέζιον κρεμάμενον κατὰ τὸ ι, τῷ ζ κρεμαμένῳ κατὰ τὸ α, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον τὸ τραπέζιον ποτὶ τὸ ζ, ὃν ἁ αβ ποτὶ τὰν βι. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ δκεη ποτὶ μὲν τὸ λ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ποτὶ τὸ ζ. ποτὶ δὲ τὸ μ ἐλάσσονα ἢ ποτὶ τὸ ζ· ὥστε τὸ ζ, τοῦ μὲν λ μεῖζον ἐστί, τοῦ δὲ μ ἔλασσον.



ιγ

Ἔστω πάλιν τὸ μὲν αγ ζύγιον, κατὰ μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ β. τὸ δὲ κδ, τρ τραπέζιον. ὥστε τὰς μὲν κδ, τρ πλευρὰς νευούσας εἶμεν ἐπὶ τὸ γ. τὰς δὲ δτ, κρ καθέτους ἐπὶ τὰν βγ. κεκρεμάσθω δὲ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ ε, η. τὸ δὲ ζ χωρίον κεκρεμάσθω κατὰ τὸ α. καὶ ἰσορροπείτω τῷ δκτρ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν κεῖται. καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἁ αβ ποτὶ τὰν βε, τοῦτον ἐχέτω τὸ δκτρ τραπέζιον ποτὶ τὸ λ χωρίον. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ αβ ποτὶ τὰν βη, τοῦτον ἐχέτω τὸ αὐτὸ τραπέζιον ποτὶ τὸ μ. ὁμοίως δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται τὸ ζ τοῦ μὲν λ μεῖζον, τοῦ δὲ μ ἔλασσον.

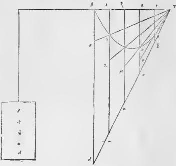


ιδ

Ἔστω τμῆμα τὸ βθγ, περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. ἔστω δὴ πρῶτον ἁ βγ ποτ᾿ ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ. καὶ ἄχθω ἀπὸ μὲν τοῦ β σαμείου ἁ βδ παρὰ τὰν διάμετρον. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἁ γδ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. ἐσσεῖται δὴ τὸ βγδ τρίγωνον ὀρθογώνιον. διῃρήσθω δὴ ἁ βγ εἰς τμάματα ὁποσαοῦν ἴσα τὰ βε, εζ, ζη, ηι, καὶ ἀπὸ τᾶν τομᾶν ἄχθωσαν παρὰ τὰν διάμετρον αἱ εσ, ζτ, ηυ, ιξ. ἀπὸ δὲ τῶν σαμείων καθ᾿ ἃ τέμνουσιν αὗται τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἐπεζεύχθωσαν κατὰ τὸ γ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν. φαμὶ δὴ τὸ τρίγωνον τὸ βδγ, τῶν μὲν τραπεζίων τῶν κε, λζ, μη, νι, καὶ τοῦ ξιγ τριγώνου ἔλασσον εἶμεν ἢ τριπλάσιον. τῶν δὲ τραπεζίων τῶν ζφ, ηθ, ιπ, καὶ τοῦ ιογ τριγωνίου, μεῖζον ἢ τριπλάσιον. διήχθω γὰρ εὐθεῖα, ἁ αβ. καὶ ἀπολελάφθω ἁ αβ ἴσα τᾷ βγ. καὶ νοείσθω ζύγιον τὸ αγ. μέσον δὲ αὐτοῦ ἐσσεῖται τὸ β, καὶ κεκρεμάσθω ἐκ τοῦ β. κεκρεμάσθω δὲ καὶ τὸ βδγ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ β, γ. ἐκ δὲ θατέρου μέρους ζυγοῦ κεκρεμάσθω τὰ ρ χ ψ ω δ χωρία κατὰ τὸ α. καὶ ἰσορροπείτω τὸ μὲν ρ χωρίον τῷ δε τραπεζίῳ, οὕτως ἔχοντι. τὸ δὲ χ τῷ ζσ τραπεζίῳ. τὸ δὲ ψ τῷ θη. τὸ δὲ ω τῷ υι. τὸ δὲ δ τῷ ξιγ τριγώνῳ. ἰσορροπήσει δὴ καὶ τὸ ὅλον τῷ ὅλῳ. ὥστε τριπλάσιον ἂν εἴη τὸ βδγ τρίγωνον τοῦ ρχψωδ χωρίου. καὶ ἐπεὶ ἐστὶ τμῆμα τὸ βγθ, ὃ περιέχεται ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ β παρὰ τὰν διάμετρον ἦκται ἁ βδ. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἁ γδ, ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. ἦκται δέ τις καὶ ἄλλα παρὰ τὰν διάμετρον ἁ σε. τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ βγ ποτὶ τὰν βε, ὃν ἁ σε ποτὶ τὰν εφ. ὥστε καὶ ἁ βα ποτὶ τὰν βε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ δε τραπέζιον ποτὶ τὸ κε. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ἁ αβ ποτὶ τὰν βζ τὸν αὐτὸν ἔ-

χειν

χει λόγον, ὃν τὸ σζ τραπέζιον ποτὶ τὸ λζ. ποτὶ δὲ τὰν βη, ὃν τὸ τη ποτὶ τὸ μη. ποτὶ δὲ τὰν βι, ὃν τὸ υι ποτὶ τὸ νι. ἐπεὶ οὖν ἐστὶ τραπέζιον τὸ δε, τὰς μὲν ποτὶ τοῖς βε σημείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰς δὲ πλευρὰς ἐπὶ τὸ γ νευούσας· ἰσορροπεῖ δέ τι χωρίον αὐτῷ τὸ ρ, κρεμάμενον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ α, οὕτως ἔχοντος τοῦ τραπεζίου, ὡς νῦν κεῖται. καὶ ἔστιν ὡς ἁ βα ποτὶ τὰν βε, οὕτως τὸ δε τραπέζιον ποτὶ τὸ κε, μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ κε χωρίον τοῦ ρ χωρίου. δέδεικται γὰρ τοῦτο. πάλιν δὲ τὸ ζσ τραπέζιον, τὰς μὲν ποτὶ τοῖς ζε γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰν δὲ στ νεύουσαν ἐπὶ τὸ γ. ἰσορροπεῖ δὲ αὐτῷ χωρίον τὸ χ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κρεμάμενον κατὰ

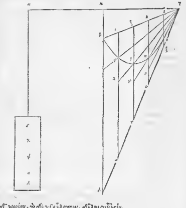


τὸ α, οὕτως ἔχοντι τῷ τραπεζίῳ ὡς νῦν κεῖται. καὶ ἐστὶν, ὡς μὲν ἁ βα ποτὶ τὰν βε, οὕτως τὸ ζσ τραπέζιον ποτὶ τὸ ζφ. ὡς δὲ ἁ αβ ποτὶ τὴν βζ, οὕτως τὸ ζσ τραπέζιον ποτὶ τὸ λζ. εἴη οὖν καὶ τὸ χ χωρίον τοῦ μὲν λζ τραπεζίου ἔλασσον, τοῦ δὲ ζφ μεῖζον. δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ψ χωρίον τοῦ μὲν μη τραπεζίου ἔλασσον, τοῦ δὲ θη μεῖζον. καὶ τὸ ω χωρίον τοῦ μὲν νοιι τραπεζίου ἔλασσον, τοῦ δὲ πι μεῖζον, ὁμοίως δὴ καὶ τὸ δ χωρίον τοῦ μὲν ξιγ τριγώνου ἔλασσον, τοῦ δὲ γιο μεῖζον. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν κε τραπέζιον μεῖζον ἐστὶ τοῦ ρ χωρίου, τὸ δὲ λζ τοῦ χ, τὸ δὲ μη τοῦ ψ, τὸ δὲ νι τοῦ ω, τὸ δὲ ξιγ τρίγωνον τοῦ δ, φανερὸν ὅτι καὶ πάντα τὰ εἰρημένα χωρία μείζονα ἐστὶ τοῦ ρχψωδ χωρίου. ἔστι δὲ τὸ ρχψωδ τρίτον μέρος τοῦ αγδ τριγώνου. δῆλον ἄρα, ὅτι τὸ βγδ τρίγωνον ἔλασσον ἐστὶν, ἢ τριπλάσιον τῶν κε, λζ, μη, νι τραπεζίων, καὶ τοῦ ξιγ τριγώνου. πάλιν ἐπεὶ τὸ μὲν ζφ τραπέζιον ἔλασσον ἐστὶ τοῦ χ χωρίου, τὸ δὲ θη τοῦ ψ, τὸ δὲ ιπ τοῦ ω, τὸ δὲ ιογ τρίγωνον τοῦ δ, φανερὸν ὅτι καὶ πάντα τὰ εἰρημένα ἐλάσσονα ἐστὶ τοῦ δωψχ χωρίου. φανερὸν οὖν ὅτι καὶ τὸ βδγ τρίγωνον μεῖζον ἐστὶν, ἢ τριπλάσιον τῶν φζ, θη, ιπ τραπεζίων, καὶ τοῦ ιγο τριγώνου. ἔλασσον δὲ ἢ τριπλάσιον τῶν προγεγραμμένων.

Ἔστω πάλιν τὸ βθγ τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἁ δὲ βγ μὴ ἔστω ποτ᾽ ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ, ἀναγκαῖον δὲ ἤτοι τὰν ἀπὸ τοῦ β σαμείου παρὰ τὰν διάμετρον ἀγμέναν ἐπὶ τὰ τῷ τμήματι, ἢ τὰν ἀπὸ τοῦ γ ἀμβλεῖαν ποιεῖν γωνίαν ποτὶ τὰν βγ. ἔστω ἁ τὰν ἀμβλεῖαν ποιοῦσα ἁ πρὸς τῷ β, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον ἀπὸ τοῦ β ἁ βδ. καὶ ἀπὸ τοῦ γ ἁ γδ, ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. καὶ διῃρήσθω ἁ βγ εἰς τμάματα ἴσα ὁποσαοῦν τὰ βε, εζ, ζη, ηι, ιγ. ἀπὸ δὲ τῶν ε, ζ, η, ι παρὰ τὰν διάμετρον ἄχθωσαν αἱ ες, ζτ, ηυ, ιξ. καὶ ἀπὸ τῶν σαμείων καθ᾽ ἃ τέμνοντι αὗται τὰν τοῦ κώνου τομὰν ἐπιζευχθεῖσαι ἐπὶ τὸ γ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν. φαμὶ δὴ καὶ νῦν, τὸ βδγ τρίγωνον, τῶν μὲν τραπεζίων τῶν βφ, λζ, θη, πι, καὶ τοῦ γιξ τριγώνου ἔλασσον εἶμεν ἢ τριπλάσιον. τῶν δὲ ζφ, ηθ, ιπ, καὶ τοῦ γοι τριγώνου μεῖζον ἢ τριπλάσιον. ἐκβεβλήσθω ἁ δβ ἐπὶ θάτερα, ἀγαγὼν κάθετον τὰν γκ, τᾷ γκ ἴσαν ἀπέλαβον τὰν ακ. νοείσθω δὲ πάλιν ζυγὸν τὸ αγ. μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ κ, καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ κ. κεκρεμάσθω δὲ καὶ τὸ γκδ τρίγωνον ἐκ τοῦ ἡμίσεος τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ γκ, ἔχον ὡς νῦν κεῖται, ἐκ τοῦ θατέρου μέρους τοῦ ζυγοῦ κρεμάσθωσαν

κατὰ

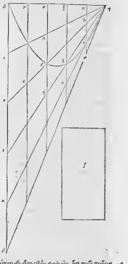
κατὰ τὸ α τὰ ρ χ ψ ω δ χωρία, καὶ τὸ μὲν ρ τῷ δ ε τραπεζίῳ ἰσορροπέοντα, οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται. τὸ δὲ χ τῷ ζ σ τραπεζίῳ. τὸ δὲ ψ τῷ τ η. τὸ δὲ ω τῷ υ ι. τὸ δὲ δ τῷ γ ι ξ τριγώνῳ. ἰσορροπήσει δὲ καὶ τὸ ὅλον τῷ ὅλῳ. ὥστε εἴη ἂν καὶ τὸ δ β γ τρίγωνον τριπλάσιον τῶν ρ χ ψ ω δ χωρίων. ὁμοίως δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται, ὅτι τὸ β φ τραπέζιον τοῦ ρ χωρίου μεῖζον, καὶ τὸ μ θ ε τραπέζιον μεῖζον ἐὸν τοῦ χ χωρίου, τὸ δὲ ζ φ ἔλασσον. καὶ τὸ μὲν μ η τραπέζιον μεῖζον ἐὸν τοῦ ψ χωρίου, τὸ δὲ η θ ἔλασσον. καὶ ἔτι τὸ μὲν ν ι τραπέζιον μεῖζον ἐὸν τοῦ ω χωρίου, τὸ δὲ π ι ἔλασσον. καὶ τὸ μὲν ξ ι γ τρίγωνον μεῖζον τοῦ δ χωρίου, τὸ δὲ γ ι ε ἔλασσον. δῆλον οὖν ἐστιν.



ις Ἔστω πάλιν τμῆμα τὸ β θ γ, περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας, καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. καὶ ἄχθω διὰ μὲν τοῦ β ἁ β δ παρὰ τὰν διάμετρον. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἁ γ δ, ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. ἔστω δὲ τοῦ β δ γ τριγώνου τρίτον μέρος τὸ ζ χωρίον. φαμὶ δὴ τὸ β θ γ τμῆμα ἴσον εἶμεν τῷ ζ χωρίῳ. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω δὴ πρότερον εἰ δυνατόν, μεῖζον. ἁ ὑπεροχὰ ᾇ ὑπερέχει τὸ β θ γ τμῆμα τοῦ ζ χωρίου, συντιθεμένα αὐτὰ ἑαυτᾷ ἐσσεῖται μείζων τοῦ β γ δ τριγώνου. δυνατὸν δέ ἐστι λαβεῖν τι χωρίον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ὃ ἐσσεῖται μέρος τοῦ β δ γ τριγώνου. ἔστω δὲ τὸ β γ ε τρίγωνον ἔλασσόν τε τᾶς εἰρημένας ὑπεροχᾶς, καὶ μέρος τοῦ β δ γ τριγώνου. ἐσσεῖται δὲ τὸ αὐτὸ ἁ β ε μέρος τᾶς β δ. διῃρήσθω οὖν ἁ β δ εἰς τὰ μέρη. καὶ ἔστω τὰ τῶν διαιρέσιων σημεῖα τὰ η, ι, κ. καὶ ἀπὸ τῶν η, ι, κ σαμείων ἐπὶ τὰ γ εὐθεῖαι ἐπεζεύχθωσαν. τέμνοντι δὴ αὗται τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἐπεὶ ἁ γ δ ἐπιψαύουσά ἐντι αὐτᾶς κατὰ τὸ γ. καὶ διὰ τῶν σαμείων τέμνοντι τὰν τομάν, αἱ εὐθεῖαι ἄχθωσαν παρὰ τὰν διάμετρον, αἱ μ φ, ν ρ, ξ θ. ἐσσοῦνται δὲ αὗται καὶ παρὰ τὰν β δ. ἐπεὶ οὖν ἔλασσον ἐστὶ τὸ β γ ε τρίγωνον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ β θ γ τμῆμα τοῦ ζ χωρίου, δῆλον ὡς τὰ συναμφότερα τό τε ζ χωρίον, καὶ τὸ β γ ε τρίγωνον, ἐλάσσονα ἐντὶ τοῦ τμήματος. καὶ τῷ β γ ε τριγώνῳ ἴσα τὰ τραπέζιά ἐντι, δι' ὧν ἁ τοῦ κώνου τομὰ πορεύεται, τὰ μ ε, φ λ, θ ρ, θ ο, καὶ τὸ γ ο σ τρίγωνον. τὸ μὲν γὰρ μ ε τραπέζιον κοινόν, τὸ δὲ μ λ ἴσον τῷ φ λ, καὶ τὸ λ ξ ἴσον τῷ θ ρ, καὶ τὸ χ ξ ἴσον τῷ ο θ. καὶ τὸ γ χ π τρίγωνον τῷ γ ο σ τριγώνῳ. τὸ δὴ ζ χωρίον ἔλασσον ἐστὶ τῶν τραπεζίων τῶν μ λ, ξ ρ, π θ, καὶ τοῦ π ο γ τριγώνου. καὶ ἔστι τὸ β δ γ τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ ζ χωρίου. τὸ δὴ β δ γ ἔλασσόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τῶν μ λ, ξ ξ, θ π τραπεζίων, καὶ τοῦ π ο γ τριγώνου, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ μεῖζον ἢ τριπλάσιον. οὐκοῦν οὐ μεῖζόν ἐστι τὸ β θ γ τμῆμα τοῦ ζ χωρίου. λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἔλασσον. ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. πάλιν ἁ ὑπεροχὰ ᾇ ὑπερέχει τὸ ζ χωρίον τοῦ β θ γ τμήματος, αὐτὰ ἑαυτᾷ συντιθεμένα ὑπερέχει καὶ τοῦ β δ γ τριγώνου. δυνατὸν δέ ἐστι λαβεῖν χωρίον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ὃ ἐσσεῖται μέρος τοῦ β δ γ τριγώνου.

γώνου. ἔστω οὖν τὸ β γ ε τρίγωνον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς καὶ μεῖζον τοῦ β δ γ τριγώνου. καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἐστι τὸ β γ ε τρίγωνον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς ᾇ ὑπερέχει τὸ ζ χωρίον τοῦ β θ γ τμήματος, τὸ β ε γ τρίγωνον, καὶ τὸ β θ γ τμῆμα ἀμφότερα ἐλάσσονά ἐντι τοῦ ζ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ζ χωρίον ἔλασσον τῶν τετραπλεύρων τῶν ε μ, φ ν, ξ ψ, π τ, καὶ τοῦ γ π σ τριγώνου. ἔστι γὰρ τὸ β δ γ τοῦ μὲν τριπλάσιον, τῶν δ' εἰρημένων χωρίων ἔλασσον ἢ τριπλάσιον, ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου ἐδείχθη. ἔλασσον ἄρα τὸ β γ ε τρίγωνον, καὶ τὸ β θ γ τμῆμα τῶν τετραπλεύρων τῶν ε μ, φ ν, ξ ψ, π τ, καὶ τοῦ γ π σ τριγώνου. ὥστε κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ τμήματος, ἔλασσον εἴη καὶ τὸ γ β ε τρίγωνον, τῶν περιλειπομένων χωρίων, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ ἴσον ἐὸν τὸ β ε γ τρίγωνον τοῖς τραπεζίοις τοῖς ε μ, φ λ, θ ρ, θ ο, καὶ τῷ γ σ ο τριγώνῳ, ἅ ἐστιν μείζονα τῶν περιλειπομένων χωρίων. οὐκ ἄρα ἔλασσον τὸ β θ γ τμῆμα τοῦ ζ χωρίου. ἐδείχθη δ' ὅτι οὐδὲ μεῖζον, ἴσον ἄρα τὸ τμῆμα τῷ ζ χωρίῳ.





ιζ

Τούτου δεδειγμένου φανερόν, ὅτι πᾶν τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ὕψος ἴσον. ἔστω γὰρ τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, κορυφὰ δὲ αὐτοῦ ἔστω τὸ θ σαμεῖον. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον τὸ β θ γ, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι, καὶ ὕψος ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ θ σαμεῖον κορυφά ἐστι τοῦ τμάματος, ἁ ἀπὸ τοῦ θ εὐθεῖα παρὰ τὰν διάμετρον ἀχθεῖσα δίχα τέμνει τὰν β γ. καὶ ἁ β γ ἐστὶ παρὰ τὰν ἐπιψαύουσαν τᾶς τομᾶς κατὰ τὸ θ. ἄχθω δὲ ἁ ε θ παρὰ τὰν διάμετρον. ἄχθω δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ β παρὰ τὰν διάμετρον ἁ β δ. καὶ ἔστω δὲ τῷ γ ἁ γ δ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. ἐπεὶ οὖν ἁ μὲν κ θ παρὰ τὰν διάμετρόν ἐστιν, ἁ δὲ γ δ ἐπιψαύουσα τᾶς τομᾶς κατὰ τὸ γ. ἁ δὲ ε γ παράλληλός ἐστι τᾷ ἐπιψαυούσᾳ τᾶς το-

μᾶς κατὰ τὸ θ. τὸ β δ γ τρίγωνον τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ β θ γ τριγώνου. ἐπεὶ δὲ τὸ β δ γ τρίγωνον, τοῦ μὲν β θ γ τμήματος διπλάσιον, δῆλον ὡς ἐπίτριτόν ἐστι τὸ β θ γ τμῆμα τοῦ β θ γ τριγώνου.

Τῶν τμαμάτων τῶν περιεχομένων ὑπό τε εὐθείας καὶ καμπύλας γραμμᾶς, βάσιν μὲν καλῶ τὰν εὐθεῖαν, ὕψος δὲ τὰν μεγίσταν κάθετον ἀπὸ τᾶς καμπύλας γραμμᾶς, ἀγομέναν ἐπὶ τὰν βάσιν τοῦ τμάματος, κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, ἀφ᾽ οὗ ἁ μεγίστα κάθετος ἄγεται.

ιη Εἴκα ἐν τμήματι ὃ περιέχεται ὑπὸ εὐθείας, καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἀπὸ μέσας τᾶς βάσεως ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὰν διάμετρον, κορυφὰ ἐσσεῖται τοῦ τμάματος τὸ σαμεῖον, καθ᾽ ὃ ἁ παρὰ τὰν διάμετρον ἀχθεῖσα τέμνει τὰν τοῦ κώνου τομάν. ἔστω γὰρ τμῆμα τὸ α β γ, περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἀπὸ μέσας τᾶς α γ ἄχθω ἁ δ β παρὰ τὰν διάμετρον. ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίου τομᾷ ἁ β δ ἄκται παρὰ τὰν διάμετρον, καὶ ἴσαι ἐντὶ αἱ α δ, δ γ, δῆλον ὡς παράλληλός ἐντι ἅ τε α γ, καὶ ἁ κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς. φανερὸν οὖν ὅτι ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν α γ ἀγομένας κάθετος μεγίστα ἐσσεῖται, ἁ ἀπὸ τοῦ β ἀγομένα. κορυφὰ οὖν ἐστι τοῦ τμήματος τὸ β σαμεῖον.



ιθ Εἴκα τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι παρὰ τὰν διάμετρον, ἁ μὲν ἀπὸ μέσας τᾶς βάσεως, ἁ δὲ ἀπὸ μέσας τᾶς ἡμισείας, ἁ ἀπὸ μέσας τᾶς βάσεως ἀχθεῖσα, τᾶς ἀπὸ μέσας τᾶς ἡμισείας ἀγομένας ἐπίτριτος ἐσσεῖται μάκει. ἔστω γὰρ τὸ α β γ τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. καὶ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον ἁ μὲν β δ, ἀπὸ μέσας τᾶς α γ, ἁ δὲ ε ζ ἀπὸ μέσας τᾶς α δ. ἄχθω δὲ καὶ ἁ ζ θ παρὰ α γ. ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίου κώνου τομᾷ ἁ β δ παρὰ τὰν διάμετρον ἄκται. καὶ αἱ α δ, ζ θ παρὰ τὰν κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσαν. ἔσται μέν τοι δῆλον, ὡς τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ β δ ποτὶ τὰν β θ μάκει, ὃν ἁ α δ ποτὶ τὰν ζ θ δυνάμει. τετραπλασία ἄρα ἐστὶ καὶ ἁ β δ τᾶς β θ μάκει. φανερὸν οὖν ὅτι ἐπίτριτος ἐστὶν ἁ β δ τᾶς ε ζ μάκει.



κ Εἴκα εἰς τμῆμα περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, τρίγωνον ἐγγραφῇ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι, καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ, μεῖζον ἔσται τὸ ἐγγραφὲν τρίγωνον, ἢ ἥμισυ τοῦ τμήματος. ἔστω γὰρ τὸ α β γ τμῆμα, οἷον εἴρηται, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον τὸ α β γ, τὰν αὐτὰν ἔχον βάσιν τῷ ὅλῳ, καὶ ὕψος ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ τρίγωνον τῷ τμήματι τὰν αὐτὰν ἔχει βάσιν, καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ, ἀναγκαῖον τὸ β σαμεῖον κορυφὰν εἶναι τοῦ τμήματος. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἁ α γ τᾷ κατὰ τὸ β ἐπιψαυούσᾳ τᾶς τομᾶς, ἄχθω ἁ δ ε διὰ τοῦ β παρὰ τὰν α γ. καὶ ἀπὸ τῶν α, γ αἱ α δ, γ ε, παρὰ τὰν διάμετρον. πεσοῦνται δὴ αὗται ἐκτὸς τοῦ τμάματος. ἐπεὶ οὖν ἥμισυ ἐστὶ τὸ α β γ τρίγωνον τοῦ α δ ε γ παραλληλογράμμου, φανερὸν ὅτι μεῖζον ἐστὶ, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ τμήματος διειλημμένου, δῆλον ὅτι ὡς εἶπα τὸ τμῆμα δυνατόν ἐστι πολύγωνον ἐγγράψαι. ὥστε εἶμεν τὰ περιλειπόμενα τμήματα παντὸς ἐλάσσονα,

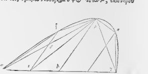


τοῦ

τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἀφαιρεῖται μὲν γὰρ ἀεὶ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, διὰ τοῦτο φανερὸν ὅτι ἐλασσοῦντες ἀεὶ τὰ λειπόμενα τμήματα, ποιήσομεν ταῦτα ἐλάσσονα παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

κα

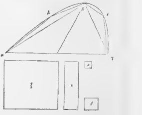
Εἴκα εἰς τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τρίγωνον ἐγγραφῇ, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἐγγραφέωντι δὲ καὶ ἄλλα τρίγωνα εἰς τὰ λειπόμενα τμήματα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμημάτεσσι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἑκατέρου τῶν τριγώνων τῶν εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἐγγραφέντων, ὀκταπλάσιον ἔσται τὸ τρίγωνον τὸ εἰς τὸ ὅλον τμῆμα ἐγγραφέν. ἔστω τὸ αβγ τμῆμα, οἷον εἴρηται. καὶ τετμάσθω ἁ αγ δίχα τῷ δ. ἁ δὲ βδ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον, τὸ β ἄρα σαμεῖον κορυφά ἐστι τοῦ τμήματος. τὸ ἄρα αβγ τρίγωνον τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχει τῷ τμήματι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό. πάλιν τετμάσθω δίχα ἁ αδ τῷ ε.



καὶ ἄχθω ἁ εζ παρὰ τὰν διάμετρον. τετμάσθω δὲ ἁ αβ κατὰ τὸ θ. τὸ ἄρα ζ σαμεῖον κορυφή ἐστι τμάματος τοῦ αζβ. τρίγωνον ἄρα τὸ αζβ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχει τῷ αζβ τμήματι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό. δεικτέον ὅτι ὀκταπλάσιόν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον τοῦ αβζ τριγώνου. ἔστιν οὖν ἁ βδ τᾶς μὲν εζ ἐπίτριτος, τᾶς δὲ εθ διπλασία. διπλασία ἄρα ἐστὶν ἁ εθ τᾶς θζ. ὥστε καὶ τὸ αεβ τρίγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ζβα. τὸ μὲν γὰρ αεθ διπλάσιόν ἐστι τοῦ αθζ. τὸ δὲ θβε τοῦ ζθβ. ὥστε τὸ αβγ τοῦ αζβ ὀκταπλάσιον. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τοῦ εἰς τὸ βηγ τμῆμα ἐγγραφέντος.

κβ

Εἴκα ᾖ τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ χωρία τεθέωντι ἑξῆς ὁποσαοῦν ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ, ᾖ δὲ τὸ μέγιστον τῶν χωρίων ἴσον τῷ τριγώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, σύμπαντα τὰ χωρία ἐλάσσονα ἔσται τοῦ τμήματος. ἔστω γὰρ τμῆμα τὸ αδβεγ, περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου τομᾶς. χωρία δὲ ἔστω ὁποσαοῦν ἑξῆς κείμενα τὰ ζ, η, θ, ι. τετραπλάσιον δὲ ἔστω τὸ ζ. καὶ ἔστω τὸ ζ ἴσον τῷ τριγώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ὕψος ἴσον. λέγω ὅτι τὸ τμῆμα τῶν ζ, η, θ, ι χωρίων μεῖζόν ἐστιν. ἔστω τοῦ μὲν ὅλου τμήματος κορυφὰ τὸ β. τῶν δὲ περιλειπομένων τμημάτων τὰ δ, ε. ἐπεὶ οὖν τὸ αβγ τρίγωνον ὀκταπλάσιον ἐστὶν ἑκατέρου τῶν αβδ, βεγ τριγώνων, δῆλον ὅτι ὡς ἀμφοτέρων αὐτῶν ἐστι τετραπλάσιον. καὶ ἐπεὶ τὸ αβγ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ζ χωρίῳ, κατὰ τὰ αὐτά

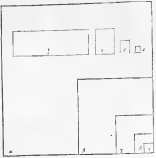


ἢ καὶ τὰ αδβ, βεγ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ η χωρίῳ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἐγγραφόμενα τρίγωνα, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμάμασι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἴσα ἐντὶ ὄντων τῷ θ. καὶ τὰ ὕστερον γινόμενα τμήματα ἐγγραφόμενα τρίγωνα ἴσα τῷ ι. καὶ χωρίῳ, σύμπαντα ἄρα τὰ προτεθέντα χωρία ἴσα ἐσσοῦνται πολυγώνῳ τινὶ ἐγγραφέντι εἰς τὸ τμῆμα. φανερὸν οὖν, ὅτι ἔλασσόν ἐστι τοῦ τμήματος.

κγ

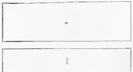
Εἴκα μεγέθεα συντεθέωντι ἑξῆς ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ τὰ πάντα μεγέθεα, καὶ ἔτι τοῦ ἐλαχίστου τὸ τρίτον μέρος εἰς τὸ αὐτὸ συντεθέντα, ἐπίτριτα ἐσσοῦνται τοῦ μεγίστου. ἔστω οὖν ὁποσαοῦν μεγέθεα ἑξῆς κείμενα τὰ α, β, γ, δ, ε τετραπλάσια ἕκαστον τοῦ ἑπομένου. μέγιστον δὲ ἔστω τὸ α. ἔστω δὲ τὸ μὲν ζ τρίτον τοῦ β, τὸ δὲ η τοῦ γ, τὸ δὲ θ τοῦ δ, τὸ δὲ ι τοῦ ε. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ζ τοῦ β τρίτον μέρος ἐστί, τὸ δὲ β τοῦ α τέταρτον μέρος ἐστίν, ἀμφότερα τὰ β, ζ, μέρος τρίτον ἐστὶ τοῦ α. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ η, γ τοῦ β. καὶ τὰ θ, δ τοῦ γ, καὶ τὰ ι, ε τοῦ δ, καὶ

δ. καὶ τὰ σύμπαντα δὴ τὰ β γ δ ε ζ η θ ι, τρίτον μέρος ἐστὶ τῶν συμπάντων τῶν α β γ δ ε. ἔστι δὲ καὶ αὐτὰ τὰ ζ η θ τρίτον μέρος αὐτῶν τῶν β γ δ. καὶ τὰ λοιπὰ ἄρα τὰ β γ δ ε ι τοῦ λοιποῦ τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ α. δῆλον οὖν, ὅτι τὰ σύμπαντα τὰ α β γ δ ε, καὶ τὸ ι, τουτέστι τὸ τρίτον τοῦ ε, τοῦ α ἐστὶν ἐπίτριτα.



κδ Πᾶν τμῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ, καὶ ὕψος ἴσον. ἔστω γὰρ τὸ α δ β ε γ τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. τὸ δὲ α β γ τρίγωνον ἔστω, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι, καὶ ὕψος ἴσον. τοῦ δὲ α β γ τριγώνου ἔστω ἐπίτριτον τὸ κ χωρίον. δεικτέον ὅτι ἴσον ἐστὶ τῷ α δ β ε γ τμάματι. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζον, ἢ ἔλασσον. ἔστω πρότερον εἰ δυνατόν, μεῖζον τὸ α δ ε β τμῆμα τοῦ κ χωρίου. ἐνέγραψα δὴ τὰ α δ β, β ε γ τρίγωνα, ὡς εἴρηται. ἐνέγραψα δὲ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἄλλα τρίγωνα, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμήμασι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό. καὶ ἀεὶ εἰς τὰ ὕστερον γινόμενα τμήματα ἐγγράφω δύο τρίγωνα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμήμασι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό. ἐσσοῦνται δὴ τὰ καταλειπόμενα τμήματα ἐλάσσονα τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ α δ ε β γ τμῆμα τοῦ κ χωρίου. ὥστε τὸ ἐγγραφόμενον πολύγωνον μεῖζον ἐσσεῖται τοῦ κ, ὅπερ ἀδύνατον. ἐπεὶ ἐστὶν ἑξῆς κείμενα χωρία ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ. πρῶτον μὲν τὸ α β γ τρίγωνον τετραπλάσιον τῶν α δ β, β ε γ τριγώνων. ἔπειτα δὲ, ταῦτα τετραπλάσια τῶν εἰς τὰ ἑπόμενα τμήματα ἐγγραφέντων. καὶ ἀεὶ οὕτω δῆλον, ὡς σύμπαντα τὰ χωρία ἐλάσσονά ἐστιν, ἢ ἐπίτριτα τοῦ μεγίστου. τὸ δὲ κ ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ μεγίστου χωρίου. οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ α δ ε β γ τμῆμα τοῦ κ χωρίου. ἔστω δὲ εἰ δυνατόν, ἔλασσον. κείσθω δὴ τὸ μὲν α β γ τρίγωνον, ἴσον τῷ ζ. τοῦ δὲ ζ τέταρ-







τέταρτον τὸ κ. καὶ ὁμοίως τοῦ η τὸ θ. καὶ ἀεὶ ἑξῆς τιθέσθω. ὥστε καταγίνηται τὸ ἔσχατον ἔλαττον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ κ χωρίον τοῦ τμήματος, καὶ ἔστω ἔλασσον τὸ ι. ἐστι δὲ τὰ ζ η θ ι χωρία, καὶ τὸ τρίτον τοῦ ι, ἐπίτριτα τοῦ ζ. ἐστι δὲ καὶ τὸ κ τοῦ ζ ἐπίτριτον. ἴσον ἄρα τὸ κ τοῖς ζ η θ ι, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ι. ἐπεὶ οὖν τὸ κ χωρίον τῶν μὲν ζ η θ ι χωρίων ὑπερέχει ἐλάσσονι τοῦ ι, τοῦ δὲ τμήματος μείζονι τοῦ ι, δῆλον ὡς μείζονά ἐντι τὰ ζ η θ ι χωρία τοῦ τμήματος, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γάρ, ὅτι ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν χωρία ἑξῆς κείμενα ἐν τετραπλασίονι λόγῳ, τὸ δὲ μέγιστον ἴσον ᾖ τῷ εἰς τὸ τμῆμα ἐγγραφομένῳ τριγώνῳ, τὰ σύμπαντα χωρία ἐλάσσονα ἐσσεῖται τοῦ τμήματος. οὐκ ἄρα τὸ α δ β γ τμῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ κ χωρίου. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μεῖζον, ἴσον ἄρα ἐστὶν τῷ κ. τὸ δὲ κ χωρίον ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ α β γ. καὶ τὸ α δ β γ τμῆμα ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ α β γ τριγώνου.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΥ
παραβολῆς τέλος.

ARCHIMEDIS SYRACVSANI PHILOSOPHI AC GEOMETRAE EXCELLENTISSIMI OPERA, quæ quidem extant, omnia latinitate iam olim donata, nuncq́ primum in lucem edita.

Cum Cæsareæ Maiestatis gratia & priuilegio ad quinquennium.

BASILEAE.

AMPLISSIMO SENATORVM ORDINI VRBIS NORINBERGAE, DOMINIS SVIS obſeruandis, Thomas Gechauff, cognomento Venatorius, ſe ipſum commendat.

PHiloſophorum omnium, ut uidere licet, P. C. unum hoc ac ſubinde continuum fuit ſtudium, ut ſimul & animos & actiones inconditæ multitudinis, ab illis nunquam non genus noſtrum ſequentibus erroribus, eximerent, atq; ad inquirendæ ueritatis amorem potius inclinarent, inſtigarent, inflammarent. Quorum magiſtros bifariam diuiſos à ueteribus iam olim accepimus. Aut enim Italici uocabantur, ab ea Italiæ parte, quæ pridem magna Græcia eſt dicta, quorum autor & magiſter Pythagoras ille Samius fuiſſe perhibetur. Putabant illi plenam naturalium rerum, ſynceramq; cognitionem penes ſe unos reperiri poſſe. Qui ab ea ſecta alieni eſſe uidebantur, Ionicos ſe dicebant, hoc potiſſimum nomine ſibi placentes, quod in ipſa media, ut dicitur, Græcia philoſophiæ placita traderent. Poſt longam uerò ſeriem doctorum tandē ad Anaxagoram et ſumma et caput eius ſectæ rediјt: cui deinde Archelaū ſucceſſiſſe perhibent. Huius Archelai ſucceſſorem, Auguſtinus doctor eccleſiaſticus ſanctus, Socratem facit: quem ipſe Plato (aliorum philoſophorum quaſi deus) magiſtrum habuiſſe, antiqua et iam olim recepta in ſcholis noſtris opinione, ad nos uſq; perlatum eſt. Atqui Socrates cū uideret cauſas rerum ab illis non rarò inquiri, qui parum purgato eſſent animo: cum ipſe interim animum ſuum ad cognitionem potius ueri et ſummi illius boni intenderet: noluit imperitam multitudinem rebus illis, quæ captum humani ingenij ut plurimum ſuperant, implicatam teneri. placuit communi hominum utilitati conſulere, ac ipſum iam ſapientiæ ſtudium ad corrigendos mores, componendasq; ciuiles actiones, quaſi cœlo ereptam prædam, inter homines collocare. Et rectè quidem ille cenſuit. Vt quid enim relictis imis, ad ſumma ſtatim admitterentur, quæ alioqui infauſto ſidere nata cōſpiciuntur ingenia? ad aratrum potius quàm ad Muſarum ſacra, idonea iudicamus huiuſmodi portenta. Præter rugas, & triſte ſupercilium, & ueſanam in pectore bilem, quid illi aliud è ſtudijs ſuis referunt? Quæ uerè generoſa eſt aquila, implumis adhuc cum eſt, nunquam ſeœlco credit aperto: ſecus factura, ubi ad ſolis radios contuendos iam luminis ſibi eſſe uiderit ſatis. Sic præclara quæ ſunt ingenia, intra præſcri

ptos ſapientiæ limites tantiſper ſeſe continebunt, donec non tam ſuo amo
re, quàm doctorum uirorum iudicio, ſummas bonarum artium partes cũ
laude tueri & poßint & ualeant. Quisquis hæc quæ dicimus hic, impro
bare conatus fuerit, illum nos extra ſe poſitum, equidem non temerè con-
tenderimus. Quid enim omnino eßet uita noſtra, ſi hiſce ſtudijs carere o-
porteret, ſine quibus nulla inter nos conſtare poteſt humanitatis ſocietas,
niſi barbara quædam barbaries, aut (ut Plato uocat) ἀφιλόσοφος καὶ ἄ-
μουσος. Homine neſciente põdera, atq; adeò neſciente menſuras rerum,
quid ſtolidius, imò quid inhumanius uidere queat ille omnia inſpicientis ſo
lis oculus? Quare non ab re uidetur ille mihi cum ſacra tũ prophana pol-
luere, quiſquis poſthac honeſtas diſciplinas uel contẽpſerit, uel alijs ad
ea penetrare uolẽtibus, aditum recluſerit, aut alioquin data opera remo
ratus fuerit. Præſtat cum præclaris ingenijs conuenire potius, quàm lon
gè lateq; regnantem, ac bonas artes uaſtantem, iuuentutem à contempla
tione ueritatis deterrentem, ſequi conſuetudinem. Quid eſt enim conſue
tudo ad ueritatem collata, niſi pabulum erroris? Qui tales ſunt, in orbẽ
illum diſciplinarũ, quæ ſtudio quærendæ ueritatis famulantur, nullo mo
do ſe intromitti ſperent. Occinimus illis uetus hoc: Procul eſte propha-
ni. Procul, inquã ego, à lectione Archimedis noſtri abſint uniuerſi, qui
nihil ad regulã, nihil ad perpendiculum, nihil ad libellam reuocare didi
cerunt. Nos ut hoc cõſilium noſtrũ admiſerint, non ualde laboramus. nõ
enim ſtudemus placere illis, dum ui magna conamur rectis ſtudijs prodeſ
ſe, ac ipſi etiam humanitati ſatiſfacere. Officij noſtri partes ſunt, laten-
tẽ adhuc in rebus ueritatẽ eruere, ac omnia illius optima quæ ſunt, huma
nis oculis conſpicienda inferre. Quid hic enim poſiti agimus aliud, quàm
ut plurimos ad ueritatis ſtudia inuitemus, dum reuelata facie, ipſam per-
fectè contemplaturi ſumus in patria? Interim tanquam in tranſcurſu hiſ-
ce uerè liberalibus artibus tædia præſentis uitæ fallentes non illibenter.
Solent enim hæ artes honeſtißimæ non tantũ delectare ſuos cultores, ſed
etiam commouere, afficere quoq; & inflammare animũ ipſum, ut hoc ma
iore deſiderio ad perfruendæ olim ueritatis bonũ rapiatur, quo præſtan
tior eſt umbrâ ueritas, lux tenebris, deniq; quo eſt maior & melior homi
nibus ipſe Deus. Nouimus ueſtri Senatorij ordinis uiros non paucos, qui
ſe hiſce artibus penè immerſerint, cum alioqui naturalium rerum contem
platione & eßent & haberentur clarißimi ab omnibus. Arbitrati ſunt
illi ſapienter quidem, quòd in his ipſis ſtudijs inſumptas in Remp. uires,
recollecturi eßẽt, ac parum recluſis à ſe publicis curis, quoties in gratiã
redi-

redirent cum literatis literis, lau dem longè amplissimam sese consecutos esse censebant. Quis enim indecorum putauerit in ea re recreari, refocillarique animo, à qua neque naturæ nostræ Genius abhorret, neque ipse opifex rerū subinde offendi posit unquā? Et meritò illi in hoc potissimū studiorū genus incubuerūt. Quia enim liberæ ciuitates aut mari aut terra uictus rationē quærere uidētur: ut naufragia uitēt gubernatores, astronomiæ cognitio cū primis fulcātib. maria, nō tam utilis quàm necessaria erit futura. quæ hac deinde industria importātur merces, ut rectissimè in singulos dispensentur, numerorū scientia primas sibi uendicare solet. Ne porrò termini rerū confunderentur, ab Aegyptijs, propter Nili exundationes, noua apud illos iuncta esse perhibetur dimensio agrorum, quæ ob eam causā Geometriæ nomen ferre iure queat. Excelluisse in hisce disciplinis Vulcanum illum, Homerus haud obscurè significauit:

Cum Thetis Idæos (heu nunquam uana parentum
Auguria) expauit uitreo sub gurgite remos.

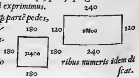
Vulcanus itaque ad Thetidis preces, Achilli clypeum cōfecturus, quid non summè, quid non artificiosissimè ob oculos lectoris posuit? Videmus eodem in clypeo non tam uirtutum quàm disciplinarum semina omnium, ac rerum præclarissimarum perfectissimè expressa simulacra, quibus ille artificiosa compositione sua, dij boni, quantam maiestatem addere solet? Quantum deinde gratiæ & laudis consecutus est, in coniungendis per duas subinde ciuitates, cum machinamentis, tum instrumentis, tum ornamentis, ut in unius clypei circumferentiam unà simul & officia magistratus, & studia militum, & uulgi spectacula, & agricolarum exercitia, & pastorum lusus, & alia id genus multa, quæ Geometrica proportione contemplanda doctorum uirorum oculis obiecerit: quæ omnia, qui sapientiæ nomen daturus est, ignorare non debet. Nam uirtutis & iustitiæ imaginem in eius clypei descriptione propositam, facile quisquis non est ingenio præditus obtuso, dispicere queat. Quid quod optimus uates & sphæram imaginum cœli, solis dico & lunæ, stellarumque cursus, cum alijs multis, callidissimè unius clypei planicie est complexus? quæ in contemplationem deducta, ut operosum, ita magnificum absoluere uidentur ædificium. Tanta est gratia rerum bene dispositarū, ubi illa singularum partium symmetria ad rectè doctos & inculpatos iudices fuerit conuocata. Vidimus nos Romæ cum essemus in monte Capitolino (Capitolium hodie uocant eum locum) Comœdiam agi, cumque à personis peragēda esset Pœnulus, ipsa quæ una è uiginti numero est comœdia Plauti, per eos

homines, qui haud ita bene ad illam subeundam prouinciam essent parati. Neq; enim personas, quas referebant (licet Itala proles) ubique fœliciter repræsentabãt: quod cuius uitio factum sit, equidem nunc non sum scripturus. Erat hic locus nõ parum à prima sui constitutione iam factus alienissimus. In eo tamen, quia erat capax multitudinis, & quia omnia numero, pondere quoq; & mensura digesta esse uidebantur, facile quod in actoribus fabulæ desiderabant complures, iusta illa compositæ aulæ symmetria, spectatores in officio retinebat. Tanta est, ut diximus, bene in ordinem digestarum rerum gratia.

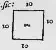
Hic iuuat augustum Romæ uidisse theatrum,
Instratumq; locum tabulis, nitidisq; columnis,
Qui ter uiginti, sex atq;, ascendit in ulnas,
Si in longum reuoces. latè contraxior exit,
Fert uix dimidio, ceu continet area longi.
Bis quoq; quindenis ulnis spaciatur in altum.
Hic quia Saturnus latuit, Saturnius olim
Dictus. post Cicero cecinit, Tarpeia rupes.
Postera deinde ætas tenuit Capitolia dici.
Non ratione tamen sine, &c.

Hæc ideo retulimus copiosius, ut opinionibus imperitæ multitudinis commodius occurreremus: ac dein ut intelligant hi qui tractabiles adhuc sese præbẽt mansuetioribus Musis, hæc studia non tantum priuatis hominibus summam sæpè adferre uoluptatem, sed etiam publicè & in foro & in curia, & in scholis exercitamẽta esse honesta, docta & laude digna, utilia quoq;, & rebusp. necessaria. Ob eã, opinor, causam, M. Fabius Quintil. lib. de Institutione oratoria primo, futurũ ait oratorẽ Geometriæ oportere omnino esse peritũ, quòd Geometria potiss. in numeros diuisa sit, atq; formas. Nos hic de iugeri mẽsura, quæ adfert ille, adducimus tantũ, & præterea nihil. Nos facillimũ, inquit Quintilianus, et imperitis sequamur experimentũ. Iugeri mensurã ducẽtos et quadraginta lõgitudinis pedes esse, dimidioq; in latitudine patêre, non ferè quisquã est qui ignoret. Huius schema nos ita rudibus literarũ exprimimus.

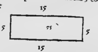
At centeni & octogeni in quamq; partẽ pedes, idẽ spaciũ extremitatis. Sed multo amplius diuisæ quatuor lineis areæ faciunt. exemplum esto. Id si computare quẽ piget, breuioribus numeris idem discat.



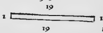
feat. Nam deni in quadram pedes, quadraginta per oram intra centum erunt. sic:



At si quini deni per latera, quini in frõte sint, ex illo amplectuntur quartam partem deducent, eo dẽ circumductu, sic:



Si uero porrecti utrinq; undeuiceni singulis distent, non plures intus quadratos habebunt, quàm per quot lõgitudo circũducetur: quæ circũibit autẽ linea, eiusdem spacij erit, cuius ea quæ centum continet. Schema illius sic formabis. Hunc locum ideo figuris suis expositũ, oculis



subijcere uolui, quod uiderim quosdam alioqui non indoctos uiros, qui ipsum aut non intellexerunt: aut quod iuxtà est, simulando prætererunt. Hæc cum dico, non doctoris partes usurpo mihi, sed monitoris tamen personã ubi recepero, qui æqui sunt iudices, nõ contẽnent. Non hic ostendã quæ elemẽta geometrica, quo nomine à nostris appellentur. nam quid signum sit, quid linea, quid angulus, circumferentia quoq; & superficies, præter Archimedẽ nostrũ Euclides quoq; philosophus et mathematicus Megarensis, nõ utiq; incelebris, admodũ copiose cõscripsit. In solidis corporibus cõficiendis, qualia sunt pyramides, coni, cylindri, cubi, sphæræ, & id genus alia corpora, magistrũ hunc nostrũ Archimedem, nemo non tutissime fuerit sequutus. Hic est Archimedes ille, cuius machinationibus M. Marcellus multũ ac diu uictoriã suã apud Syracusas inhibitã sensit: eximia tamen hominis prudentia delectatus uictor, adeò, ut captis Syracusis capiti illius parceretur edixerit: penè tantũ gloriæ in seruato Archimede, quantũ in oppressis Syracusis reponens. Quanquã intentũ geometricis formis, quas in puluere descripserat, ab ignaro milite, quis'nã esset rogatus, cũ nomen suũ non statim indicaret, obtruncatus, sanguine suo artis propriæ lineamẽta confudit. Quo factũ, ut propter idẽ studiũ modò donaretur uita, modò spoliaretur. Aegrè id Marcellum tulisse, sepulturæq; curã habuisse, ac propinquis etiã inquisitis, honori, præsidioq; nomẽ eius ac memoriam fuisse. Atque hæc de Archimede partim ex T. Liuio, partim ex Valerio Max. in præsentia retulisse sit satis. Superest P. C. ut magno cõsensu, hisce præsertim turbulentiss. temporib. exulãtes, nudasq; ac penè iam extinctas illas uerè liberales disciplinas humaniter colligere atq; fouere studeatis. Decèt enim magistratus assuescere cũ primis nõ tantũ rebus humi repentib. sed etiã studijs

dijs Musarum, ut quæ solæ molem illam tractandarum rerum, non raro leuare, frequenter uerò & excutere ab humeris uestris, quàm longissime & possint et ualeant. Valete unà cum florentissima Republica uestra, diu fœlices. Ex urbe uestra, IIII. Calend. Februarij, Anno M.D. XLIIII.

ARCHIMEDIS DE SPHAERA ET CYLINDRO LIBER PRIMVS.

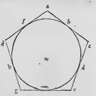
ARCHIMEDES DOSItheo Salutem.

PRIVS quidem ad te misi quę à nobis inspecta essent, cõscribentes eorum demonstrationes, quod omnis portio contenta à recta, & à coni rectanguli sectione, sesquitertia sit triangulo habenti basim cum portione eandem, & altitudinẽ eidem æqualem. Nunc autem quorundam occurrentiũ theorematum, quæ effectu probata uidentur, demonstrationes conscripsimus. Ipsa uero huiusmodi sunt. Primum quidem, quod omnis superficies spheræ quadrupla est circulo in ea maximo. Deinde quod superficiei cuiuscunq; portionis sphæræ circulus ille æqualis est, cuius quæ ex centro æqualis sit rectæ ductæ à uertice portionis, ad circuli qui basis est portionis circumferentiam. Ad hæc quòd cuiusq; sphæræ cylindrus, qui basem habeat circulum in sphæra maximum, & altitudinem æqualem sphæræ diametro sesquialter habetur: & superficies eius cum basibus superficiei sphærę est itidem sesquialtera. Hæc autem accidentia natura ipsa inerant prius circa dictas figuras, uerum non fuerant à superioribus cognita, qui ante nos

Scribantur autem prius & dignitates, & sumpta ad demonstrationem eorũ. Sunt quædam in plano curuæ lineæ terminatæ, quæ rectis iũgentibus terminos earum, aut totæ sunt in easdem partes cauæ, aut nihil habent in alteras. In easdem partes cauam uoco lineam talem, in qua si duo puncta utcunq; sumantur, lineæ rectæ inter illa puncta mediæ, aut omnes in easdem partes dictæ lineæ cadunt: aut quædam in easdem partes, quædam secundum eam, nulla uero in alteras partes. Similiter autem & superficies quædam finitæ sunt ipsæ quidem nõ in plano, sed terminos suos in plano habentes: & in easdem plani eius in quo earum sunt termini, partes aut totæ erunt, aut nihil habebunt in alteras partes. In easdẽ partes cauas illas uoco, in quibus si sumantur duo puncta, rectæ inter illa ductæ mediæ, aut omnes in easdem partes cadunt superficiei: aut quædam in easdem partes, quædam secundum eas, nulla autem earum in alteras partes. Frustũ uerò solidum uoco, si quando sphæram secuerit conus, qui uerticem habeat ad centrum sphæræ, figuram intra comprensam, & à superficie coni, & à superficie sphæræ intra conum comprensæ. Rhombum autem solidum uoco, ubi duo coni in eadem base constattes, uertices habuerint utrinq; sitos plano basis, ita ut axes eorum sint in directum sibi inuicem coniuncti, figuram ex utrisq; conis cõpositam. Sumo autem hæc: Linearum eosdem terminos habentium rectam minimam esse. Aliarum uero quæ in plano fuerint, si eosdem habuerint terminos, eas inæquales esse. Vbi autem ambæ in easdem partes cauæ fuerint, ut uel altera tota comprendatur ab altera, uel altera earum ab alterius superficie, & recta eosdem cum illa terminos habente contineatur: uel quidpiam ipsius contineatur, quidpiam uero habeat commune cum altera, & comprensam esse minorem. Similiter autem & superficierum eosdem terminos habentium, si in plano terminos habuerint, minimam esse planam. Aliarum uero superficierum, et eosdem terminos habentium, si in plano terminos habeant, eas esse inæquales: ubi autem ambæ in partes easdem cauæ fuerint, & uel altera tota contineatur ab altera, aut alteram earum ab altera superficie, & plana eosdem terminos cum illa habente: aut eius partem quidem comprendi constet, partem uero communem habere, & comprensam esse cõprendente minorem. Amplius autem & inæqualium linearum, siue superficierum, siue solidorum, maius excedere minus tanto, quantum ipsum sibi ipsi totiens complicari potest, ut excedat omnem propositam sui generis quãtitatem. His autem suppositis, si in circulum figura multangula inscribatur, constat ambitum figuræ inscriptæ esse circumferentia circuli minorem. Vnumquodq; enim figuræ inscriptæ latus minus est ea circumferentiæ parte, quæ per ipsum abscisa fuerit.

Si

1 SI circulo figura plurium angulorum circumſcribatur, linea recta quæ ex omnibus figuræ circumſcriptæ lateribus ſimul in directum coniunctis efficitur, ipſius circuli circūferentia longior eſſe probatur.



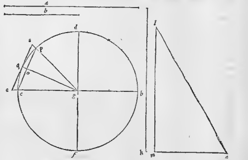
Circulo itaq; cuicunq; figura quæuis pluribus angulis conſtituta circumſcribatur: Dico lineas dictam figuram claudentes, ſi ſimul in directum cõiungantur, lineam unam rectam conſtituere, circuli dicti circumferentia longiorem. Eſto igitur, exempli gratia, circulus cuius centrum m, quem circa ſit aptata figura a b c d e f g h k l, cuius anguli ſint ad puncta a c e g k notati, contactus uero laterum & circuli ad puncta b d f h l. Quoniam itaque a b, a l, cum arcum b l intra ſe coerceant, ipſo longiores habentur: ſimiliter c b, c d, ſuo arcu b d: item e d, e f, maiores: item f g, g h ſuo, demum k h, k l, quæq; duæ coniunctæ ſuis arcubus maiores ſint. eiſdem enim terminis cum ſuo quæq; duæ arcu prodeuntes ipſum includunt, erit, ut ſi una ex omnibus his recta linea iungatur, circuli circumferentia ſit longior, quæ ex illis arcubus colligitur.

2 DAtis duabus magnitudinibus inæqualibus, duæ rectæ lineæ poſſunt inueniri, quarum maior ad minorem ſit relata proportione minori, quàm magnitudo poſita maior ad minorem contineatur. Sunto igitur duæ magnitudines datæ a b maior, d minor. Dico duas inueniri poſſe rectas lineas inæquales, quæ ſententiam propoſitionis exæquantur. Statuatur itaq; per ſecundam primi Euclidis b c æqualis ipſi d, ſumatur deinde linea quæuis recta, quæ ſit f g, atq; a c totiens ſibi ipſi coaceruetur & multiplicetur, donec productum excreſcat maius ipſo d, quod uocetur a k. eſto et f g tantundem multiplex ipſius g h. erit itaq; ex hoc, ut quemadmodum a k & a c ſeſe reſpiciunt, ita f g, & g h. & item modo cõuerſo, ſicut a c refertur ad a k, ita quoq; g h ad g f. Aſt quoniam a k eſt maius ipſo d, cui c b poſitus eſt æqualis, refertur igitur a c ad a k minori proportione, quàm idem a c ad c b. quare ex coniuncta proportione c a k ad a k minori, quàm a c b ad c b. ea dem ratione h g f ad g f minori, quàm a c b ad c b. Verum c b erat ipſi d ſumpta æqualis, ergo linea h g f ad g f lineam minori proportione habetur, quàm a c b magnitudo ad ipſam d. Inuentæ ſunt igitur duæ rectæ inæquales, quæ id quod iuſſum fuerat effecerunt, ut maior ad minorem proportione ſit relata minori, quàm magnitudo maior data ad magnitudinem minorem.



3 DAtis duabus magnitudinibus inæqualibus, & circulo quocunq;, fieri poteſt ut intra circulum datū plurium angulorū figura collocetur, at altera huic ipſi ſimilis eidem circulo aptetur extrinſecus, ita ut exterioris latus ad latus interioris proportione minori colligetur, quàm magnitudo data, maior ſcilicet ad minorē. Sint duæ datæ magnitudines a b, & circulus quiuis datus. Dico id effici poſſe, quod propoſitio iubet. Inuentæ iam duæ rectæ ſuprà proximè fuerunt, quarum ſit k maior, l m minor, contineantq; minorem proportionem quàm duæ datæ magnitudines. educaturq; à puncto m linea perpendicularis m n, & à puncto l ducatur ad lineam m n recta æqualis k, quod fieri poteſt. ducantur etiam in circulo duæ diametri c b, d f, ſeſe ad angulos rectos ſecantes in centro g. diuidentes igitur in duo æqualia angulum d c g, & huius iterum dimidiū in duo æqua: ab hac diuiſione nõ deſiſtemus, donec angulum offenderimus quempiam, qui ſit minor

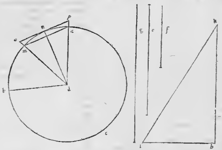
duplo anguli m l n, qui sit p g c. & ducatur linea recta p c, quæ erit latus figuræ plurium angulorum æquilateræ. angulus enim p g c, angulum d g c metitur. & p c arcus eadem ratione d c arcum metitur, & circulum totum. quapropter figura quæ-



sita erit circulo inscripta. Secetur item in duo æqua angulus p g c, ducta g q linea, & à puncto q ducatur una recta contingens circulum s q t, occurrens lineæ g p in puncto s, & lineæ g c in pũcto t, extra circulum ductis utrisq;: erit igitur s t recta, latus figuræ plurium angulorum æquis lateribus compræhensæ, quæ circulo sit circumducta. At uero quoniam p g c angulus minor est duplo anguli m l n, duplus autem angulo q g c, minor erit angulus q g c angulo m l n. cumq; o angulus, ubi g q secat rectam p c, & angulus m sint recti: l n recta ad l m rectam maiore proportione referetur, quàm g c recta ad g o rectam. est autem g c recta æqualis g q rectæ: ex hoc g q rectam ad g o rectam constat minori proportione referri, quàm l n rectam ad l m rectã. preterea l n ad l m minori proportione tenetur, quàm a recta ad b rectam. Est igitur s q t latus figuræ plurium angulorũ æquilateræ circulo circumductæ, & p o c latus intra circulum collocatæ figuræ: quæ sic se habent, ut propositum fuerat inueniri posse.

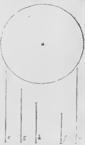
4 DAtis item duabus magnitudinibus inæqualibus, & circuli cuiuspiam sectore dato, potest altera circa sectorem, altera intra eundem aptari figura pluriũ angulorũ, ita ut exterioris latus ad latus interioris minorẽ proportionem retineat, quàm magnitudo maior data ad minorem. Sint itẽ duæ magnitudines inæquales datæ, e maior, f minor. Esto etiam quiuis circulus a b c, cuius centrum d, sectorque eius ad ipsum d terminatus a d b. iubemur itaq; ipsi sectori circumaptare, & intra duas figuras plurium angulorum reliqua latera habentes æqualia, exceptis d a & d b, ita effectas ut propositio dicit. Esto inuentas esse duas rectas inæquales g h k, maiorem g, atq; ita effectas ut g recta ad h k minorem proportionem habeat, quàm magnitudo maior ad minorem. hoc enim fieri posse suprà demonstrauimus. & à puncto h ducatur perpendicularis h l, & à puncto k ducatur ad rectam h l recta æqualis g rectæ. quod fieri potest, cum g recta sit longior h k. diuiso igitur angulo a d b in duo æqua, & item eius dimidio in duo æqua distributo, & hac diuisione perducta quousq; occurrat angulus minor duplo anguli h k l, qui sit

sit a d m, erit igitur a m recta latus figuræ plurium angulorum intra sectorem collocatæ. Si præterea diuidamus in duo æqua angulum a d m, ducta recta d n, & à puncto n eduxerimus rectam p n o, contingentem sectorem in puncto n, occur-



rentem ipsi d a in puncto p, & ipsi d m in puncto o, fecerimus p n o rectam, latus figuræ plurium angulorum ipsi sectori circumductæ, quod ad latus figuræ iam intra sectorem descriptæ minorem seruat proportionem, quàm magnitudo maior e ad minorem f, prout propositio dicebat fieri posse.

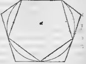
Circulo dato, & duabus magnitudinibus inæqualibus, ipsi circulo posse unã intra eundem, alteram extra aptare figuram plurium angulorum, quarum exterior ad interiorem seruat minorem proportionem, quàm magnitudo maior ad minorẽ. Exponatur circulus a, & duæ magnitudines inæquales, e maior, f minor. Oportet igitur ipsi circulo a alteram intra, alteram extrà aptare figuram plurium angulorum, ita ut fiat quod propositum est. Constituam primo duas rectas inæquales, c maiorem, d minorem, ita ut c minori proportione referat ad ipsam d, quàm e ad ipsam f. accepta media proportionali inter c & d, quæ sit g, constat c ipsa g esse maiorem. Circumdetur itaque circulo figura plurium angulorum, & altera similis illi intra eundem statuatur, hoc pacto ut latus exterioris ad latus interioris minorem teneat proportionem, quàm c ad ipsam g, quemadmodũ suprà docti fuimus. Quoniam igitur figuræ exterioris ad interiorem est ea quæ lateris illius ad latus istius duplicata proportio, hæc autem ipsa minor habetur quam c ad ipsam g duplicata, quæ est c ad ipsam d, quæ quidem & ipsa minor est cõstituta quàm ea quæ maioris magnitudinis habetur ad f minorem: colligitur inde, ut figuræ exterioris & figuræ interioris proportio multo minor sit ea quæ est magnitudinum e & f proportione.



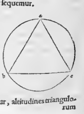
Similem ostendemus, duabus inæqualibus magnitudinibus datis, & circuli sectore dato, posse duas, alteram circa ipsum, alteram intra constituere figuras plurium angulorum inter se similes, quarum exterior ad interiorem minori teneatur proportione, quàm magnitudo maior ad minorem. Vnde id quoq; manifestum est, si quiuis circulus aut sector, præterea spacium aliquod proponatur, posse intra circulum uel sectorem figuras plurium angulorum æquilateras collocari, & item in reliquis semper partibus circuli uel sectoris eundem figuras inscribendi modum continuari, donec tandem quæ ex circulo uel sectore portiones superessent, dato spacio probarentur esse minores. hoc autem in elementis datum est.

6 DEmonstrandum autem nunc est, quod circulo uel sectore dato, & aliquo spacio similiter dato, fieri potest ut circa circulum uel sectorem figuram plurium angulorum æquilaterã describamus, intra cuius latera & circuli uel sectoris circumferentiam, partes quæ restant dato spacio sint minores. Sit primum conuentum, ut quæ de circulo tradentur, eadem ad sectorem referantur. Esto igitur datus circulus a, & spacium datum b. Dico fieri posse, ut circa circulum figuram plurium angulorum æquilateram componamus hac ratione, ut partes lateribus figuræ & circumferentia circuli compræhensæ, dato spacio minores probentur. Cum igitur duæ sint magnitudines inæquales, maior ex circulo & spacio dato composita, minor circulus ipse, circumscribatur una altera, inscribatur circulo figuræ plurium angulorum, ita ut circumscripta minorem proportionem habeat ad inscriptam, quàm dicta magnitudo maior ad minorem. Dico hanc figuram circumscriptam esse, cuius partes à lateribus suis & circumferentia cõprehensæ minores sunt b spacio. Si enim circumscriptæ ad inscriptã minor sit proportio, quàm circuli, & spacij b ad circulum, inscripta uero maior est circulus, erit circumscriptæ ad circulum minor quàm circuli, & spacij ad circulum. Arguenti igiť ex disiũcta proportione probatur, dictas partes minorem proportionem ad circulum habere, quàm b spacium, atq; idcirco minores esse b spacio dato. Vel etiam hac ratione, cum spacij b & circuli sit ad circulum proportio maior quàm circumscriptæ ad eundem, atq; idcirco circumscriptam minorem esse circulo & spacio b simul iunctis probatum est, dempto utrinq; circulo: illic spacium b maius, istic partes dictæ eo minores relinquentur. Eandem rationem in sectore sequemur.



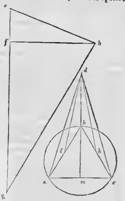


7 SI in cono æquicruri pyramis inscribatur æquilateram habens basim, superficies eius dempta base æqualis est triãgulo qui habet basim æqualem lineæ coniunctæ ex omnibus lineis basim pyramidis claudentibus: & altitudinem habet lineam perpendicularem, æqualem perpendiculari quæ ducta sit à uertice coni ad unum ex lateribus basis pyramidis. Sit conus æquicruris, cuius basis existat circulus a b c, intra quem inscribatur pyramis æquilaterã basim habens, quæ sit a b c. Dico huius superficiẽ, basi dempta, triãgulo dicto æqualem esse. Cum enim conus sit æquicruris constitutus, & basis pyramidis æquilatera ponatur, altitudines triangulorum

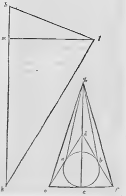


rum

rum basim pyramidis claudentium perpendiculares inter se æquales esse oportet, trianguli uero basim habent a b, b c, c a. altitudinem autem eam quàm diximus perpendicularem: quare triangulos necesse est esse omnes triangulo æquales, qui basim habeat æqualem a b, b c, c a simul iunctis: altitudinem uero eam quæ sæpe dicta est, perpendicularem.



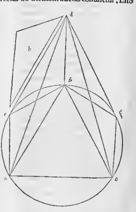
Alia clarior demonstratio. Esto conus æquicruris, cuius basis circulus a b c, uertex aũt punctũ d. & in eũ pyramis inscribatur, basim habens a b c æquilateram, & ducantur lineæ rectæ d a, d b. Dico quod a d b, a d c, b d c trianguli æquales sunt triangulo rectangulo, cuius basis ęqua sit trib. lineis trianguli a b c: perpẽdicularis uero, quæ à uertice coni ad basis latus ducitur, æqualis perpendiculari trianguli rectanguli quem ponimus. Ducantur itaq; perpendiculares d k, d l, d m. has palàm est æquales esse inter se. ponatur deinde triangulus e g h, qui e g basim habeat æqualem lineis a b, b c, c a simul iunctis: e h perpendicularẽ ipsi d l perpendiculari æquam. Quoniam igitur quadrangulus rectangulus qui b c, d l lineis continetur, duplus est triangulo d b c: similiter qui continetur lineis a b, d k, triangulo a b d duplus: itẽ qui a c, d m lineis clauditur, duplus & ipse triangulo a d c: fit ut quadrangulus rectangulus qui clauditur linea cõstituta ex lineis a b, b c, c a, claudentibus basim simul iunctis, & linea d l perpendiculari à uertice ducta, duplus habeatur triangulus a d b, b d c, c d a. Est autem idem quadrangulus e g h f, duplus triangulo e g h. quare e g b triangulum æqualem esse triangulis a d b, d b c, c d a necessariò demonstratum est.



SI cono ęquicruri pyramis circũscribatur, superficies pyramidis excepta base æquatur triangulo rectãgulo, qui basim habeat æqualem lineis basim pyramidis cõtinentibus simul iunctis, altitudinem uero lateri ipsius coni æqualem. Esto conus, cuius basis circulus a b c. huic pyramis circũscribatur, ita ut latera eius basis d e f circum-

circulum contingant. Dico igitur superficiem huius pyramidis, excepta base, triangulo dicto probari æqualem. Quoniam igitur ipsius coni axis supra basim a b c perpendiculariter erectus habetur, uidelicet suprà circulum a b c. & quæ ab eius centro rectæ ad contactus ducuntur, perpendiculares sunt ipsis d e, e f, f d contingentibus: erunt etiam quæ à g uertice coni ad eosdem contactus deductæ fuerint rectæ, g a, g b, g c, eisdem d e, e f, f d perpendiculares, quas inter se æquas esse positum est, cum sint latera coni. Ponatur itaq; triangulus h k l, qui habeat h k latus æquum lineis d e, e f, f d claudentibus basim pyramidis, & habeat m l perpendicularem æquam g a. Quoniam itaq; quadrangulus rectangulus qui continetur d e, a g lineis, duplus est e d g trianguli: & qui continetur d f, g b, duplus trianguli d f g: item qui continetur e f, e g, duplus trianguli e g f: erit igitur qui h k, & a g, quæ æquatur m l lineis continetur quadrangulus, duplus e d g, f d g, e g f triãgulis. Est autem & qui h k, l m lineis clauditur quadrangulus, duplus triangulo h k l. quare colligitur, superficiem pyramidis excepta base æquam esse triãgulo, qui basim habeat æquam lineis claudentibus basim pyramidis simul iunctis: altitudinem uero lateri coni æqualem.

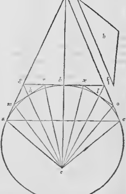
9 SI cono quouis exposito æquicruri, intra circulum, qui est basis ipsius coni, linea recta inciderit, & ab ipsius rectæ terminis duæ rectæ ad coni uerticem educantur: triangulus qui ab incidente & ab eductis ad uerticem comprehendit, minor est ea coni superficie quæ inter rectas ad uerticem ductas continetur. Esto coni æquicruris basim esse a b c circulum, uerticem uero d, & recta quędam ducatur intra basim quæ sita c: & à uertice d, ducantur ad a c pũcta, d a, d c rectæ duæ. Dico a d c triangulum minorem esse ea coni superficie, quæ intra a d c comprehenditur. Diuidatur itaq; a b c circumferentia in duo æqua puncto b, & ducantur rectæ a b, c b, d b. trianguli ergo a b d, b c d maiores erunt triangulo a d c. quantum uero dicti trianguli superant triãgulum a d c, esto illud h: aut igitur h sectionib. a b, b c minus est, aut non. Ponatur primò nõ minus. Quoniam igitur duæ sunt superficies, & conica, uidelicet inter a b d cõprehensa, cum sectione a e b, & triangularis a d b quæ terminis eisdẽ clauduntur, lineis uidelicet a d b trianguli, erit ut complectens sit maior complexa. Superficies igit̃ conica inter a b d comprehensa, cum sectione a e b, triangulo a b d maior habetur. similiter & quæ inter d b c comprehẽditur, cum sectione b f c, triangulo d b c probatur maior esse. Tota igitur conica superficies dicta, cum h spacio, erit dictis triangulis maior. Sed trianguli dicti æquantur triangulo a d c, & h spacio: ipso h spacio quod commune est sublato, relinquitur, superficiem conicam inter a d c comprehensam, triangulo a d c esse maiorem. Ponatur secundò, h spacium sectionibus a b, b c minus esse. Diuidentes igitur a b, b c arcus in duo æqualia, &



eorum

eotum dimidia rursus in duo æqualia, sumemus tandem sectiones quæ sint h spacio minores, sintq́ illæ a e, e b, b f, f c lineis contentæ. & ducātur rectæ d e, d f. Rursus eadem prorsus argumentatione, superficies coni inter a e d contenta, cum sectione a e, triangulo a d e probatur esse maior. & ea quæ inter e d b, cum sectione e b, triangulo e d b maior. Superficies igitur conica inter a d b comprehensa, cum sectionibus a e, e b, maior erit a d e, e b d triangulis. Cum autem a d e, e d b trianguli, sint a d b maiores, uti demonstratum est, multo magis erit superficies coni inter a d b comprehensa, cum sectionibus a e, e b, maior triangulo a d b. atq; eadem ratione superficies conica quæ inter b d c comprehendit̃, cum sectionibus b f, f c, triangulo b d c maior esse ostenditur. quare tota superficies conica, quæ inter a d c cōprehenditur, cum sectionibus a e, e b, b f, f c dictis, maior esse colligitur triangulis a b d, b d c. ipsi autem æquales sunt triangulo a d c, & spacio h. atq; horum sectiones dictæ h spacio sunt positæ minores. reliquum est igitur, ut superficies conica inter a d c comprehensa, necessariò maior esse dicatur triangulo a d c: quod erat ostendendum.

SI rectæ ductæ circulum, qui sit coni basis, contingant, in eodem plano cum circulo constitutæ, atq; inuicem concurrant, & à punctis contactuum atq; cōcursu rectæ ducantur ad uerticem coni trianguli à rectis circulum contingentibus, & ab his quæ à uertice ad dicta puncta descendunt comprehensi, sunt maiores ea superficie coni quam dicti trianguli complectuntur. Esto conus, cuius basis circulus a b c, uertex autem punctum e, & circulum a b c contingentes ducātur in eodem plano cum circulo quæ sint a d, c d. & à puncto e, qui est uertex coni, ad puncta a d c rectæ ducantur, quæ sint e a, e d, e c. Dico triangulos a e d, d e c maiores esse ea coni superficie, quæ rectis e a, e c, & arcu a b c continet̃. Diuiso enim arcu a b c per æqua in puncto b, ab ipso puncto ducatur in utramq; partem recta, cōtingens circulum in dicto puncto, quæ sit f b g, eritq́; lineæ a c intra circulum æquedistans. & f sit punctū quo ipsa incidit lineæ a d, punctum uero ubi incidit lineæ c d sit g. deinde ab e uertice deducantur deorsum lineæ e f, e g. Quoniam igitur lineæ f d, & g d maiores sunt simul iūctæ, quàm linea f g, si simul sumantur communes a f & c g, erūt totæ a d, d c lineæ maiores a f, f g, g c. & quia e a, e b, e c sunt latera coni, idcirco sunt inter se æquales, cum conus sit positus æquicruris. Sunt etiam perpendiculares lineis a d & c d, quia anguli e a f, e c g sunt recti. Cum igitur triangulorum a e d, d e c bases, scilicet a d, d c, sint maiores basibus triangulorum a e f, f e g, g e c, quæ sunt a f, f g, g c:



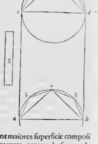
 eotum

corum uero altitudines, id est perpendiculares, sunt inter se æquales, uidelicet e a, e b, e c. propter hoc erunt trianguli a e d, d e c, maiores triãgulis a e f, f e g, g e c. Quãtum igitur trianguli a e d, d e c excedunt triangulos a e f, f e g, g e c, sit æquale spacio quod uocetur h. aut igitur h minus est eis plani particulis, quæ lineis rectis a f, f g, g c, & arcubus a b, b c circa circumferentiam comprehenduntur: aut non minus eisdem. Esto primum h non minus. Quoniam igitur duas superficies coniũctas habemus, unam pyramidis eius quæ basim habet f a g c quadrãgulam superficiẽ, quæq; uerticem habet e. alteram conicam, quæ inter a e c includitur, cum sectione a b c, hæq; ambæ eisdem terminis insistunt, uidelicet trianguli a e c lineis. manifestum est ex hoc, superficiem pyramidis excepto triangulo a e c, maiorem esse conica superficie, unà cum sectione circuli a b c. Hac igitur sectione, quæ utrisq; superficiebus sumitur communis, remota ab utrisque, relinquentur trianguli a e f, f e g, g e c, unà cum plani particulis, quæ circa circumferentiam lineis rectis continentur: relinquetur etiam superficies conica a b c arcu, & e uertice comprehensa, quæ dictis triangulis unà cum particulis dictis ostensa est minor esse. Verum quoniam h spacium fuit positum non minus particulis illis: erunt idcirco dicti trianguli a e f, f e g, g e c unà cũ spacio h prædicta superficie conica maiores. ipsi uero trianguli unà cum h spacio æquãtur triangulis a e d, d e c. Erũt igitur a e d, d e c trianguli, dicta superficie conica ampliores. Esto secundò spaciũ h minus particulis dictis, tunc assidue circa circumferentiam a b c describemus figuras plurium angulorũ, semper diuidendo arcus in duo æqua, & à punctis sectionum lineas rectas educẽdo, quæ circulum contingant: nec ab ista opera desistemus, donec particulas circa circumferentiam lineis dictis & arcubus contentas, simul omnes habuerimus ipso h spacio minores. Esto igitur ut sumptę sint a m k, k n b, b x l, l o c, quæ h spacio minores habentur. & à singulis punctis singulæ lineæ rectæ ad uerticem e erigãtur. Rursus patet, triangulos a e f, f e g, g e c, maiores esse triangulis a e m, m e n, n e x, x e o, o e c. nam bases illorum simul iunctæ, sunt maiores basibus horum simul iũctis: altitudines uero omnium sunt æquales. Vnde rursus sequitur, quod pyramis cuius basis est figura plurium angulorũ, uidelicet a m n, x o c, uertex uero e maiorem habeat superficiem, excepto triangulo a e c, superficie conica quæ inter a e c cõtinetur, unà cum sectione a b c. Sublata igitur a b c, sectione utrisq; communi, reliquum pyramidis quod cõstat ex triangulis a e m m e n, n e x, x e o, o e c, & particulis a m k, k n b, b x l, l o c, maius esse necesse est reliquo, scilicet superficie conica quæ inter a e c continetur. Verũ prædictis particulis spacium h positũ est maius. Præterea triãguli a e f, f e g, g e c demõstrati sunt esse maiores triãgulis a e m, m e n, n e x, x e o, o e c. igitur multo magis trianguli a e f, f e g, g e c, unà cũ spacio h, qui scilicet æquantur triãgulis a e d, d e c, sunt maiores conica superficie sæpe dicta. quare triangulos a d c, d e c, eadẽ quoq; superficie maiores esse, necessariò probatũ est.

11 SI in superficie cylindri recti duæ lineæ rectæ fuerint ab eius capite ad basim ductæ, ea cylindri superficies quæ dictis lineis includetur, maior erit superficie quadrangula & æquedistantium laterum, quæ quidem superficies dictis lineis & alijs duabus rectis continetur, quæ duæ extrema prædictarum duarum puncta utrinque connectunt. Esto cylindrus rectus, cuius basis sit circulus a b, eius caput c d. ducantur duæ rectæ a c, b d: item duæ aliæ rectæ a b in basi, c d in capite, secantes circulos basis & capitis. Dico itaque, quod ea cylindri superficies quæ lineis rectis a c, b d cõprehenditur, maior est superficie a b c d plana, & laterum æquedistantium. Diuidantur enim a b, & c d arcus in duo æqua ad e f puncta. & ducant rectæ a e, e b: item c f, f d. hoc facio, quoniam a e, b e rectæ ipsa a b recta sunt maiores, & in ipsis stant duæ superficies quadrangulæ laterum æquedistantium, & æquè altæ ipsi cylindro & superficiei a b c d quadrangulæ, sit ut dictæ duæ superficies planę, quarum bases sunt a e, e b, superficie a b c d quadrã-

gula

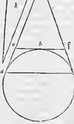
gula plana maiores habeantur. Esto igitur g spaciũ æquale ei, quo illæ inueniun-
tur illa maiores. aut igitur g spacium minus est
partibus plani, quæ continentur ab arcubus &
rectis a e, e b, c f, f d, aut non minus est. Pona-
tur igitur primò non minus eis, tunc quoniam su
perficies cylindrica à lineis rectis a c b d abscisa,
& superficies composita ex superficiebus quadrã
gulis æquedistantium laterum, quarum bases
sunt a e, e b: altitudo uero eadem cum cylin-
dro & triangulis a e b, c f d terminum habent e-
undem, scilicet superficiem planam a b, c d rectis
cõpræhensam, & ambæ sunt uersus eandem con
cauitatem collocatæ, colligitur superficiem cylin-
dricam rectis lineis a b c d abscisam, simul cum
portionibus circulorum a b, c d maiorem esse su-
perficie composita ex superficiebus quadrangu-
lis æquedistantium laterum, quarum bases sunt
a e, e b: altitudo uero eadem cum cylindro. & ex
triangulis a e b, c f d: sublatis utrinq; triangulis
a e b, c f d, qui sunt communes utrisq;: relinquetũ
superficies cylindrica abscisa rectis a b, c d, unà cũ



sectionibus circulorum planis a e, e b, c f, f d: quæ sunt maiores superficie composi
ta ex superficiebus quadrangulis æquedistantium laterum, quarum bases a e, e b
sunt: altitudo uero eadem cum cylindro. Dictæ autem superficies, quarum bases
sunt a e, e b, æquantur superficiei a c b d quadrangulæ, & æquedistantium laterũ,
unà cum g spacio. Reliquum est igitur, ut cylindrica superficies rectis lineis a c, b d
compræhensa, maior esse dicatur superficie quadrangula æquedistantium laterũ,
quæ a c, b d rectis lineis cõtinetur. Esto igitur secundò, ut g spacium sectionib.
circulorum planis a e, e b, c f, f d minus sit: tunc scindantur in duo æqua singuli ar-
cus a e, e b, c f, f d, per puncta h k l m. & ducantur rectæ a h, h e, e k, k b, c l, l f, f m,
m d. Hoc facto, perspiciemus à portionibus circulorum planis a e, e b, c f, f d, non
minus dimidio unicuique suo ablatum esse per triangulos rectilineas a h e, e k b,
c l f, f m d. quo diuidendi & auferendi modo seruato, necesse est tandem ad portio-
nes circulorum deuenire, quæ sint g spacio minores. Esto igitur ut sumptæ sint di
cto g spacio minores a h, h e, e k, k b, c l, l f, f m, m d. Similiter demõstrabimus quod
superficies quadrangulæ æquedistantium laterum, quarũ bases sunt a h, h e, e k,
k b, & altitudo æqualis cylindro maiores sunt superficieb. quadrangulis æquedi-
stantium laterum, quarum bases sunt a e, e b, & altitudo æqualis cylindro. Cum i-
gitur cylindrica superficies abscisa rectis lineis a c, b d, unà cum sectionibus circu-
lorum planis a c b, c f d terminum habeant superficiem planam rectis lineis a c, b d
contentam: præterea eundem terminum habeat superficies composita ex super-
ficiebus quadrangulis æquedistantium laterum, quarum bases sunt a h, h e, e k,
k b: altitudo uerò cũ cylindro est eadẽ, & ex rectilineis plani portionibus a h e k b,
c l f m d: cumq; sint utreque in eandem conecauitatis partem collocatæ, & cylindri-
ca complectatur rectilineam, erit complectens maior cõplexa. Si igitur rectilineæ
plani portiones a h e k b, c l f m d, quæ utrisq; communes sunt, auferantur, restabit
superficies cylindrica rectis a c, b d compræhensa, unà cum sectiunculis circulorũ
planis a h, h e, e k, k b, c l, l f, f m, m d: quæ maior esse concluditur superficieb. qua-
drangulis æquedistantiũ laterum, quę similiter sunt relictæ: quarum bases haben
tur a h, h e, e k, k b: altitudo eadem cum cylindro. Hæ autem superficies nuper di
ctæ maiores sunt superficiebus quadrangulis æquedistantium laterum, quarum-

baſes ſunt a e, e b. & altitudo eadem cum cylindro. Item iſtæ impropriè dictæ ſuperficies quadrangulæ, ſunt æquales ſuperficiei quadrangulæ æquediſtantium laterum a c, b d, unà cum ſpacio g. Superficies igitur cylindrica rectis lineis comprę henſa a c, b d, unà cum ſectiunculis circulorum planis a h, h e, e k, k b, c l, l f, f m, m d, maior erit ſuperficie a c, b d quadrangula æquediſtantium laterũ, unà cũ g ſpacio, quod ſpacium poſitum eſt maius dictis ſectiunculis. Hoc igitur ſpacio g à dicta ſuperficie quadrangula ſublato, dictis etiam ſectiũculis a h, h e, e k, k b, c l, l f, f m, m d, à cylindrica ſubtractis, cum maius de minori, & minus de maiore ſit ablatum, relinquetur ſuperficies cylindrica rectis a c, b d compræhenſa, maior ſuperficie a c, b d plana quadrangula.

12 SI in ſuperficie cuiuſpiam cylindri recti duæ rectæ lineæ ductæ ſint, & ab earũ terminis aliæ rectæ ducantur contingentes circulum, qui quidem circulus dicti cylindri ſit baſis, ſitq; idem cum lineis rectis eum contingentibus in eodem plano conſtitutus, dictæ inſuper contingentes ad unum concurrant: tunc ſuperficies quadrangulæ planæ æquediſtantium laterum ab ipſis contingentibus & cylindri lateribus comprætenſæ, maiores erunt ea ſuperficie cylindri quæ intra duas lineas rectas in cylindro ductas continetur. Eſto itaq; cuiuſcunq; cylindri baſis circulus a b c, ſintq; in eiuſdem ſuperficie duæ rectæ lineæ, quarum termini ſint a c. à quibus terminis ducantur duæ rectæ circulum contingentes, atq; in eodem plano cum circulo cõſtitutæ, & itẽ concurrentes in puncto g. notentur & in capite cylindri aliæ duæ à terminis ductarũ in cylindro linearum ductæ, & in eodem plano cum circulo capitis conſtitutæ, & ipſum capitis circulum contingentes, & uerſus eandem partem concurrẽtes in quam lineæ circulum baſis contingentes concurrerunt. Hoc facto, oſtendendum eſt ſuperficies planas quadrangulares æquediſtantibus lateribus contentas, quæ uidelicet ſuperficies cõpræhenduntur à prædictis lineis contingentibus, & à lateribus cylindri, maiores eſſe ſuperficie cylindri quæ ſecundum a b c arcum baſis eſt compræhenſa. Diuiſo enim a b c arcu in duo æqua in pũcto b, ab ipſo b puncto ducatur in utramque partem recta contingens circulum baſis, & applicãs extremitates ſuas lineis baſim contingentibus in punctis e f. & ab ipſis punctis e f erigantur duæ rectæ uſq; ad ſuperficiem capitis, quæ ſint æquediſtantes axi cylindri. tunc ſuperficies quadrangulates æquediſtantium laterum, quæ continentur lineis rectis a g & g c, & à lateribus cylindri, maiores ſunt eis ſuperficiebus quadrangularibus æquediſtantium laterum, quæ ſub rectis a e, e f, f c, & ſub laterib. cylindri ſunt cõ præhenſæ. Cum enim e g & g f maiores ſint e f, ſi poſuerimus a e, f c communes, ſequetur totas ſimul a g, g c ſumptas maiores eſſe a e, e f, f c. & ideo ſuperficies a g, g c, ſuperficiebus a e, e f, f c ſimul ſumptis eſſe maiores. Quo autẽ ſunt maiores illis, ſit æquale ſpacio k. dimidium igitur ſpacij k, aut eſt maius portionibus plani com præhenſis ab a e, e f, f c rectis lineis & ab arcubus a d, d b, b h, h c, aut non eſt maius. Eſto primò maius. eius itaq; ſuperficiei quæ componitur ex quadrangularib. & æquilateris ſuperficiebus, quarum baſes ſunt a e, e f, f c, & ex quadrãgula plana a e, f c, in baſe cylindri, & alio quadrangulo ei ſimili in capite eiuſdem cylindri conſtituto, termini ſunt lineæ rectæ claudentes ſuperficiem quadrangularem, cuius baſis



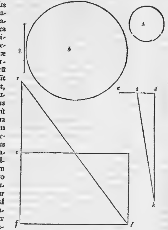
basis est linea recta a c. Sunt etiam prædictæ lineæ termini eius superficiei, quæ cõponitur ex cylindri superficie illa quæ secundum a b c arcum sumpta est, & ex sectionibus a b c in base, & altera in capite, quæ similis est illi. Duæ igitur dictę superficies quas compositas diximus eidem termino, plano insistunt, & sunt in eandem partem conuolutæ. & quædam pars unius complectitur quandam partem alterius, reliquum commune habent. Complexa itaq; minor erit complectente. Igitur sublatis cõmunibus, scilicet sectione a b c in base, & ea quæ sibi similis est in capite relinquetur superficies cylindri quæ est secundũ a b c sumpta, quam cõstat minorem esse reliqua superficie cõposita ex quadrangularib. superficiebus, quarum bases sunt a e, e f, f c: & ex portionibus plani contentis ab arcubus & lineis rectis a e, e b, b f, f c in base, et ex totidem his similib. in capite. Sed superficies nuper dictę cũ portionibus dictis, simul minores sunt superficie composita ex quadrangularibus superficiebus, quarũ bases sunt a g, g c. nam ipsæ cum k spacio fuerant positæ æquales eidem. & portiones dictæ sumptæ sunt ipso k spacio minores. quare concluditur necessariò, superficies quadrangulares quæ lineis rectis a g, g c, & laterib. cylindri continentur, ea cylindri superficie maiores esse, quæ secundum a b c arcũ sumpta fuit. Esto secundò, si dimidium spacium k nõ fuerit maius portionibus dictis, ducentur rectæ lineæ contingentes circulum, ut suprà factum est, donec portiones rectis lineis & arcubus comprænhensæ dimidio k spacio simul sumptæ sint minores. & reliqua deinceps eodem ordine & eadem arguendi ratione conficiemus, qua suprà usi sumus.

His igitur ita demonstratis, manifestum ex dictis fit, quod si cono æquicruri pyramis inscribatur, ipsius pyramidis superficies excepta base, minor est conica superficie. Vnusquisq; enim eorum triangulorum qui pyramidem comprehendunt, ea coni superficie minor existit, quæ ipsius trianguli lateribus insistit. quare tota simul pyramidis superficies excepta base minor esse probatur tota coni superficie, excepta similiter base. Item si circa conũ æquicrurem pyramis aptetur, superficies pyramidis excepta base, maior est coni superficie, excepta similiter base eadem rationis continuatione. Item ex demonstratione constat, si in cylindro recto figura multis superficiebus planis & æquilateris constituta inscribatur, quod superficies ex omnibus dictæ figuræ superficiebus excepta base collecta, minor necessariò existit superficie cylindri excepta base. nam unaquæq; superficies dictæ figuræ parallelis lateribus constans, minor est ea cylindri superficie quæ sibi incumbit. Item si circa cylindrum figura multis superficiebus planis & parallelis lateribus constituta circumponatur, superficies dictæ figuræ ex omnibus suis superficiebus excepta base collecta, maior est superficie cylindri excepta similiter base.

CVIuslibet cylindri recti superficies, excepta base, illi circulo æqualis esse probatur, cuius quidem circuli semidiameter inter latus cylindri & diametrum basis eius media secundum proportionem existat. Esto cuiuspiam cylindri recti basis circulus à diametro, cuius æqualis ponatur linea c d, lateri uero cylindri linea e f æquetur. linea uero g statuatur inter e f lineam, & c d lineam, media secundum proportionem. describatur etiã circulus b, cuius semidiameter sit æqualis lineæ g. his constitutis, demonstrandum est b circulum dicti cylindri superficiei esse æqualem, excepta cylindri base. Et si non sit ei æqualis, aut maior erit, aut minor necessariò. Esto primũ, si fieri potest, minor. tunc cum duas magnitudines inæquales habeamus, circulum b, & superficiem cylindri dictam, possumus intra circulum b unam figuram rectilineam multorũ angulorum & æqualium laterum inscribere, & alteram illi similem eidem circulo circumscribere hoc pacto, ut circumscriptę ad inscriptam minor proportio habeatur, quàm superficiei cylindri dicti ad circulũ. Intelligamus igitur ita circũscriptam & inscriptam dicto circulo esse, ut posuimus, dictam figuram. deinde circa circulum a circumscribatur rectilinea figura, similis

13

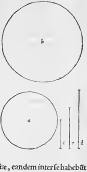
uidelicet illi quæ circa b circulum intelligitur circumscripta. & ab angulis & punctis dictæ figurę rectilineæ circulo a circumscriptæ erigantur lineæ rectæ uersus caput cylindri, quæ cõcludent figuram plurium laterum & æqualium circa ipsum cylindrum descriptam. Esto etiam perimetro eius figuræ rectilineæ circa a circulum constitutæ, æqualis k d linea. iterũ ipsi k d sit æqualis l f. sit aũt dimidiũ ipsius c d linea c t, & fiat triangulus rectãgulus k d t, ita quòd angulus rectus sit ad punctũ d. erit igĩt triangulus k d t, æqualis figuræ rectilineæ, quam circa a circulum suprà descripsimus: quoniã dictus k d t triangulus basem habet æqualem perimetro illius figuræ, & altitudinem æqualem lineæ ex centro a ad circumferentiam ductæ. Super e f constituatur figura lineis quatuor parallelis contenta, & rectis angulis. Huius figuræ superficies probatur esse æqualis superficiei figuræ rectilineæ circa cylindrum suprà descriptæ, quoniam continetur linea e f æquali lateri cylindri, & linea f l æquali basi perimetræ dictæ figuræ circa cylindrum constitutæ. Ponatur item e r linea æqualis e f lineæ, & ducatur linea r l, erit confectus triangulus f r l æqualis superficiei e l parallelogrãmæ: quare & idem triangulus ęqualis erit superficiei figuræ circa cylindrum stantis. & quoniam rectilinea figura circa b circulum descripta, similis est figuræ rectilineæ circa ipsum a circulũ descriptę, habebũt istæ duæ figuræ inter se proportionem illam, quam habent semidiametri dictorum circulorum a & b, secundum potentiam. igitur triangulus k d t, habebit eandem proportionem ad figuram rectilineam circa b circulum descriptam, quam habet t d linea ad lineam g secundum potentiam. nam t d, g lineæ æquantur lineis quæ ex centris ducuntur ad circumferentias. Sed quam proportionem habet linea t d ad lineam g potestate, hanc habet t d linea ad lineam r f longitudine. nam g linea inter t d & r f lineas, media est secundum proportionem. Propterea quòd etiam inter e d & e f lineas media est secundum proportionem. Quomodo autem hoc sit, declaratur sic. Quoniã enim d t linea æquatur t c lineæ, & r e linea e f lineæ est æqualis: linea igitur c d dupla est lineæ r d, & linea r f dupla r e. Ergo sicut se habet linea d c ad lineam d r, sic linea r f ad f e. Id igitur quod fit ex c d in e f, æquatur ei quod producitur ex r d in r f. Quod autem ex c d in e f producitur, æquale est ei quod fit ex g linea in se ducta. igitur quod fit ex t d in r f, æqua-



æquatur ei quod fit ex g in se. Est ergo sicut t d ad g, ita g ad r f. quare sicut t d se habet ad r f, sic quadratum t d ad quadratum g. Nam si tres lineæ ponãtur continuæ proportionales, sicut se habet prima ad tertiam, ita figura æquilatera super primã constituta, ad figuram constitutam super secundam, si fuerit similis dictæ figuræ, & similiter descriptæ. Quam proportionem habet t d ad r f longitudine, eandem habet k d t triangulus ad r l f triangulum, cum k d & l f sint æquales. Eandem igitur proportionem habet k t d triangulus ad rectilineam figuram circa b circulum suprà constitutam, quam habet t k d triangulus ad r f l triangulum. Triangulus ergo f l r æquatur rectilineæ figuræ circa b circulum descriptæ. quare & superficies figuræ rectilineæ circa cylindrum suprà descriptæ æqualis erit superficiei figuræ rectilineæ circa b circulum constitutæ. At uero quoniam rectilinea superficies circa b circulum constans minorem proportionem habet ad superficiem rectilineã sibi similem, intra b circulum inscriptam, quàm habeat superficies rectilinea circa cylindrum aptata ad circulum b: propter hoc minorẽ habebit proportionem superficies dicta circa cylindrum constans, ad superficiem rectilineam intra b circulum inscriptam, quàm superficies cylindri ad circulum b. & permutatim quoque: quod esse non potest omnino. nam superficies figuræ rectilineæ circa cylindrum constitutæ, demonstrata est esse maior superficie cylindri. rectilinea uero figura circulo b inscripta, ipso b circulo minor existit. Nõ est igit̃ b circulus minor superficie cylindri. Esto si potest esse, quod ponatur maior. Rursus intelligatur in b circulo figura rectilinea inscripta, & eidem altera circumscripta similis inscriptæ, ita ut circumscriptæ ad inscriptam minor sit proportio, q̃ circuli b ad superficiem cylindri. et inscribat̃ in a circulo figura polygonia, similis ei quę b circulo fuit inscripta: & erigatur, ut suprà, figura rectilinea ex angulis figuræ circulo a nuper inscriptæ, & rursus k d linea sit æqualis perimetro figuræ rectilineæ in a circulo inscriptæ. Sit etiam l f linea æqualis eidem. Istis sic positis, cætera ut suprà teneantur, erit triangulus k t d maior figura rectilinea circulo a inscripta: quoniam basis ipsius trianguli æqualis est perimetro dictæ figuræ: altitudo uero maior ea linea quæ à centro a ducitur perpendiculariter ad unũ latus dictæ figuræ. At uero e l superficies quadrilatera æquatur superficiei quæ sit cõposita ex quadrilateris superficieb. omnib. figuræ rectilineæ cylindro suprà inscriptæ: quoniã dicta e l superficies cõtinetur à latere cylindri, & à linea quæ æqualis est posita perimetro figuræ dicto circulo a inscriptæ, quæ est basis figuræ rectilineæ quæ cylindro fuit inscripta. Quare etiam l t f triangulus, est æqualis superficiei dictæ figuræ cylindro inscriptæ. Et quoniam similes sunt rectilineæ figuræ in circulo a b inscriptæ, proportionem inter se eandẽ habebunt, quam habent suæ inter se diametri in potentia: trianguli quoq; k t d & f r l inter se habẽt proportionem, quam habẽt dictorũ circulorum semidiametri in potentia. Eandem igitur proportionem habebit rectilinea superficies circulo a inscripta, ad rectilineam circulo b inscriptam, quam habet triangulus k t d ad triãgulum l f r. Rectilinea uero superficies circulo a inscripta, minor est k d t triangulo. quare & eandem minorem esse oportet superficie figuræ rectilineæ cylindro inscriptæ: quod sanè esse non potest. quoniam minorem habet proportionem figura rectilinea circulo b circumscripta, ad figuram sibi similem eidem b inscriptam, quã circulus b ad superficiem cylindri: & permutatim. Maior autem est figura rectilinea circulo b circumscripta, quàm ipse b circulus. maior igitur est figura rectilinea circulo b inscripta, quàm sit cylindri superficies: quare et quàm sit superficies figuræ rectilineæ cylindro inscriptæ. non erit igitur maior circulus b superficie cylindri. Et demonstratum est quod minor esse nõ potest. igitur necesse est eidem esse æqualem.

14 CUiuslibet coni æquicruris superficies excepta base æqualis est circulo, cuius semidiameter media est secundum proportionem inter latus coni & semidiametrum

metrum circuli, qui quidem circulus dicti coni basis existat. Esto conus æquicruris, cuius basis sit circulus a, eius circuli semidiameter sit c: lateri uero coni esto d æqualis. media autem inter d & c, secundum proportionem esto e. ponat̃ deinde b circulus, cuius semidiameter sit æqualis e lineæ. Assero igitur, b circulum æquū esse superficiei dicti coni, excepta base. Et si non concedatur æqualis ei, esto aut maior ea, aut minor dicetur. Primum igitur ponatur minor, si fieri potest. habebimus itaq; duas magnitudines inæquales, superficiem uidelicet coni, & circulum b. & coni superficies ponatur maior. Potest igitur intra circulū b, figura una polygonia inscribi, & æquilatera: & altera eidem circumscribi similis inscriptæ, ita ut circumscriptæ ad inscriptam minor sit proportio, quàm superficiei coni ad b circulū. Intelligatur itaq; sic factum esse. deinde circa circulum a, figura polygonia circūscribatur similis ei quæ b circulo intelligitur circumscripta: & ab ea quæ circulo a circumscripta est erigatur pyramis ad uerticem coni dicti, quæ eūdem uerticem cum cono habebit.

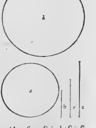


Quoniam igitur figuræ polygoniæ circulis a & b circumscriptæ similes sunt effectæ, eandem inter se habebūt proportionem, quam habent semidiametri dictorum circulorum in potentia. Quam uero habet semidiameter c ad semidiametrum e, eandem habet c ad ipsum d in longitudine: & quam habet c ad d in longitudine, eandem haber figura polygonia circulo a circumscripta, ad superficiem pyramidis circa conum erectæ. nā c æqualis est perpendiculari, quæ à centro a circuli ducitur ad unum latus figuræ polygoniȩ, linea uero d lateri coni est æqualis. Cōmunis uero est altitudo, linea æqualis perimetro dictæ polygoniæ figuræ. & superficies pyramidis, excepta base, æquatur dimidio superficiei quæ producitur ex d latere coni in lineam æquam perimetro dictæ figuræ polygoniæ. & superficies eiusdem figuræ polygoniæ æquat̃ dimidio superficiei, quæ producitur ex c linea in eandem lineam dicto perimetro æqualem. Eandem igitur proportionem habebit rectilinea figura circulo a circūscripta, ad rectilineam figuram circulo b circumscriptam, quam habet eadem superficies ad superficiem pyramidis cono circumscriptæ. atque idcirco superficies pyramidis dictæ, æqualis erit figuræ rectilineæ circulo b circūscriptæ. At uero quoniam dicta figura circulo b circūscripta, ad eā sibi similem quæ ipsi b fuit inscripta minorem habet proportionē quàm superficies coni ad circulū b, sequitur ut superficies pyramidis circa conum aptatæ, ad figuram rectilineam circulo b inscriptam minorem habeat proportionem, quàm superficies coni ad circulum b: quod quidem esse non potest: nam superficies pyramidis ostensa est maior esse superficie coni. Figura uero rectilinea circulo b inscripta, ipso b minor existit. non est igitur b circulus minor superficie coni. Dico præterea, quod neq; maior esse potest. Quod si potest, esto maior. & rursus intelligatur b circulo figura una plurīū angulorum inscripta, & altera illi similis circumscripta, ita ut circumscriptæ ad inscriptam minor proportio habeatur, quàm b circuli ad superficiem coni. & ipsi circulo a intelligatur inscriptam esse figuram multorū angulorum, similem illi quæ b circulo fuit inscripta. & ab hac figura erigatur pyramis intra conum inscripta, quæ eundem uerticem cum ipso cono habeat. Quoniam igitur figuræ polygoniæ ipsis a & b circulis inscriptæ positæ fuerunt similes, eandem inter se proportionem retinebunt,

quam

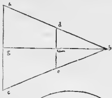
quam habeāt dictorum circulocum semidiametri inter se potentia Eandem igitur habet figura polygonia, ad figuram polygoniam proportionem, quam habet c ad lineam d, in longitudine. c autem ad ipsam d maiorem haber proportionē, quàm figura polygonia ipsi a circulo inscripta, ad superficiem pyramidis cono inscriptæ. nam semidiameter a circuli ad latus coni maiorē proportionem habet, quàm perpendicularis, quæ à centro ad unum ex lateribus figuræ polygoniæ ducitur, habeat ad perpendicularem ductam à uertice coni ad idem latus. Quare maiorem proportionem habet figura polygonia circulo a inscripta, ad poligoniam figuram b circulo inscriptam, quàm ipsa eadem figura polygonia habeat ad superficiem pyramidis. Maior igitur est pyramidis superficies, quàm figura polygonia circulo b inscripta. Figura autem polygonia circulo b circumscripta, minorem habet proportionem ad figuram eidem inscriptam, quàm b circulus ad superficiē coni. Multo igitur magis figura polygonia circulo b circumscripta, ad superficiem pyramidis cono inscriptæ minorē proportionem habebit, quàm ipse b circulus ad superficiem coni: quod esse non potest. nam figura polygonia b circulo circumscripta, maior est eo circulo: superficies uero pyramidis cono inscriptæ, minor est superficie coni. Ostensum itaq; est, quod b circulus neq; coni superficie maior, neque minor esse potest. relinquitur ergo, ut necessariò sit ei æqualis.

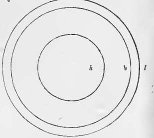
CUiuslibet coni æquicruris superficies ad basim suam, eandem habet proportionem, quàm latus ipsius coni habet ad lineam eductam à centro basis coni ad eiusdem circumferentiam. 15 Esto conus æquicruris, cuius basis sit circulus a, esto b linea æqualis semidiametto circuli a, & linea c sit æqualis lateri coni. Demonstrandū itaq; est, quod superficies coni eandē habeat proportionem ad a circulum, quam c habet ad ipsam b. Sumatur enim media inter b & c, secundum proportionē, quæ sit e. & ponatur circulus d, cuius semidiameter sit æqualis e. circulus igitur d est æqualis superficiei coni. Per præmissam demonstratū etiam est, quod circulus d ad circulum a eandem habet proportionē, quam c ad b habet in longitudine. Vtraq; enim proportio eadē est proportioni e ad b, in potentia: quoniam circuli ad circulū ea est proportio, quę est quadrati diametri ad quadratum diametri: & similiter se habent quadrata semidiametrocum. sicut enim diametri totæ, ita earum dimidia. Semidiametris uero sunt æquales lineæ b & e. Igitur manifestum est, superficiem coni eandem habere proportionem ad a circulum, quam habet c linea ad b lineam, in longitudine.



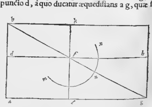
SI conus æquicruris secetur superficie plana, quæ quidem superficies basi ipsius coni sit æquedistans: ea coni superficies, quæ à secante & à base concluditur, ei circulo æqualis esse probatur, cuius circuli semidiameter sit media secundū proportionem inter latus superficiei conicæ, eius scilicet quæ inter basim & secantem continetur, et inter lineam æqualem duabus semidiametris simul iunctis duorum circulorum, eorum scilicet qui in base & secante notātur. 16 Esto conus cuius triangulus qui ab axe constituitur, sit æqualis triangulo a b c, qui a b c à linea quadam secetur, quæ linea sit basi eius æquedistans, & uocēt d e. axis uero coni sit b g. & exponatur circulus aliquis, cuius semidiameter sit media secundum proportionem inter a d latus, & inter compositam ex d f, & a g: semidiametri uero huius

circulus sit h. Dico igit̃, quod circulus h æqualis est ei superficiei coni quæ inter d e & a c compræhẽditur. Igitur statuantur duo circuli k, l, & semidiameter circuli k tantũ possit quantum continetur sub b d, d f. semidiameter uero circuli l tantum possit quãtum continet̃ sub b a, a g. Circulus igitur l æqualis superficiei a b c coni, circulus uero k æquatur superficiei a d e. Et quoniam id quod ex a b in a g fit, ęquatur his: ei quod fit ex b d in d f, & ei quod fit ex a d in utrãq; d f & a g: quoniam æquedistantes sunt d f, & a g. At uero quod ex a b in a g producitur, æquatur quadrato semidiametri circuli l. et quod ex b d in d f nascitur, ęquatur quadrato semidiametri circuli k: quod ex d a in utranq; simul d f, a g æquatur quadrato semidiametri h. quadratũ igitur semidiametri circuli l, æquat̃ duob. quadratis ex semidiametro circuli k, & ex semidiametro circuli h productis simul iunctis. Verũ circulus l æquat̃ superficiei coni a b c: circulus autem k æquatur superficiei coni d b e. relinquitur ergo, ut superficies compræhensa inter secantem d e, & basem a c, sit æqualis circulo h. nam circuli quicunq; sic se habent ad inuicem comparati, sicut quadrata suarum diametrorum.





Esto figura rectilinea quadrilatera rectangula b a g, cuius diameter sit b g, diuidatur b a latus utcunque in puncto d, à quo ducatur æquedistans a g, quæ sit d h, secans diametrum b g in puncto f, à quo puncto ducat̃ æquedistãs lateri b a quæ sit k l. Dico quod id quod fit ex b a in a g, æquatur ei quod fit ex b d in d f, & ex d a in utrãq; simul d f, a g. quoniã igit̃ id quod fit ex b a in a g totã, est b g superficies: quod aũt fit ex b d in d f, est b f: & quod ex d a, in utramq; simul d f, a g, est gnomõ m n x. Quod enim ex d a in a g, æquatur k g, quia supplementũ k h æquatur supplemento d l. quod fit ex d a in d f, æquatur d l. Tota igitur superficies b g, quæ fit ex b a in a g, æquat̃ ei quod



ei quod fit ex b d in d f, & gnomoni n m x, qui æquatur ei quod fit ex d a in utrãque simul a g, d f.

Coni qui altitudines habuerint æquales, suis basibus sunt proportionales. qui uero bases æquas habuerint, suis altitudinibus proportionales erunt.

Si cylindrus plana superficie secetur, quæ æquedistet basi suæ, erit totius ad quãcunque partem suam, uel etiam partis ad partem, sicut axis ad axem proportio.

Coni ui eisdem basibus cum cylindris constituti, eadem proportione qua cylindri referuntur.

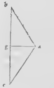
Altitudines conorum æqualiũ, mutuam suis basibus proportionẽ sequuntur.

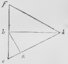
Coni quorum altitudines mutuam suis basibus proportionem sequũtur, sunt inter se æquales.

Coni, quorum diametri basium eãdem cum suis axibus proportionem habuerint, seruant inter se proportionem, quæ inter diametros suarum basium habetur triplicatam. Hęc autem omnia à superioribus sunt demonstrata.

SI fuerint duo coni æquicrures, fueritque alterius superficies basi alterius æqualis, fuerit item linea recta quæ à centro dictæ basis ducta sit ad latus coni perpẽdiculariter æqualis altitudini alterius coni, illos conos æquos esse necesse est. 17

Esto duo coni æquicrures a b c, d e f. & ponatur basis ipsius a b c, æqualis superficiei d e f. altitudo uero a g esto æqualis lineæ quæ à centro basis ducta sit perpẽdiculariter ad unum latus coni d e f, quæ linea uocetur h k. centrum à quo ducitur sit h. latus uero ad quod ducta est, d k e. Dico igitur hos duos conos æquales esse. Quoniã igitur basis coni a b c, æquatur superficiei coni d e f, æqualia uero ad unum & idem relata eandem ad illud proportionem retinent: fiet ut sicut basis b a c, ad basim d e f: ita superficies d e f, ad basim d e f. At uero sicut superficies ad propriã basim, sic linea d h ad lineã h k. Demonstratũ namque est hoc, quod cuiuslibet coni æquicruris superficies ad suam basim habet eandem proportionem, quam latus ipsius coni ad semidiametrũ basis, sicut uidelicet d e ad e h: sed sicut d e ad e h, ita d h ad h k. sunt enim trianguli æquiãguli. est autem h k æqualis a g. igitur sicut basis a b c coni ad basim d e f coni, ita altitudo d e f ad altitudinem a b c. Horum igitur conorum altitudines mutuam suis basibus habent proportionem. Ex quo sequitur, eos esse æquales.

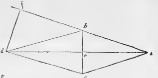


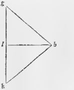


CVilibet rhõbo ex conis æquicruribus composito, æquatur conus ille qui basem æquam habeat superficiei alterius conorum, qui rhõbum comprendũt: altitudinem uero æqualem lineæ, quæ quidem linea ducta sit ab alterius coni uertice ad unumquoduis latus alterius perpendiculariter. Esto rhõbus ex æquicruribus conis collectus a b c d, cuius basis sit circulus circa diametrũ b c descriptus, altitudo uero a d. Exponatur etiam alter conus g h k, qui basim habeat superficiei a b c coni æqualem, altitudinem uero æquam lineæ quæ ab ipso d puncto ducta sit ad latus a b perpẽdiculariter, quæ sit d f. altitudo uero g h k coni, sit h l. & esto b l æqualis d f. Dico tunc quod etiam conus rhõbo æquatur. Exponatur & alter conus m n x, basim habens æqualem basi a b c coni, altitudinem uero ipsi a d: sitque eius altitudo n o. Quoniam igitur n o ipsi a d æquatur, erit idcirco sicut n o ad ipsum d e, ita a d ad d e. At uero sicut a d ad d e, sic a b c d rhombus ad b c d conum. Sicut autem n o ad d e, ita m n x conus ad b c d conum: propterea quod eorum 18

c 2 bases

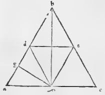
bases sunt æquales. Ergo sicut m n x conus ad b c d conum, sic a b c d rhombus ad b c d conum. Conus igiť m n x est æqualis rhombo a b c d. item quia superficies a b c æquatur basi g h k. sicut ergo superficies a b c ad propriã basim, sic basis g h k ad basim m n x. At uero sicut superficies a b c ad propriam basim, sic a b ad b e, quod idẽ est a d ad d f. nam trianguli sunt similes. quare sicut basis ipsius g h k ad basim n m x, sic a d ad d f. Est aũt a d æqualis n o per suppositum: d f uero æqualis h l. quare sicut basis g h k ad basim m n x, ita n o altitudo ad h l. Conorum igitur g h k, & m n x bases altitudinibus mutuam habent proportionem. Sunt igitur hi coni æquales. Ostẽsum est autem, m n x esse rhombo a b c d æqualem. quare & g h k conum, dicto a b c d rhombo æqualem esse, necessariò colligitur.







19 SI conus æquicruris superficie plana secetur, quæ quidem superficies basi coni æquedistet, & à circulo in sectione producto conus deorsum describať, uerti-





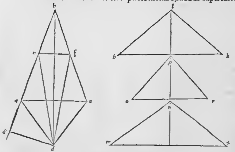




cem

cem defigens in centrum basis prioris coni, rhombũ cum coni parte superiori effi
ciet, qui quidem rhõbus si à toto priore cono auferatur, ei quod relinquitur conus
ille probatur æqualis : cuius quidem coni basis sit æqualis ei superficiei coni qui se
ctus ponitur, quæ superficies intra secantem & basem concluditur. altitudo præte
rea prædicti coni sit æqualis lineæ à centro basis primi coni ductæ perpendicula-
riter, ad unumquodvis latus primi coni. Esto conus æquicruris a b c, qui secetur à
plana superficie quæ basi ipsius æquedistet. Esto hæc sectio d e, centrum uero ba-
sis f. & à circulo, cuius diamerer est d e, describatur conus, cuius uertex sit f. & sic
habemus rhombũ ex duobus conis æquicruribus constitutum, qui est b d f e. Ex
ponatur etiam quidam conus k h l, cuius basis esto æqualis superficiei, quæ inter
a c, d e continetur : altitudo uero æqualis lineæ quæ à centro f ducta sit perpen-
diculariter ad latus a b, quæ ducta sit f g. Dico itaq;, quod si à cono a b c intelliga-
tur ablatus rhombus b d f e, ei quod relinquetur æqualis erit conus h k l. Exponã-
tur itẽ duo coni m n x, o p r, ita ut basis ipsius m n x superficiei coni a b c sit æqua-
lis, & altitudo æqualis f g. Propter hoc itaq; m n x conus est æqualis a b c cono. Nã
si duo coni æquicrures ita statuantur, ut superficies alterius coni sit æqualis basi
alterius: præterea linea à centro ducta perpendiculariter ad unum latus alterius, sit
æqualis altitudini alterius, conos illos æquos esse demonstratum est. Propter id ue
ro quod coni o p r basis est posita æqualis superficiei d e b coni, & altitudo ipsi f g,
conus o p r æquatur rhombo b d f e. hoc enim suprà demonstratum fuit. Quoniã
autem superficies coni a b c componitur ex b d e, & ea quæ inter d e & a c contine-
tur: præterea superficies a b c coni : æquatur basi m n x coni: superficies uerò d b e
coni æquatur basi o p r coni, quæ uero media est inter d e & a c æquatur basi h k l :
sequitur, ut basis m n x sit æqualis basibus conorum h k l, o p r. Cumque sint hi
coni altitudine æqua erecti, erit conus m n x, æqualis conis simul h k l, o p r. Verũ
conus m n x, æqualis est cono a b c: conus uero o p r, æqualis rhombo b d e f. Reli-
quum est igitur, ut h k l conus, æqualis sit ei quod sublato rhombo relinquitur.

SI ex his conis æquicruribus, quib. rhombus compositus sit, alter plana superfi- 20
cie secetur, quæ sit basi æquedistans: & à producto in sectione circulo conus e-
rigatur ad uerticẽ alterius coni : deinde à toto priore rhombo, rhõbus nuper factus

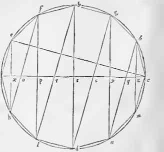


auferatur : ei quod residuum est æquatur conus, qui basim babeat æqualem ei su-
perficiei coni, quæ inter secantem & basem continetur: altitudinem uero æqualẽ

 lineæ,

lineæ, quæ à uertice alterius coni, ad unum latus alterius coni perpendiculariter ducta sit. Esto rhombus, ex conis æquicruribus compositus a b c d, & alter illorum conorum secetur plana superficie, quæ basi æquedistans sit, & fiat sectio e f. à circulo uero cuius diameter est e f, erigatur conus habẽs uerticem d punctũ, iamq; factus est rhombus e b d f, qui intelligatur ablatus à toto rhombo. Exponatur autem quidem conus h k l, qui basim habeat æqualem superficiei coni, quæ à secante & base concluditur a c e f: altitudinem uero ei lineæ quæ à puncto d ducitur, perpendiculariter ad latus b a. Dico itaq;, quod h k l conus æqualis est dicto residuo. Expositi autem sint duo coni isti, uidelicet m n x, o p r. & basis m n x coni æqualis ponatur superficiei a b c: altitudo uero æqualis d g. Propter illa erga quæ demonstrata sunt, conus m n x æquatur rhombo a b c d. coni uero o p r basis, cũ ponatur æqualis superficiei e b f coni, & altitudo æqualis lineæ d g: similiter o p r conus æquatur rhombo e b d f. Quoniam igitur superficies a b c coni, similiter componatur ex superficie coni e b f, & ex ea quæ media est inter e f, a c. Insuper coni a b c superficies æquatur basi m n x, superficies uero e b f æquatur basi coni p o r. quæ autem media est inter e f, a c, æquatur basi h k l. Basis igitur m n x, æquatur basibus conorum o p r, h k l. & sunt hi coni sub eadem altitudine. quare m n x conus æquabitur h k l, o p r conis. Verũ conus m n x æquatur rhombo a b c d, conus aũt o p r rhombo e b d f est æqualis. reliquus igit̃ conus h k l ęqualis residuo erit necessariò.

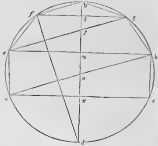
21 SI intra circulum quemcunq; inscribatur figura rectilinea, quæ multis angulis constet, quæq; latera inter se æqualia & numero paria habeat, insuper ducantur lineæ rectæ ab angulis ad angulos dictæ figuræ latera ipsius contĩgentes, sitq; ut hæ ductæ sint æquedistantes uni ex earum numero: illi scilicet, quæ duobus dictæ figuræ lateribus subtenditur: tunc istæ quæ latera dicta coniungunt, omnes ad diametrum circuli eandem habent proportionem, quam habet illa linea recta ad latus dictæ figuræ, quæ quidem linea ipsi diametro & lateri dictæ figuræ quod diametro sit applicatum subtenditur. Esto circulus a b c d, & sibi inscribatur figura rectilinea multis angulis constans, quæ sit a e f b g h c m n d l k: & iunganturtur e k, f l, b d, g n, h m, ductis lineis e k, f l, &c. manifestum est, quod æquedistantes sunt illi quæ duobus lateribus dictæ figuræ subtensa est, quæ est uel e k, uel h m. Dico itaque, quod hæ omnes ad circuli diametrum quæ est a c, eãdem proportionẽ habent, quam habet linea ducta à pũcto c ad punctũ e, uidelicet linea c e ad lineã a e. ducantur itaque lineæ f k, l b, g d, h n. Igitur æquedistans erit f k ipsi e a, deinde b l ipsi f k, etiã d g ipsi b l, demum h n ipsi d g, & m c ipsi h n. quare sicut e x ad x a, ita k x ad x o. & sicut k x ad x o, ita f p ad p o. sicut autem f p ad p o, ita l p ad p r. Deinde sicut l p ad p r, sic b s ad s r. & sicut b s ad r s, ita d s ad s t. & sicut d s ad s t, ita g y ad y t. & sicut g y ad y t, ita n y ad y q. & sicut



n y ad y q, ita h z ad z q. & sicut h z ad z q, ita m z ad z c. & demum sicut una ad unam, ita omnes simul collectæ ad omnes simul collectas se habent. quare sicut e x ad x a, ita e k, f l, b d, g n, h m ad ipsam a c diametrum. At uero sicut e x ad x a, ita c e ad e a. unde sicut c e ad e a, ita omnes e k, f l, b d, g n, h m ad a c diametrum.

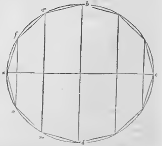
22

SI in circuli cuiuspiam portione figura multorum angulorum inscribatur, quæ quidem figura latera habeat excepta base inter se æqualia, & numero paria, deinde rectæ lineæ ducant æquedistantes basi portionis, & quæ latera dictæ figuræ coniungant: tunc hæ omnes ductæ simul, cũ dimidio basis portionis, habebũt ad altitudinem portionis eandem proportionẽ, quã habet linea illa ad latus figuræ dictæ, quæ linea ab una extremitate diametri totius circuli ad latus figuræ ipsi diametro applicatum ducta sit. Intra circulum a b c, quædã linea recta ducatur, quæ sit a c. & super base a c inscribatur in a b c circuli portione, multorum angulorum figura, æqualibus & numero paribus lateribus, excepta base, a c constãs.

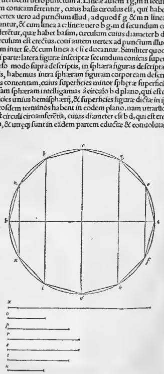


Dico igitur, quod sicut f g, e h, a x ad b x, ita d f ad b f. Ducantur rursus g e, a h lineæ, quæ quidem æquedistantes erũt ipsi b f. atque idcirco sicut k f ad k b, ita g k ad k l, & ita e m ad l m, & m h ad m n, & x a ad x n, & omnes simul ad omnes, ut una ad unam. igitur sicut f g, e h, a x ad b x, ita f k ad k b. At uero sicut f k ad k b, ita d f ad f b. sicut ergo d f ad f b, ita f g, e h, a x ad b x.

Esto in quacunque sphæra maximus circulus a b c d, & in ipso inscribatur figura rectilinea multorum angulorum & æqualium laterum: multitudo uero laterum eius à quaternario mensuretur, & sint diametri circuli a c, b d. esto item manente & quietante diametro a c, circa eam uoluatur circulus in quo figura dicta fuit inscripta, scilicet a b c d: manifestum est, quod eius circumferentia secus sphæræ superficiem feretur. anguli uero inscriptæ circulo figuræ, circulari circumferentia mouebũtur in superficie sphæræ: exceptis tamen illis, qui ad puncta a et c insistũt. quotque



ipsi fuerint qui moti sunt, totidem circulos intra sphæram describent qui erunt supra a b c d circulum erecti, & eorum diametri erunt lineæ illæ quæ figuræ inscriptæ latera coniungebant: eruntq; omnes ipsi b d æquedistantes. latera uero figuræ inscriptæ eodem modo circumuoluta, quasdam conicas superficies intra sphæram describunt: sed a f & a n conum perficient, cuius basis erit circulus ille qui habet lineam f n diametrum, uerticem uero punctum a. Lineæ autem f g, m n secundum quandam superficiem conicam ferentur, cuius basis circulus est, qui habet diametrum lineam m g, uertex uero ad punctum illud, ad quod f g & m n lineæ concurrent, inter se si educantur, & cum linea a c: lineæ uero b g, m d secundum conicam superficiem & ipsæ ferētur, quæ habet basim, circulum cuius diameter b d, qui circulus super a b c d circulum est erectus. coni autem uertex ad punctum illud ad quod concurrent b g, d m inter se, & cum linea a c si educantur. Similiter quoq; accidit & in alia semicirculi parte: latera figuræ inscriptæ secundum conicas superficies ferentur, quæ conuerso modo supra descriptis, in sphæra figuras descriptas habebunt. His ita dispositis, habemus intra sphæram figuram corpoream descriptam, conicis superficiebus contentam, cuius superficies minor sphęræ superficie esse probatur. nam si diuisam sphæram intelligamus à circulo b d plano, qui est erectus super a b c d, superficies unius hemisphærij, & superficies figuræ dictæ in ipso hemisphęrio inscriptę, eosdem terminos habent in eodem plano. nam utrarūq; superficierum terminus est circuli circumferētia, cuius diameter est b d, qui est erectus super a b c d circulum, & utręq; sunt in eādem partem eductæ & conuolutæ, & altera earum alterā cōplectitur superficiē: hoc est sphæræ superficies superficiem figuræ eisdem terminis cum ea contentam. Similiter etiam in alio hemisphærio figuræ superficies, concluditur minor esse superficie hemisphærij: quare totam superficiem figuræ dictæ in sphæra descriptæ, minorem esse sphæræ superficie probatum est.

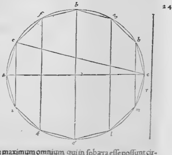


23 Figuræ in sphæra inscriptę superficies, æqualis est circulo, cuius semidiameter tantum possit, quantum est id quod continetur sub uno latere dictæ figuræ, & sub linea quæ sit æqualis omnibus illis lineis simul iūctis, quæ lineæ ab angulis ad angulos dictæ figuræ ita sunt ductę, ut quęque duæ cum lateribus, quæ per ipsas iungūtur, quadrangularem figurā efficiāt: & ei quæ duob.

lateribus subtenditur, sint æquedistantes. Esto in sphæra maximus circulus a b c d, & in ipso inscribatur figura multorum angulorum, & æqualium laterum, cuius multitudo laterũ numeretur à quaternario, & ab hac figura intelligatur figuram corpoream esse in sphera descriptã: & ducãtur e f, g h, c d, k l, m n lineæ, quæ sint æquedistãtes illi quæ duobus lateribus dictæ figuræ subtensa est. Exponatur item quidam circulus qui sit x, cuius semidiametros tantũ possit, quantũ est quod continetur sub a e latere dictæ figuræ, & sub linea quæ sit æqualis e f, g h, c d, k l, m n, lineis simul iunctis. Dico igitur, quod hic circulus x, æquatur superficie figuræ in sphæra descriptæ. Exponantur item circuli o p r s t u, & ipsius o semidiametros possit tantum quantum continetur sub e a, & dimidio e f. & diameter p possit id quod continetur sub e a, & dimidijs e f, g h. semidiametros uero ipsius r possit id quod continetur sub e a, & dimidijs g h, c d. semidiametros ipsius s possit id quod sub e a, & dimidijs c d, k l continetur. semidiametros ipsius t, possit id quod continetur sub a e, & dimidijs k l, m n. semidiametros demum u, possit id quod continetur sub a e, & dimidia m n. Ex his igitur quæ posita sunt, circulus o æquatur superficici a e f coni. circulus p æquatur superficiei conicæ quæ inter e f & g h lineas comprenditur. circulus r æquatur superficici conicæ à lineis g h, c d comprensæ. circulus s æquatur superficiei conicæ à lineis c d, k l contentæ. præterea circulus t superficiei conicæ, inter k l, m n conclusæ. demum circulus u superficiei coni m b n, est æqualis. Hi igitur circuli omnes equales sunt superficiei figuræ, quæ sphæræ inscripta fuit. Et palàm est quòd semidiametri circulorum o p r s t u possunt id quod continetur sub a e latere, & sub linea dupla cõpositæ ex dimidijs e f, g h, c d, k l, m n, quæ est æqualis lineæ compositæ ex ipsis integris. quare semidiametri circulorum o p r s t u possunt id quod cõtinetur sub a e, & omnibus e f, g h, c d, k l, m n simul iunctis. Verum & semidiametros circuli x potest idem quod continetur sub a e, & sub linea composita ex omnibus illis e f, g h, c d, k l, m n. quare semidiametros circuli x tantum sola potest, quantum semidiametrorum simul o p r s t u circulorum quadrata componunt. Igitur circulus x, æquatur omnibus simul circulis o p r s t u. ipsos aũt circulos ostensum est æquales esse superficici dictæ figuræ. ex quo sequitur, ipsum x circulum superficici dictæ figuræ esse æqualem, ut propositum fuerat.

24

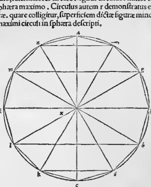
Figuræ in sphæra inscriptæ superficies, ex superficiebus conicis constituta, minor est quàm quadrupla, ad circulum maximũ omniũ qui in sphæra esse possunt circulorũ. Esto maximus in sphæra circulus a b c d, & in ipso inscribatur figura pariũ angulorum & æqualium laterũ, et eius latera mensurentur à quaternario, & ex huius circumuolutione intelligatur superficies ex conicis superficiebus constituta, in sphera esse descripta. Dico igitur, quod istius figuræ superficies minor est



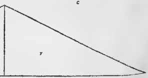
quàm quadrupla ad circulum maximum omnium qui in sphæra esse possunt circulorum.

culorum. Ducantur itaq; duæ lineæ, quæ subtendantur singulæ duobus laterib. figuræ prædictæ, quorum hæc duo quib. una subtenditur, sint opposita reliquis duobus quibus altera subtensa est. sintq; hæ ductæ e t, h m: & reliquæ istis æquedistãtes f k, d b, g l. Exponatur item circulus r, cuius semidiametros possit id quod sub a e, & sub linea æquali compositæ ex omnibus illis e t, f k, b d, g l, h m. Ex his igitur quæ superius demonstrata sunt, circulus r æquatur superficiei dictæ figuræ. & quoniam insuper demonstratum est, quod sicut linea æqualis omnibus simul illis e t, f k, b d, g l, h m se habet ad diametrum circuli a c, sic linea c e ad lineam e a. Quod igitur sub illa quæ æquatur omnibus simul dictis, & sub ea cõtinetur, quod idẽ est ei quod à semidiametro circuli r, in se ducto producitur, æquale est ei quod sub a c & c e comprenditur. uerũ id quod sub a c & c e cõprenditur, minus est quadrato a c. quadratum igitur semidiametri r circuli minus est quadrato lineæ a c, sequitur ergo, diametrũ r circuli minorem esse quàm duplam diametri a b c d circuli. Duæ igitur diametri a b c d circuli, diametro r circuli sunt maiores. & quod fit, à diametro circuli a b c d, hoc est a c linea quater in se ducta, maius est quadrato diametri circuli r. At uero sicut eius quod fit ab a c linea, quater in se ducta, ad quadratum diametri circuli r, ita quatuor circuli æquales a b c d ad circulum r. quatuor itaq; circuli ęquales a b c d circulo, sunt maiores circulo r. Igitur circulus r minor est quadruplo a b c d circulo in sphæra maximo. Circulus autem r demonstratus est æqualis superficiei dictæ figuræ. quare colligitur, superficiem dictæ figuræ minorem esse, quàm quadruplam maximi circuli in sphæra descripti.

25 Figuræ in sphęra descriptæ, quæ conicis superficiebus contineatur, ille conus æqualis esse probatur, cuius coni basis sit circulus, qui æquatur superficiei figuræ in sphæra descriptæ: altitudo uero eius æqualis sit lineæ illi, quæ à centro sphęræ ad unumquoduis latus figurę multorum angulorum sit perpendiculariter educta.



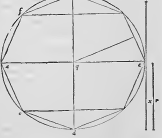
Esto sphæra, in qua sit maximus circulus a b c d, & reliqua sumãtur similiter uti in superiori demonstratione figurata sunt. & ponatur conus r rectus, qui basim habeat æqualem superficiei figuræ in sphæra descriptæ; altitudinem uero æqualem ei lineæ, quæ à centro sphæræ ad latus unum figuræ multorum angulorum sit perpendiculariter educta. Est igitur demõstrandum, quod conus r æqualis est figuræ in sphæra descriptæ, nam describantur coni à circulis, quorum diametri sunt f n, g m, h l,



hl,ik,quorum conorum bases sint dicti circulis, uertices uero ad x centrum sphæræ deducti. Habemus rhombum solidū, qui conficitur ex cono, cuius basis est circulus, qui circa fn diametrum constat, uertex uero punctum a: & ex cono, cuius basis est idem circulus, uertex uero punctum x. qui quidem rhombus est æqualis cono qui basim habeat superficiem coni naf, altitudinem uero æqualem lineæ à centro x perpendiculariter ad unum latus ductæ. Rursus residuum a rhombo dicto relictū, quod continetur à superficie coni, illa scilicet quæ inter æquedistātes planas superficies fn,gm cōprehēditur, & inter superficies conorū fnx, & gmx æquale est cono habenti basem æqualem superficiei conicæ, illi uidelicet quæ inter planas superficies fn,gm continetur. altitudo uero, lineæ ab x centro ad fg latus perpendiculariter eductæ. Hæc autem suprà sunt demonstrata. item residuum coni illius qui continetur à conica superficie, quæ includitur à planis æquedistantibus gm, bd, & à superficie coni mgx, & circulo cuius diameter bd ęqualis est cono basim habenti æqualem ei coni superficiei, quæ inter gm, bd planas continetur: altitudinem uero æqualem lineæ à centro x ad latus bg perpendiculariter ductæ. Similiter quoque in alio hemisphærio rhombus xkcl, & residua conorū æqualia esse probabuntur talibus & tantis conis, ut suprà dictum est. Manifestum itaq; est, quod tota simul figura sphæræ inscripta æqualis erit omnib. simul conis dictis. coni uero ipsi æquales sunt ipsi r cono, cum conus r altitudinem quidem habeat unicuiq; illorum æqualem, & basim omnibus simul illorū basibus æqualem. Constat igitur, inscriptam sphæræ figuram exposito cono esse æqualē.

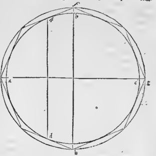
26

Figura sphæræ inscripta, quæ conicis superficieb. contineatur, minor est quàm quadrupla eius coni qui basim habeat æqualem circulo, qui in sphæra sit maximus, altitudinē uero æqualem semidiametro sphæræ. Esto descriptus sit conus æqualis figuræ inscriptæ sphęræ, qui conus basim habeat æqualem superficiei dictæ figuræ inscriptæ sphęræ, altitudinem æqualem lineæ à centro circuli ad unum latus figuræ multorum angulorū, quæ circulo sit inscripta, perpendiculariter ductæ. sitque hic conus r. sit alter conus x, qui basim habeat æqualem circulo abcd, altitudinem uero semidiametro abcd circuli. Quoniam igitur conus r, basim habet æqualem superficiei figuræ inscriptæ in sphæra, altitudinem autem æqualem lineæ à centro, ad latus af, perpendiculariter ductæ. ostensum est autem, superficiem figuræ inscriptæ minorem



esse quàm quadruplam circuli in sphæra maximi. est igitur coni ipsius r basis minor, quàm quadrupla basis x coni. Est etiā coni r altitudo minor altitudine x coni. Cū igitur conus r minorē habeat basim quàm quadruplam ad basim x, altitudinē etiā minorem illius altitudine, manifestum est quod ipse r conus minor est quàm quadruplus ad conum x. Verum conus r æqualis est figuræ inscriptæ, figura igit̄ inscripta minor est quàm quadrupla ad conū x, quod principio propositū fuerat.

27 ESto in sphæra maximus circulus a b c d, circa quem describatur figura multorum angulorum & æqualium, quæ latera quoq; habeat æqualia, quorũ multitudo à quaternario mensuret. Huic aũt figuræ circumscribatur circulus, cõprendẽs eam, circa idem centrum conuolutus circa quod a b c d existit. Deinde quiescẽte e g diametro, circũuoluatur plana superficies e f g h, in qua multorum angulorum figura & circulus a b c d continetur. Perspicuũ est, quod circumferentia circuli a b c d, secundum sphæræ superficiẽ feretur. circumferentia uero circuli e f g h, secundum alterius sphæræ superficiem ducetur, quæ idem centrum cũ minori sphæra habebit. puncta uero in quibus latera figuræ inscriptæ contingunt



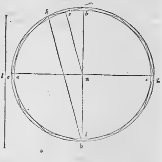
circulum a b c d, in circumuolutione, describent circulos qui sunt erecti supra circulum a b c d in sphæra minori. anguli uero dictæ figuræ secundum circuli circũferentias ferentur, illis duobus exceptis, qui sunt alter ad e, alter ad g puncta collocati: describentq; in superficie sphæræ maioris singuli singulos circulos, qui sunt erecti super circulum e f g h. Latera uero dictæ figuræ conicas superficies circumuoluta designabunt, quemadmodum in superiori proxima figuratione conspectum est. atq; ipsa figura conicis superficiebus compræhensa minori quidem sphæræ erit circumscripta, maiori uero inscripta. Quod aũt ipsius figuræ superficies maior sit superficie sphæræ cui est circũscripta, hac ratione demonstrabitur. Esto k d diametrus cuiuspiã circuli in sphera minori: puncta k d sint, in quibus duo latera dictæ figuræ contingant circulum a b c d. si igitur sphæra intelligatur secta à plano k d, circulo super a b c d erecto, superficies quoq; figuræ sibi circumscriptæ simul secta esse intelligetur ab eodem plano. Vnde manifestum erit, utrasq; superficies sectas eisdẽ terminis in illo plano compræhensas esse. nam utrarũq; terminus est circuli circumferentia, cuius diametrus est k d, erecti super circulum a b c d: & ambæ sunt in eandem partem conglobatæ, & altera earum ab altera complectitur: sphærica scilicet à planę figuræ superficie, quæ illi finitima est. Minor igitur illa est, quæ compræhensa est, scilicet sphęrica illius sectionis superficies, quàm superficies figuræ circũscriptæ sibi. Similiter probabitur, residuũ superficiem sphæricam minorem esse superficie residui figuræ sibi circũscriptę. Manifestũ igitur est quod tota quoq; simul sphęræ superficies minor est superficie figurę sibi circumscriptæ.

28 SVperficiei figuræ circa sphęram descriptę circulus ille æqualis est, cuius quidem circuli semidiametrus tantum potest quantũ quod continetur sub uno latere figuræ circumscriptę, & sub linea quæ sit æqualis omnibus simul lineis, quæ latera dictę figuræ ita continuent, ut omnes sint uni earum æquedistantes, quæ una duobus dictę figurę lateribus sit subtensa. Figura enim quæ circũscribitur sphęræ minori, inscribitur sphæræ maiori. eius uero figuræ quæ sphæræ inscribitur, quæ ue superficiebus conicis cõtineatur, superficies æquatur circulo, cuius semidiametros tantũ potest quantum est quod continetur sub uno latere dictæ figu-

ræ,

ræ, & sub linea quæ sit æqualis omnibus simul lineis, quæ dictæ figuræ angulos ita coniungant, ut sint æquedistantes uni earum, quæ duobus dictæ figuræ lateribus subtenditur. Quare manifestum est, id quod propositum fuerat.

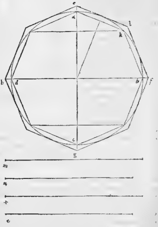
Figuræ circa sphæram descriptæ superficies maior est, quàm quadrupla ad maximum circulum in sphæra collocatũ. Esto itaq; & sphæra, & circulus, & cætera sumantur eadem & eodem modo, ut suprà in proximis fuit positum: et ponatur l circulus æqualis superficiei figurę propositæ, quæ circa sphęrã minorem sit circũscripta. Quoniam igitur in circulo e f g b, figura multorũ angulorum & parium angulorum inscripta fuit, & lineæ, quæ latera dictæ figurę iungebant æquedistantes lineę h f, ad ipsam eãdem h f proportionem habẽt, quam h k ad k f habet. figura igitur comprę hensa sub uno latere dictę figuræ, et sub omnib. simul lineis angulos dictę figuræ continuãtibus, æqualis est illi quę continetur sub f h k. quare semidiametros circuli l tãtum potest, quantum quod continetur sub f h k. maior igitur est sem diametros circuli l, quàm h k. At uero h k ęqualis est diametro a b c d circuli. nam dupla est lineæ s x, quæ semidiametros est circuli a b c d. Manifestum est, quod maior est quàm quadruplus circulus l, qui idem est quod superficies dictę figuræ ad superficiem maximi circuli in sphęra collocati.



Figuræ circa sphęram minorem circumscriptæ conus ille ęqualis esse probatur, qui conus basim habeat circulum qui, æqualis sit superficiei dictæ figurę, altitudinem uero habeat æqualem semidiametro sphęrę. Figura enim quę minori sphęrę circumscribitur, est inscripta maiori sphęræ. Figuræ autem inscriptæ quæ conicis superficiebus cõtineatur, conus ille ostensus est ęqualis esse, qui basim habeat circulum ęqualem superficiei dictę figurę: altitudinem uero, lineam lineę illi ęqualem, quę quidem linea à centro sphęræ ad unum latus dictæ figuræ sit perpendiculariter educta. Hęc eadem uero æqualis est semidiametro minoris sphęrę. quare constat id quod propositum fuerat. Ex his igitur quæ sunt demonstrata, manifestum est quod figura circumscripta minori sphęræ maior est, quàm quadrupla coni qui habet basim maximum in sphæra circulum, & altitudinem semidiametro sphæræ æqualem. Quoniam igitur dictæ figuræ ille conus æqualis est qui habet basem æqualem superficiei dictæ figuræ, altitudinẽ uero æqualem lineæ quæ à cẽtro sphęræ sit ad unũ latus dictæ figuræ perpendiculariter educta, hoc est semidiametro minoris sphæræ. Superficies autem circumscriptæ figuræ circa sphærã maior est, quàm quadrupla maximi in sphæra circuli. Figura igitur dictæ sphęræ circumscripta, maior est quàm quadrupla coni, qui basim habeat maximum in sphęra circulum, altitudinem uero semidiametrum sphęrę: quoniam conus qui dictę figuræ est ęqualis, maior est, quàm quadruplus ad dictum conum. nam & ba-

ſim maiorem, quàm quadtuplam ad illius baſem habet, & altitudinem ſeruat æqualem.

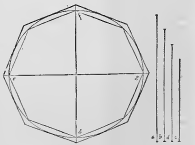
30 SI figura una ſphæræ ſit inſcripta, & eidem altera circumſcripta, quæ quidem figuræ ambæ ſint, ut ſuprà dictum eſt, à duabus planis figuris circum & intra circulum in ſphæra maximum deſcriptis, per circumuolutionem productæ: ſuperficies figuræ circumſcriptæ ad ſuperficiem inſcriptæ habet proportionem duplicatam, eam ſcilicet quæ eſt lateris figutæ planę circulo, ut dictum eſt, circumſcriptæ, ad latus figuræ inſcriptæ in eodem circulo. ipſa uero figura corporea circumſcripta ad figuram inſcriptam ſphæræ, ut dictum eſt, habebit eandem proportionem triplicatam. Eſto in ſphæra circulus maximus a b c d, & inſcribatur ipſi circulo figura multorum angulorum & laterum æqualium, quorum multitudo menſuretur à quaternario. Deinde eidem circulo altera figura circumſcribatur ſimilis inſcriptæ, ita ut latera circumſcriptæ cõtingant in puncto medio arcus circuli abſciſos à lateribus figurę inſcriptæ. Sint etiam e g, f h duæ diametri ad angulos rectos ſecãtes ſeſe circuli compræhendẽtis figuram citcumſcriptã, ſintq; omnino ſimiliter & ad eaſdem partes ductę ad quas ſunt diametri a b c d. Deinde intelligãtur lineæ rectæ ductæ ad oppoſitos figuræ angulos, quæ iungant latera eius quæ quidem erunt & inter ſe æque diſtantes, & ipſis h f, b d. quieſcente itaq; e g diametro, & circa eam lateribus figurarum circumuolutis, & circulis ipſis, ſphæræ ſimul duæ & duæ figuræ multorum angulorum corporeæ efficientur, quarum figurarum altera ſphęrę circumſcripta erit, altera eidem inſcripta. Demonſtrandum itaq; eſt primũ, quòd ſuperficies citcumſcriptę ad ſuperficiem inſcriptæ habeat eã proportionẽ duplicatã, quam habet latus e l ad latus a k. Secũdò, quòd ipſa figura circũſcripta ad figuram inſcriptã habeat eandem proportionem triplicatam. Eſto itaq; circulus m æqualis ſuperficiei figuræ circa ſphæram deſcriptæ, circulus uero n æqualis ſuperficiei figurę inſcriptæ. Semidiametros itaq; circuli m, poteſt tantũ, quantum eſt quod continetur ſub e l, & ſub linea quæ ſit æqualis omnibus ſimul lineis, quæ angulos figuræ circumſcriptæ coniungunt. Semidiametros uero circuli n poteſt id quod ſub a k, & ſub linea æquali omnibus ſimul lineis, quæ iungunt angulos inſcriptæ. At uero quoniam dictæ figuræ ſunt ſimiles poſitæ, ſpacia quoque



quę à dictis lineis, hoc est angulis & lateribus dictarum figurarum comprehensa, similia esse necesse est. quare eandem inter se proportionem retinebunt, quam habent semidiametri circulorum m & n inter se potentia. Quare sequitur, diametros circulorum m & n eandem habere inter se proportionem, quam habent latera figurarum. Circuli uero habent inter se eam proportionem duplicatam, quam habent suæ diametri inuicem, qui circuli æquantur superficiebus duarum figurarum, inscriptæ scilicet & circumscriptæ. Constat igitur, superficiem figuræ circa sphæram descriptæ, ad superficiē figuræ eidem sphæræ inscriptæ, habere eam proportionem duplicatam, quam habet e l ad a k. Sumantur preterea duo coni o & x. Esto x conus, cuius basis sit circulus x, qui sit æqualis m. alter uero conus basim habeat o circulum, qui sit æqualis n. altitudinē uero ipsius x ponamus æqualem semidiametro sphæræ. at uero conus o altitudinē habeat lineam, quæ à centro sphæræ ad latus a k perpendiculariter ducta sit. Conus igitur x erit æqualis figuræ circumscriptæ sphæræ, conus uero o æquabitur inscriptæ. nā hæc iam demonstrata sunt. at uero quoniam figurę dictæ sunt similes, eandem proportionem habet e l ad a k, quam habet semidiametros sphęræ ad eam quæ à centro perpendiculariter ducta est ad a k. Eandem igitur proportionem habet altitudo coni x ad altitudinem coni o, quam e l habet ad a k. Diametrus autem circuli m, ad diametrum circuli n, eam habet quam e l ad a k. diametri ergo basium coni x, & coni o, suis altitudinib. sunt proportionales. igitur hi coni sunt similes inter se. & propter hoc conus x ad conū o habet eam proportionem triplicatam, quam diametrus circuli m ad dimetrum circuli n. Manifestum igitur est, quod figura circumscripta habet ad figuram inscriptam, proportionem illam triplicatam, quam habet e l ad a k: quod erat demonstrandum.

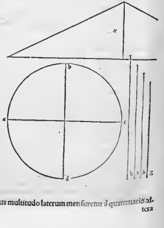
CVIuslibet sphæræ superficies quadrupla est circuli, qui in ea maximus habetur. Esto sphæra quęcūq; : esto deinde superficies quędā quadrupla ad maximū in sphæra circulū, quę sit circulus a. Dico igitur quod a est æqualis superficiei sphæræ. Nam si non, uel maior erit, uel minor. Ponatur primò quod sit maior sphęræ superficies circulo a. Habemus iā duas magnitudines inæquales, scilicet superficiem sphęræ, & circulū a. possumus ergo sumere duas lineas rectas inæquales, ita ut maior ad minorem habeat minorem proportionem, quam superficies sphæræ ad circulum a. sint itaq; sumptæ b c: quarum media proportionalis sit d. Intelligatur etiam sphæra secta à plana superficie transeunte per eius centrum, sitq; illa secans circulus e f g h. intelligatur præterea illi circulo una figura circumscripta, altera inscripta multorum angulorum, ita ut circumscripta sit inscriptæ

31



ptæ ſimilis: & circumſcriptæ latus minorem habeat proportionem ad latus inſcriptæ, quàm b habet ad ipſam d, & ſic illa proportio duplicata minor erit hac ſimiliter proportione duplicata. Proportio autem b ad c eſt duplicata, ea quam habet b ad ipſam d: proportio autem lateris figuræ circumſcriptæ, ad latus figuræ inſcriptæ, duplicata eſt tanta, quanta eſt ſuperficiei circumſcriptæ figuræ ſolidæ, ad ſuperficiem inſcriptæ. Superficies igitur figuræ ſolidæ circumſcriptæ ſphærę, ad ſuperficiem figuræ inſcriptæ, minorem proportionem habet quàm ſuperficies ſphæræ ad a circulum. quod quidem eſt inconueniens, & abſurdum. Nam ſuperficies figuræ circumſcriptæ, ſuperficie ſphæræ maior exiſtit. ſuperficies uero inſcriptæ a circulo minor eſt. Oſtenſum eſt enim, ſuperficiem figuræ inſcriptę minorem eſſe quàm quadruplam circuli in ſphæra maximi. Circulus autem a quadruplus eſt poſitus circuli in ſphæra maximi. Igitur ſphæræ ſuperficies non poteſt maior eſſe ſuperficie circuli a. Dico item quod neq; minor eſſe poteſt. nam ſi poteſt, eſto: & inueniantur ſimiliter duæ lineæ rectæ b, c: ita ut b ad c habeat minorem proportionem, quàm circulus a ad ſuperficiem ſphæræ. ſitq; illarum media proportionalis d, & circumſcribatur iterum, & inſcribatur figura ut ſuprà, ita ut circumſcriptæ ad inſcriptam minor ſit proportio quàm b ad lineam d. igitur & ea duplicata erit minor. Quare ſuperficies circumſcriptæ ad ſuperficiem inſcriptæ minorem habet proportionem, quàm a circulus ad ſphæræ ſuperficiem. quod ſanè abſurdum eſt. nam circumſcriptæ ſuperficies maior eſt a circulo, inſcriptæ uero ſuperficies ſphæræ ſuperficie minor exiſtit Nõ ergo ſuperficies ſphęræ a circulo poteſt eſſe minor. Cum etiam demonſtratum ſit quod nequeat maior eſſe, neceſſariò colligitur eam circulo a, hoc eſt quadruplo circuli in ſphæra maximi æqualem eſſe.

32 QVælibet ſphæra quadrupla eſt eius coni, qui quidem conus habuerit baſim æqualem circulo in ſphæra maximo, altitudinē uero ęqualem ſemidiametro ſphæræ. Eſto quædã ſphęra, & maximus in ea circulus a b c d. Si itaq; ſphæra non eſt quadrupla dicti coni, eſto ſi fieri poteſt maior quàm quadrupla. Eſto præterea conus x, qui baſim habeat quadruplã ad circulũ a b c d, altitudinem uero ſemidiametro ſphæræ æqualem. erit igitur ſphæra maior cono x. Habemus itaq; duas magnitudines inæquales, ſphæram uidelicet, & conum x. quare poterimus duas lineas rectas ſumere, quarum maior ad minorem habeat proportionem minorem, quàm ſphęra ad conum x. Sint igitur iſtę k g, & aliæ duæ i h ſumptæ, ita ut æquali quantitate ſeſe excedant. k excedat i, & i h, & h ipſam g. intelligatur etiam in circulo

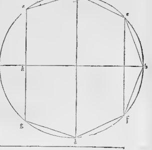


a b c d inſcripta una figura, cuius multitudo laterum menſuretur à quaternario. altera

tera præterea circumſcripta ſimilis inſcriptæ, quemadmodum ſuperius quoq; factum eſt. Latus uero circumſcriptæ ad latus inſcriptæ minorem habeat proportionem, quàm k ad ipſam i: & ſint a c, b d diametri ſe ad angulos rectos ſecantes. Si igitur quieſcente a c diametro circumferatur planus circulus, in quo figura eſt inſcripta, & circa quem altera circũſcripta fuerat, fient duæ figuræ, altera circa ſphęram, altera intrà deſcripta. Et circumſcripta habebit ad inſcriptam eam proportionem triplicatam, quam habet latus circũſcriptæ, ad latus inſcriptæ circulo a b c d. Latus uero ad latus minorem habet, quàm k ad ipſam i: quare figura circumſcripta minorem habet ad figuram inſcriptam proportionem, quàm eſt k ad i triplicata. Hoc enim manifeſtum eſt ex deſcriptione. multo magis ergo circumſcripta ad inſcriptam habet minorem proportionem, quàm k ad g. At uero k ad g minorem habet, quàm ſphæra ad x conum. & permutatim: quod ſanè eſſe non poteſt. nam figura circumſcripta maior eſt ipſa ſphæra, inſcripta uero eſt minor cono x: propterea quod conus x poſitus eſt quadruplus ad eum conũ, cuius baſis æqualis ſit circulo a b c d, & altitudo ſemidiametro ſphæræ. inſcripta uero figura minor exiſtit quàm quadrupla dicti coni. non poteſt igitur ſphæra maior eſſe quàm quadrupla dicti coni. Eſto ſecundò, ſi poteſt eſſe minor quàm quadrupla, ita ut ſphæra ſit minor x cono. ſumantur k g lineæ rectæ, k maior, g minor. Habeatq; k ad ipſam g minorem proportionem, quàm conus x ad ſphæram. & diſponantur i & h lineę ut prius, & intelligatur in a b c d circulo inſcripta figura multorum angulorum, altera circumſcripta, ita ut latus circumſcriptæ ad latus inſcriptæ, minorem habeat proportionem quàm k ad i, & cætera parentur eodem modo ut prius. figura ergo circumſcripta ad figuram inſcriptam, habebit eam proportionem quæ eſt lateris circumſcriptæ circulo a b c d, ad latus eidem inſcriptę triplicata. Latus uero ad latus minorem habet, quàm k ad i. Figura igitur circumſcripta ad inſcriptam, minorem habebit proportionem quàm eſt k ad i triplicata. k uero ad g eſt ea quam habet k ad i triplicata. quare figura circumſcripta ad inſcriptam, habet minorem quàm k ad g. at uero k ad g minorem habet quàm x conus ad ſphæram. Circumſcripta igitur figura ad inſcriptam, minorem habet quàm x conus ad ſphærã. quod quidem eſſe non poteſt. Nam inſcripta figuca minor eſt ipſa ſphæra. circumſcripta uero maior eſt x cono. Sphæra igitur minor eſſe non poteſt, quàm quadrupla coni, qui habeat baſim æqualem circulo a b c d, & altitudinem ſemidiametro ſphæræ. Et ſuprà eſt oſtenſum, quod neq; maior eſſe poterat: erit igitur dicti coni neceſſariò quadrupla.

Ex illis igitur quæ ſuprà ſunt demonſtrata, manifeſtum eſt, quod quilibet cylindrus, qui baſim habeat maximum in ſphæra circulum, & altitudinem diametrum ſphęræ, ad ipſam ſphęram ſeſquialter habetur, & ſuperficies eius cum baſibus ſeſquialtera ad ſphæræ ſuperficiem. nam cylindrus prædictus ſextuplus eſt eius coni qui baſim habeat cum cylindro eandem, habeat uerò altitudinem æqualem ſemidiametro ſphæræ. Sphæra uero eſt demonſtrata eſſe quadrupla dicti coni. ex quo conſtat, cylindrum eſſe ſphæræ ſeſquialterum. Item cum ſuperficies cylindri exceptis baſibus circulo oſtenſa eſt æqualis, cuius ſemidiametrus ſit media proportionalis inter latus cylindri & diametrum baſis eius: dicti autem cylindri circa ſphæram latus eſt æquale diametro baſis ſuæ: manifeſtum eſt, quod media proportionalis eſt & ipſa æqualis eidem diametro. Circulus autem cuius ſemidiametrus ſit æqualis diametro baſis, quadruplus eſſe probatur ad baſem, quæ eſt maximus in ſphæra circulus. Superficies autem cylindri exceptis baſibus habet quadrupla maximi in ſphæra circuli. quare tota ſimul cum baſibus ad eundem circulum ſextupla apparebit. ipſa quoq; ſphæræ ſuperficies ad circulum in ſphæra maximum, quadrupla probata eſt. quare tota cylindri ſuperficies, ad ſphæræ ſuperficiem exiſtet ſeſquialtera.

33 SVperficies figuræ in portione ſphæræ deſcriptæ, æqualis eſt circulo, cuius ſemidiametros tantum poſſit, quantum eſt quod continetur ſub uno latere figuræ multorum angulorum, inſcriptæ in ſectione maximi circuli, & ſub linea quæ ſit æqualis omnibus ſimul lineis, quæ baſe ſectionis ſint æquediſtantes, & dimidio ipſius baſis cum prædictis adiecto. Eſto ſphæra, & in ipſa portio ſecta, cuius baſis ſit circulus, cuius ſit diametrus a g: inſcribatur in ipſa portione figura qualis ſæpe dicta eſt, comprenſa à conicis ſuperficiebus. & ſit maximus in ſphæra circulus a g h, & ſit figura pari laterum numero conſtãs a c e h f d g, excepto latere a g: & ſumatur circulus l, cuius ſemidiametros tantum poſſit, quantum quod continetur ſub latere a c, & ſub omnibus ſimul e f c d, atque etiã dimidia baſe, hoc eſt a k. demõſtrandum deinceps eſt, quod l circulus æqualis eſt ſuperficiei dictæ figuræ. Sumatur enim circulus m, cuius ſemidiametros tantũ poſſit quantum quod cõtinetur ſub h e, & ſub dimidia e f. Circulus ergo m æqualis eſt ſuperficiei coni illius, cuius baſis eſt circulus habens e f diametrum: eius uero altitudo et uertex, ſignum h. ſumatur item alius circulus n, cuius ſemidiametrus tantum poſſit quantum continetur ſub e c, & dimidia utriuſque ſimul e f, c d, erit hic æqualis ſuperficiei coni, illi uidelicet quæ ſita eſt media inter planas ſuperficies æquediſtantes, ſecundum lineas uel circulos e f, c d. Item alius ſimiliter ſumatur qui ſit circulus x, cuius ſemidiametrus poſſit id quod ſub a c, & dimidia utriuſque ſimul c d, a g continetur, qui & æqualis eſt ſuperficiei conicæ, quæ inter planas æquediſtantes a g c d comprenditur. Omnes igitur circuli æquales erunt toti ſuperficiei figuræ dictæ. Et eorum ſemidiametri tantum poterunt, quantum ſub uno latere a c, & ſub linea quæ ſit æqualis omnibus ſimul e f, c d, & dimidia baſi a k. poterat autem ſemidiametrus circuli l æquale eidem ſpacio. quare ſequitur, l circulum circulis m n x æqualem eſſe: unde & ſuperficiei figuræ inſcriptæ æqualis exiſtet.

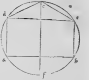




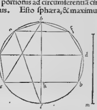
34 SEcetur ſphæra plana, ſuperficie non tranſeunte per centrum eius, & ſit in ea maximus circulus a e f, qui ſecet ſuperficiem ſecãtem ad angulos rectos, & inſcribatur in a c b ſphæræ portione figura multorum angulorum & parium numero, & æqualium laterum, excepta baſe a b, ſimiliter ſuperiorib. ſi manente & quieſcente g c circumferatur figura anguli quidem d, c, a, b ſecundum circumferentias circulorum, latera uero ſecundum conicas ſuperficies ferentur, erit que figu-

ra

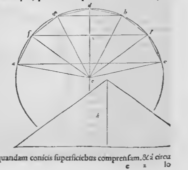
ra ſolida quæ inde confecta eſt, ſuperficiebus conicis comprænhenſa, quæ baſim babebit eum circulum cuius diametrus eſt a b, uerticem uero punctum c. Hæc igitur figura ſimiliter his quæ dicta ſunt ſuperius, ſuperficiem habebit minorem ſuperficie eius figuræ quæ complectatur eam. idem enim eſt utriſque terminus in plano portionis, ſcilicet circumferentia circuli, cuius diametros eſt a b: & ambæ ſunt in eandem partem conglobatæ ſuperficies, & altera ſub altera tenetur complexa.



35 SVperficies figuræ in ſphæræ portione deſcriptę, minor eſt eo circulo, cuius ſemidiametros æqualis eſt lineæ, quæ à uertice portionis ad circumferentiã circuli ducitur: qui quidem circulus baſis eſt portionis. Eſto ſphæra, & maximus in ea circulus a b f e: & eſto portio ſphæræ, cuius baſis ſit circulus circa diametrum a b, & inſcribatur in ipſa dicta figura & in portione circuli, figura multorum angulorum, & cętera eadem. Eſto ſphęræ diametros h l, coniunctis l e, h a. & ſit circulus m, cuius ſemidiametrus ſit æqualis a h. Oſtendendum eſt, quod circulus m maior eſt ſuperficie figuræ. ſuperficies aũt figuræ demonſtrata eſt æqualis eſſe circulo, cuius ſemidiametros tantum poteſt, quantum continetur ſub e h, & ſub omnibus e f, c d, k a. idipſum cõtentum ſub e h, & ſub e f, c d, k a, æquatur contento ſub e l, k h. contentum uero ſub e l, k h, minus eſt contento ſub a h, k h. nam & minus contento ſub a h, k h. Manifeſtũ igitur eſt, quod ſemidiametrus circuli, qui eſt æqualis ſuperficiei figuræ, minor eſt ſemidiametro m. Conſtat igitur, circulum m ſuperficie figuræ maiorem etiam.



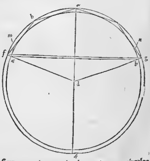
36 FIgura portioni ſphæræ inſcripta, quæ conicis ſuperficiebus contineatur, unà cum cono illo qui baſim habeat eandem cum figura, uerticem uero centrum ſphæræ, æquatur illi cono, cuius baſis eſt æqualis ſuperficiei figuræ dictę: altitudo uero æqualis lineæ, quæ à cẽtro ſphęræ ad unum latus dictæ figuræ ſit perpendiculariter ducta. Eſto ſphæra, et maximus in ea circulus & portio ſemicirculo minor a b c, & centrum e: & ſcribatur in a b c portione figura parium laterum & æqualium, excepta a c baſe, ſimiliter ut prius: & quieſcente b e, circumferatur



ſphæra, quæ faciet figurã quandam conicis ſuperficiebus comprenſam. & à circu

lo cuius diametros est a c, conus erigatur, qui uerticem habeat centrum sphæræ. & sumatur conus k, qui basem habeat æqualem superficiei figuræ, altitudinem uero æqualē ei quæ à centro e ducitur perpendiculariter ad unum latus figuræ. Demonstrare itaque oportet, quod conus k æquetur figuræ dictæ, unà cum cono a e c. erigātur etiam coni à circulis, quorum diametri sunt g h, f l, qui uerticem habeant punctum e. Igitur rhombus g b h e solidus, æqualis est cono cuius basis æquatur superficiei g b h: coni altitudo uero ei quæ ab e ad g b, sit perpendiculariter ducta. Residuum uero quod continetur sub superficie intermedia inter planas superficies, quæ sunt secūdum g h, f l, & sub conicis f e l, g e h, æquatur cono cuius basis æqualis sit superficiei intermediæ inter æquedistantes planas, quæ sunt secūdum g h, f l: altitudo uero æqualis ei quæ sit à centro e ad f g perpendiculariter ducta. Rursus residuum comprehensum à superficie intermedia planarum æquedistantium, quæ sunt secundum f l, a c, & à conicis a e c, f e l, æquatur cono cuius basis æqualis est superficiei, quæ intermedia est inter planas æquedistantes, quæ sunt secundum f l, a c, altitudo uero ei quæ ducta sit perpendiculariter ab e ad f a. Prædicti igitur coni æquales erunt figuræ unà cum cono a e c. & altitudinem quidem habent eam quæ ab e ad unum latus figuræ perpendiculariter sit ducta, bases uero æquales superficiei a f g b l c figuræ. Habet aūt & conus k eādem altitudinem, & basem æqualem superficiei dictæ figuræ: quare erit æqualis dictis conis. Coni uero dicti ostēsi sunt æquales esse dictæ figuræ, unà cum a e c cono. Igitur & k conus æquatur dictæ figuræ, unà cū a e c cono. Ex hoc igitur manifestū est, quod conus qui basem habeat circulum, cuius semidiametros æqualis sit ei quæ à uertice portionis ad circumferentiam circuli, qui est basis figuræ, ducta sit: altitudinem uero æqualem semidiametro sphæræ: maior est figura portioni inscripta unà cum cono, &c. nam dictus conus maior est cono æquali figuræ, unà cum cono, &c. qui conus basem habeat basem figuræ portionis ad centrum: hoc est, qui basem habeat æqualem superficiei figuræ, altitudinem uero æqualem ei quæ sit à centro ad unum latus figuræ multorum angulorum perpendiculariter ducta. nam basis illius, base huius maior existit, & altitudo altitudine maior.

37 Esto sphæra, & maximus in ea circulus a b c, & secetur in ea portio semicirculo minor, quā secet a b, & sit cētrum d, & à centro d ad a b ducantur a d, d b. & circa factam portionem circumscribatur figura multorum angulorum, circa quam describatur circulus, qui quidem habebit idem centrū cum a b c circulo. quod si quiescēte e k circumferatur dicta figura donec ad locum redeat unde moueri cœpit, circulus circumscriptus secundum sphæræ superficiē feretur: & anguli dictæ figuræ circulos describent, quorum diametri erunt lineæ angulos figuræ iungentes, quæ æquedistātes erūt ipsi a b:

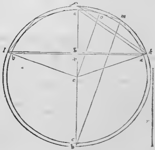


puncta uero, in quibus latera figuræ contingunt circulum minorem, circulos descri-

describent in minori sphæra, quorum diametri erunt lineæ continuantes puncta contactuum æquedistantes lineæ a b, latera uero dictæ figuræ secundum conicas superficies ferentur. & figura circumscripta sub conicis superficiebus continetur, cuius basis circulus est, qui est circa f g diametrũ: dictæ uero figuræ superficies est maior superficie minoris sectionis, cuius basis est circulus qui est circa a b diametrum. Ductæ enim sunt contingentes a m, b n. quare secundum conicas superficies ferentur: & figura quæ causatur à figura multorum angulorum, circumuoluta a m h e n b, maiorem habebit superficiem quàm portio sphæræ, cuius basis est circulus circa a b constitutus. nam utræq; in eodem plano existunt, & eundem terminum habent, circulum circa a b descriptum. & portio à figura comprehenditur. cæterum conica superficies a b f m g n producta, maior est ea quæ a b m a n b effecta est. nam f m maior est m a: nam subtenditur rectæ. linea uero n g, maior n b. cũ autem hoc sic se habeat, maior erit superficies superficie. nam hæc sunt in his quæ sumpta fuerunt, demonstrata. Manifestum est igitur, quod circumscriptæ figuræ superficies maior est superficie portionis sphæræ minoris. Insuper manifestũ est, quod superficies inscriptæ figuræ quæ circa portionem existit, æqualis est circulo cuius semidiametros possit id quod sub uno latere figuræ continetur, & sub omnibus simul lineis continuantibus angulos dictæ figuræ, & dimidia base dictæ figuræ multorum angulorum, secundum quod descripta fuit figura solida in maiori sphæra descripta. Hoc autem per ea quæ antè descripta sunt, manifestum est.

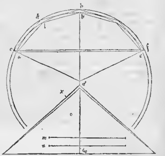
Superficies figuræ quæ circa sphæræ portionem sit descripta, eo circulo maior existit, cuius semidiametros sit æqualis lineæ, quæ à uertice portionis ad circũferentiã circuli sit ducta, qui circulus basis portionis existat. Esto sphæra, & maximus in ea circulus a b c d, centrum eius e. Deinde circa portionem describatur figura multorum angulorum l k f, & circa hãc describatur circulus, & fiat figura, ut prius circumuoluendo, &c. deinde esto circulus n, cuius semidiametros possit id quod continetur sub uno latere figuræ, & sub omnibus simul coniungentibus angulos, & dimidia k l. uerũ idem spacium dictũ æquatur ei quod sub m h & f g continetur, quæ est altitudo portionis maioris sphæræ. Hoc autem prius ostẽsum est. semidiametros igitur circuli n, potest æquale ei quòd sub m b, g f continetur. sed g f quidem maior est d x, quæ est altitudo minoris portionis. nam si iungamus k f, erit æquedistans ipsi d a. Est autem & a b æquedistans ipsi k l, & conus est f e. Triangulus igitur f k g, similis est triangulo d a x. & maior est f k quàm d a maior est igitur etiã f g quàm d x. At uero m o æquatur ipsi o f, ipsa uero b e ipsi e f. est igitur e o æquedistans ipsi m b: igitur m h dupla est e o. Sed etiam c d dupla est ipsius e o. quare c d æqualis est ipsi m b. Quod aũt sub c d & d x continetur, est æquale quadrato a d. Superficies igiĩ figuræ k f l,

38



maior est circulo cuius semidiametros sit æqualis ei quæ à uertice portionis ad circumferentiam circuli ducta sit, qui est basis eius portionis quæ est circa diametrũ a b. quoniam n circulus æqualis est superficiei figuræ circa portionẽ descriptæ.

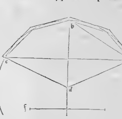
39 Figura circa sphæræ portionem descripta, unà cum cono cuius basis sit circulus circa k l diametrum constitutus, uertex centrũ sphæræ æqualis est cono, cuius basis sit ęqualis superficiei figuræ: altitudo uero æqualis ei lineę, quæ à cẽtro ad latus figurę sit perpendiculariter ducta, quæ quidem semidiametro quoq; sphęræ inuenitur æqualis. Nã figura portioni circumscripta, est in portione maioris sphærę inscripta, cuius centrum est idem cum minori, unde constat, quod propositum est ex antè descripta figuratiõe. Ex hoc igitur manifestũ est, quod figura circumscripta unà cum cono, maior est eo cono qui basim habeat circulum, cuius semidiameter æqualis sit lineæ ductæ à uertice portionis sphæræ minoris, ad circumferentiam circuli, qui sit basis portionis dictæ: altitudinem uero æqualem semidiametro sphæræ. Nam conus qui erit æqualis dictæ figurę, unà cum cono maiorem basim habebit, quàm sit dictus circulus: altitudinem uero æqualem semidiametro sphęræ minoris. Esto item sphęra, & maximus in ea circulus & portio a b c, minor semicirculo, & cẽtrum d: & intra a b c portionem inscribatur figura multorum & parium angulorum, & huic similis circumscribatur eidem, & ponantur latera lateribus æquedistantia. & circulus circumscribatur figuræ circumscriptæ, & ut prius quiescente g h, circuli circumducti producant figuras conicis superficiebus compræhensas. Ostendere oportet, quod circumscriptæ figurę superficies ad superficiem inscriptę eam habet proportionem, quæ est lateris circũscriptæ ad latus inscriptæ duplicatã. Figura uero ipsa, simul cum cono ad figurã, habet eandẽ proportionem triplicatam. Esto m circulus, cuius semidiametros tantum potest, quantum sub uno latere figuræ, & omnibus simul lineis angulos continuantibus, unà cum dimidia e f continetur: erit itaq; m circulus æqualis superficiei figurę. Sumatur deinde circulus n, cuius semidiametros tantum possit, quantum sub uno latere inscriptæ figuræ, & omnibus simul lineis iungentibus angulos unà cũ dimidia a c. Hic quoq; circulus erit æqualis superficiei figuræ inscriptæ. Verum dicta spacia haberẽ inter se eam proportionem, quam habet quadratum lateris e k ad quadratum a l. Igitur ut figura ad figuram, ita m circulus ad n circulum. Quare manifestũ est, quod superficies figurę circumscriptę ad superficiem inscriptæ figuræ, habet eam proportionem duplicatam, quã habet e k ad a l: eandem uidelicet, quam figura ad figuram. Esto item conus x, qui basim habeat æqualem circulo m, altitudinem uero semidiametrum sphæræ minoris. Hic conus æqualis est figuræ circumscriptæ unà cum cono illo, cuius quidẽ coni basis est circulus qui est cir-



ca e f

ca e f diametrum, uertex uero d. Esto item altus conus o, qui basim habeat æqualẽ ipsi n, altitudinem uero æqualem ei quæ ab ipso d ad a l perpendiculariter ducta sit. hic quoq; figuræ inscriptæ unà cum una cono est æqualis, cuius quidem coni basis est circulus circa a c diametrum descriptus, uertex uero d cẽtrum. Hæc enim omnia prius descripta fuerunt. Quoniam igitur sicut e k ad semidiametrum sphæræ minoris, ita a l ad ductã à centro perpẽdiculariter ad ipsam a l. Ostensum aũt fuit, quod sicut e k ad a l, sic semidiametros circuli m ad semidiametrũ circuli n, et etiam diametros ad diametrum. Erit igitur, sicut diametros circuli illius qui est basis x, ad diametrum circuli qui est basis ipsius o, ita altitudo coni x ad altitudinem coni o. quare sequitur, conos x & o similes esse. conus ergo x habet ad conũ o, eã quæ est diametri ad diametrũ proportionem triplicatam. Vnde manifestum est, figuram quoq; circumscriptam unà cum cono ad figuram inscriptam, unà cum cono eam habere quam e k ad a l proportionem triplicatam. quare, &c.

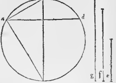
40 SVperficies cuiuscunq; portionis sphęræ, quæ quidem portio sit dimidia sphæra minor, æqualis est circulo, cuius semidiametros æquatur lineæ illi, quæ à uertice portionis ad circumferẽtiam circuli ducta sit, qui circulus portionis est basis. Esto sphęra, et maximus in ea circulus a b c. itẽ sectio in ea minor dimidia sphæra, cuius basis sit circulus circa a c cõstitutus, erectus super a b c circulo. & sumatur circulus f, cuius semidiametros sit æqualis lineæ a b. Oportet itaq; demõstrare, superficiẽ a b c portionis ęqualem esse circulo f. nã si non sit: esto primò maior dicta superficies circulo f, & ponatur d centrũ, & ab ipso duę lineę ductę ad a, & ad c extra educantur. Cũ igitur sint duę



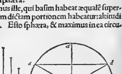
magnitudines inęquales, superficies uidelicet portionis, et f circulus, describemus duas figuras multorum angulorum, & parium & ęqualium laterũ, omnino similes, unam circa sectorem circuli a b c, alteram intra eundem, ita ut circumscriptę ad inscriptam sit minor proportio, quàm superficiei portionis sphęrę ad circulum f. circumuoluto deinde circulo, ut prius, duas figuras efficiemus conicis superficiebus compręhensas, quarum altera circumscripta, altera inscripta erit: & superficies circumscriptę ad superficiem inscriptę eandem habebit proportionem, quam circumscripta figura habet ad inscriptam. nam utraq; proportio est duplicata illa quam habet latus circumscriptę, ad latus inscriptę figurę multorum angulorum. Sed circumscripta multorum angulorũ figura ad inscriptã, minorem habet proportionem, quàm dictę portionis superficies ad circulum f. maior autem est circũscriptę figurę superficies superficie portionis. igitur & superficies figurę inscriptę maior erit f circulo. quod quidem esse non potest. Nam supra demonstratum est, dictam figurę superficiem tali circulo minorem esse. Esto secundò, quod circulus ponatur maior esse superficie, & similiter circumscribatur & inscribatur figura altera alteri similis, & circumscriptæ ad inscriptam minor sit proportio quàm circuli f ad superficiem figurę: & item demonstrabitur deducendo ad idem inconueniens, circulum f non posse esse maiorem dicta superficie. Cum igitur neq; maior esse possit dicta superficies f circulo, neq; minor, ut demonstratum est, sit necessariò, ut sit eidem æqualis.

Si

41 SI portio sphęrę sit maior dimidia sphęra, rursus eius superficies æquatũ circulo, cuius semidiametros sit ęqualis lineę illi quę ducta sit à uertice portionis ad circumferentiam circuli, qui est basis dictæ portionis. Esto sphęra, & maximus in ea circulus a b c d, & intelligatur ipsa secta à plano secũdum a d, & sit a b d minor dimidia sphęra, et diametrus b c secet ad angulos rectos diametrum a d, & ipsa c & b iungantur c a, b a: & sit e circulus, cuius semidiametrus sit ęqualis ipsi a b. Sit autem f circulus, cuius semidiametrus sit ęqualis ipsi a c. & g sit circulus, cuius semidiametrus sit ęqualis b c. Circulus igitur g, ęqualis est duobus simul circulis e, f. Circulus autem g, ęqualis est toti superficiei sphęræ, cum utraq; sint quadtupla circuli, qui est circa diametrum b c. circulus e, æqualis est superficiei a b d portionis minoris: nam hoc est demonstratũ proxima superiori in portione minori dimidia sphæra, reliquus ergo circulus f, æqualis est superficiei a c d portionis maioris dimidia sphæra.



42 CVicũq; portioni sphæræ æquatur conus ille, qui basim habeat æqualẽ superficiei sectionis sphæræ, quæ secundum dictam portionem habeatur: altitudinem uero æqualem sphæræ semidiametro. Esto sphæra, & maximus in ea circulus a b d, centrum c. & conus basem habens circulũ æqualem superficiei, quæ secundum a b d circũferentiam habetur, altitudinem uero æqualem ipsi b c. Ostendẽdum est, quod portio a b c d, æqualis est dicto cono. Nam si non: esto primò portio maior cono, & ponatur h conus qualis dictus est. Cum igitur duæ sint magnitudines inęquales, portio scilicet, & conus h, inueniantur duæ lineæ l & e, l maior, e minor, quæ habeãt minorẽ proportionem, quàm portio ad conum: & sumantur duæ lineæ, f, g: ita ut l tantum excedat f, quantum f excedit g, & g, e. & circa planam circuli portionem circumscribatur figura multorum angulorum, & æqualium laterũ, & parium angulorum: & altera huic similis inscribatur eidem, ita ut circumscriptæ ad inscriptam sit maior proportio, quàm l ad ipsam f. & simili modo, ut prius factum est, circũducto circulo producentur duæ figuræ conicis superficiebus compræhensæ. Figura itaq; circumscripta, unà cum cono, qui uerticem habeat punctum c ad figuram inscriptam, unà cum cono habet eam proportionem triplicatam, quam habet latus figuræ multorum angulorum circumscriptæ, ad latus inscriptæ. Verum latus circumscriptę ad latus inscriptæ, habet minorem proportionem quàm l ad f. Figura igitur solida quæ dicta est, minorem habebit proportionem quàm est l ad f triplicata. At uero l ad e maiorem habet proportionem, quàm est l ad f triplicata. figura ergo solida circumscripta portioni, ad inscriptam figuram, minorem habet proportionem, quàm est l ad e. Verum l ad e minorem habet, quàm portio solida, ad conum h. quare figura solida circumscripta portioni, ad inscriptam eidem, minorem habet



bet proportionem, quàm portio solida ad conum h: & permutatim. figura solida uero circumscripta maior est portione. Inscriptam ergo figuram ipsi portioni maiorem esse cono concludemus, quod sanè esse non potest. demõstratum enim est in superioribus, dictam figurã minorẽ esse oportere eo uidelicet cono, qui basim habeat circulũ, cuius semidiametros æqualis sit lineæ à uertice portionis ad circũferentiam portionis ductæ, qui circulus basis portionis existat: altitudinem uero semidiametrum sphæræ. Hic aũt est dictus conus h. habet enim basem circulum æqualem superficiei portionis, hoc est dicto circulo, & altitudinem æqualem semidiametro sphæræ. Portio igitur solida non est maior cono h. Esto secundò conus h maior solida portione: rursus atq; similiter l ad ipsam e, cum sit maior, ea minorẽ habeto proportionem, quàm conus ad portionem. & similiter sumantur f g, ita ut latus figuræ multorum angulorum & parium circumscriptæ circa planam portionem circuli ad latus inscriptæ eidem, minorem habeat proportionem quàm est l ad f. & fiant circa portionem solidam figuræ solidæ, ut superius fecimus. Demonstrabimus itaq; eodem modo, quòd figura solida portioni solidæ circumscripta, ad inscriptã figuram minorem habeat proportionem, quàm l ad e, & quàm h conus ad portionem. quare portio quoque ad conum minorem habebit proportionem, quàm figura solida portioni inscripta ad figuram circumscriptam. Portio autem maior est figura sibi inscripta. igitur concludemus, h conum esse figura circumscripta maiorem: quod item esse non potest. nam hoc demõstratum est, quod talis conus necessariò minor est figura portioni circumscripta. Ex qua re colligimus, portionem cono dicto esse æqualem.

ARCHIMEDIS DE SPHAERA ET
Cylindro Libri primi Finis.

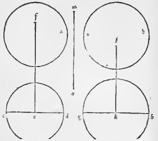
ARCHIMEDIS DE SPHAERA ET CYLINDRO LIBER SECUNDUS.

ARCHIMEDES DOSITHAEO SALUTEM.

ANTEA quidem mihi iusseras, ut problematum demonstrationes scriberem, quorum ipse iam propositiones miseram ad Cononem. Contingit autem eorum plurima scribi per theoremata, quorum iampridem ad te miseram demonstrationes. Quòd uidelicet cuiuslibet sphæræ superficies maximi in sphæra circuli quadrupla existit. Et quòd superficiei cuiuscunque sphæræ circulus ille est æqualis, cuius semidiametros diametro sphæræ est æqualis. Item cuiuscunque portionis sphæræ superficies æquatur circulo, cuius semidiametros est æqualis lineæ rectæ, quæ à uertice portionis ad circumferentiam circuli, qui est basis portionis, ducatur. Itẽ quod cylindrus qui basem habeat maximum in sphæra circulum, altitudinem uerò æqualem diametro sphæræ, ipseq; sesquialter est magnitudini sphæræ, & eius superficies superficiei sphæræ sesquialtera habetur. Item quòd omnis portio solida sphæræ æqualis est cono, qui basim habeat circulum, qui sit æqualis superficiei portionis sphæræ: altitudinem uerò æqualem semidiametro sphæræ. Quæcunq; igitur inspecta theoremata & problemata ex his quę dicta sunt oriuntur, ad te missa sunt, omnia in hoc libro conscripta. Quæ uero ex alia inspectione colliguntur, ut quæ de elicis & conoidibus, nitor quàm celeriter mittere. Primũ autem quod

propositum fuerat, habebatur huiusmodi. Sphæra data spacium planum inueni re, quod superficiei sphæræ esset æquale. Hoc autem manifestum & demonstratum est ex prædictis inspectis & theorematibus. Spacium enim planum quod circulo in sphæra maximo sit quadruplum, æquale est superficiei sphæræ.

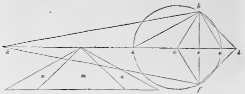
1 Secundum propositũ fuit, cono, siue cylindro dato sphęram inuenire, dicto cono uel cylindro æqualem. Esto datus conus, siue cylindrus, a: & sphæra ipsi a æqualis, sit b: & ponatur cylindrus c f d, qui sit sesquialter dato cono, uel cylindro a Sphæræ uero b cylindrus sesquialter ęsto, qui basem habet circulum, qui est circa diametrum g h: axem uero k l, æqualem diametro sphæræ b. erit igitur e cylindrus æqualis cylindro k. cylindrorũ aũt æqualium bases suis altitudinib. sunt mutuæ in proportione. Sicut ergo e circulus ad k circulum, hoc est sicut quadratum c d ad quadratum g h, sic k l ad e f. Est autem k l æqualis ipsi g h. tiam cylindrus sesquialter sphæræ, axem habet æqualem diametro sphæræ, & circulus k est in sphæra maximus. sicut ergo quadratum c d ad quadratum g h, sic g h ad e f. Esto id quod sub c d, m n continetur, æquale quadrato g h. Sicut ergo c d ad m n, sic quadratum c d ad quadratum g h, hoc est g h ad e f: & permutatim, sicut c d ad g h, ita g h ad m n, & m n ad e f. Et utraque c d & e f data est. Igitur inter duas datas rectas lineas duæ mediæ proportionales sunt, g h, m n. quare utraq; g h & m n data erit. Componetur autem iam propositum hoc modo. Esto datus conus, siue cylindrus, a. oportet itaq; ipsi cono, uel cylindro, sphæram æqualem constituere. Esto coni, siue cylindri a, cylindrus sesquialter, cuius basis sit circulus qui est circa diametrũ c d, axis uero e f. & sumantur inter c d & e f duæ mediæ proportionales g h, m n: ita ut sicut c d ad g h, ita g h, ad m n, & m n ad e f. Et intelligatur cylindrus, cuius basis sit circulus, qui fiat circa diametrum g h, axis autem k l æqualis diametro g h. Dico iam, quod æqualis est e cylindrus ipsi k cylindro. Nam quoniã sicut c d ad g h, ita m n ad e f. & permutatim, & g h est æqualis ipsi k l. Sicut igitur c d ad m n, hoc est quadratum c d ad quadratum g h, sic e circulus ad k circulum. sicut ergo e circulus ad k circulum, sic k l ad e f. Cylindrorũ igitur e & k bases, suis altitudinibus in proportione sunt mutuæ. quare e cylindrus ipsi k cylindro erit necessariò æqualis. Cylindrus uero k sphæræ illius est sesquialter, cuius diametros est g h. Ergo sphæra cuius diametros æquatur g h, hoc est b, æqualis est a cono, siue cylindro.



2 CVicunq; portioni sphæræ conus ille habetur æqualis, qui basim habeat eandem cum portione, altitudinem uero lineam rectã, quæ ad altitudinem portionis eandem habeat proportionem, quam semidiametros sphæræ unà cum altitudine reliquæ portionis habet, ad eandem reliquæ portionis altitudinem.

Esto sphæra, & maximus in ea circulus, cuius diametros a c, & secẽt sphæra à plano secundum b f, ad angulos rectos super ipsam a c, & sit centrum h, & fiat sicut utraq; simul h a, a e ad a e, sic d e ad c e, item fiat sicut utraq; simul h c, c e ad c e, sic k e ad

ad e a. Et erigantur coni utrinque à circulo circa b f diametrum constituto, uertices habentes puncta k d. Dico itaq;, quod b d f conus, æquatur ei quæ est secundũ c portioni sphæræ, conus autem b k f portioni, quæ est secũdum a punctum. Iun-

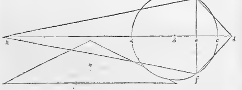


gantur itaq; b h, h f: & intelligatur conus, qui basim habeat circulum circa b f diametrum constantem, uerticem uerò punctum h. item alter conus m, qui basim habeat circulum æqualem superficiei b c f portionis sphæræ: hoc est, habentem semidiametrum æqualem b c. altitudo uero coni sit æqualis semidiametro sphæræ. Erit iam conus m æqualis b c h f portioni solidæ. Hoc autem est ostensum in primo libro. Quoniam igitur est sicut d e ad c e, sic utraque simul h a, a e ad a e, diuidendo erit sicut c d ad c e, ita h a ad a e: hoc est c h ad a e. & permutatim, sicut d c ad c h, sic c e ad e a. & coniungendo, sicut h d ad b c, ita c a ad a e: hoc est quadratum c b, ad quadratum b e. Sicut ergo d h ad c h, ita quadratum c b ad quadratum b e. Est autem c b æqualis semidiametro circuli m. At uero b e est semidiametros circuli circa b f diametrum constituti. Erit igitur, ut d h ad h c, sic m circulus ad circulum circa diametrum b f constitutum, & h c est æqualis axi coni m. ergo sicut d h ad axem coni m, sic circulus m ad circulum circa b f diametrum constitutum. Conus igitur qui habet basem circulum m, & altitudinem sphæræ semidiametrum, æqualis est b d f h solido rhombo. nam hoc in his quæ in primo libro sumpta sunt, demõstratum fuit. Vel hoc modo cõcludemus: Quoniam est sicut d h ad altitudinem m coni, ita m circulus ad circulum circa b f diametrum constitutum. quare conus m æquabitur cono, cuius basis sit circulus circa b f diametrum constitutus, altitudo autem d h. nam istorum bases altitudinibus sunt mutuæ in proportione. sed conus qui basem habet circulum circa b f diametrum constitutum, altitudinem autẽ d h, æqualis est b d f h solido rhombo: conus uero m æquatur b c f b, solidæ portioni: & b c f h solida portio æqualis erit b d f h solido rhombo. Communi itaq; sublato cono uidelicet cuius basis est circulus circa b f diametrum conuolutus, altitudo autem c h: residuum scilicet b d f conus, æqualis erit b f c portioni sphæræ. Similiter autem ostendetur, b k f conum portioni sphæræ b a f esse æqualem. Nam quoniã sicut utraq; simul h c, c e se habet ad c e: sic k e ad e a, diuidendo erit sicut k a, ad a e, ita h c ad c e. æqualis est aũt h c ipsi h a. quare & permutatim, sicut k a ad a h, ita a e, ad e c. unde cõponendo, sicut k h ad h a, sic a c ad e c: hoc est, quadratũ b a ad quadratum b e. Ponatur itaq; rursus circulus n, semidiametrum habens æqualem lineæ ductæ à uertice portionis b a f. ad circumferentiam basis portionis, & intelligatur conus n, qui altitudinem habeat æqualem semidiametro sphæræ: æqualis ergo hic erit b h f a solidæ portioni. nam hoc in primo fuit ostensum. Et quoniam demonstratum est, sicut k h ad h a, ita esse quadrati a b ad quadratum b e, hoc est quadrati semidiametri n circuli, ad quadratum semidiametri circuli circa b f diametrum

 trum

trum conuoluti: hoc est n circuli ad circulum circa b f diametrum constitutum. at uero a h æquatur altitudini n coni. quare sicut k h ad altitudinem coni n, sic circulus n ad circulum circa b f diametrum cõstitutum, altitudinem uero k h. Tota igitur a b f portio sphæræ æquatur cono b k f, qui basem habeat eãdem cum portione, & altitudinem æqualem ei, quæ eandem habeat proportionẽ ad altitudinem portionis sphæræ, quam proportionem habet utraq; simul & semidiametrus sphæræ, & perpendicularis reliquæ sectionis ad perpendicularẽ reliquæ sectionis. sicut enim d e ad e c: sic d f b conus, hoc est b c f portio ad b c f conum.

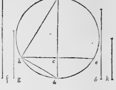
Eadem descriptione retenta, & eisdem subiectis ostendemus, quod k b f conus æqualis est a b f portioni sphæræ. Esto itaq; n conus, basem habẽs superficiei sphæræ æqualem, altitudinem uero semidiametrũ sphæræ. Conus igitur iste est æqualis sphæræ. nam sphæra ostensa est quadrupla esse coni basem habentis maximũ in sphæra circulum, altitudinem autem semidiametrum sphæræ. Sed & conus n



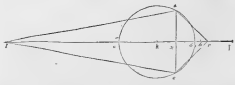
est quadruplus eiusdem coni, cum basis sit quadrupla basis. Nam superficies sphæræ quadrupla est maximi in ea circuli, & altitudo altitudini æqualis. & quoniam sicut utrũq; simul h a, a c ad a e, sic d e ad e c, disiũgendo & permutatim argumentabimur, sicut h c ad c d, ita a e ad e c. Rursus quoniã sicut k e ad e a, sic utraque simul h c, c e ad c e disiungendo, & permutatim sicut k a ad c h, hoc est ad b a, sic a e ad e c: hoc est h c ad c d. & coniungendo. æqualis est autem a h, h c. Sicut ergo k h ad h c, sic h d ad d c. & sic tota k d ad d h, ut d h ad d c, hoc est k h ad b a. quod continetur igitur sub d k, h a, æquatur ei quod sub d h k cõtinetur. rursus quoniã est sicut k b ad h c, sic h d ad c d, & permutatim. at uero sicut h c ad c d ostẽsum est, sic e a e ad e c. sicut igitur k h ad a h, sic a e ad e c. quare & sicut quadratum k d, ad id quod continetur sub k h, h d: sic quadratum a c ad id quod continetur sub a c, e c. quod continetur uero sub k h, h d, ostensum est æquale esse ei quod sub k d a h continetur. Sicut igitur quadratum k d ad id quod continetur sub k d a h, hoc est k d ad a h: sic quadratum a c, ad id quod sub a e, e c continetur, hoc est ad quadratum c b. & a c, æqualis est semidiametro circuli n. sicut ergo quadratum semidiametri n circuli ad quadratum b e, hoc est n circulus ad circulum circa b f diametrum conuolutum: sic k d ad a h: hoc est k d ad altitudinem coni n. Conus igitur n, hoc est sphæra, æqualis est b d f k solido rhombo. Vel sic. est igitur sicut circulus n ad circulum circa b f diametrum constitutum, sic d k ad altitudinem coni n. Conus igitur n æqualis est cono, cuius basis sit circulus circa b f diametrum constans, altitudo d k. corũ enim bases suis altitudinibus sunt in proportione mutuæ. sed talis conus æqualis est b k f d solido rhombo. quare conus quoq; n, hoc est sphæra, æquatur b f k d solido rhombo, ex conis b d f & b k f composito. quorum b d f conus ostensus est esse æqualis b c f portioni sphæræ: reliquus igitur b k f conus erit necessariò æqualis b a f reliquæ portioni sphæræ.

Datam

DAtam sphæram sic secare plana superficie, ut portionũ superficies inter se similē cuicũq; proportioni datæ retineant proportionē. Vt hoc exequamur, esto hoc factũ esse. & sit maximus in sphęra circulus a d b e, diametros eius a b, & emittatur plana superficies ad a b secũdum angulos rectos, & fiat à plana superficie in a d b e circulo sectio d e, & iungantur lineæ a d, b d. Quoniã itaq; proportio data est superficiei d a e portionis, ad superficiem d b e portionis: & superficiei portionis d a e æqualis est circulus, cuius semidiametros æqualis est ipsi a d: superficiei autem portionis d b e, æqualis est circulus, cuius semidiametrus est æqualis ipsi b d. Sicut autem dicti circuli inter se, sic quadratum a d ad quadratum d b: hoc est, a c ad c b. Proportio igitur quæ est a c ad c b, erit data proportio. quare c punctum datum erit, & super a b ad angulos rectos erecta est linea d e. ergo & plana superficies, quæ est secundũ d e, erecta stabit similiter. Cōficietur autem sic. Esto sphæra, & maximus in ea circulus a b d e, cuius diametros a b. proportio autem data sit f ad g, & diuidatur a b ad punctum c. diuidatur sphæra à plano ad angulos rectos super a b linea recta constituto, & sit communis sectio d e, & iungantur a d, d b. & exponantur duo circuli h k: circulus h æqualem habens semidiametrum ipsi a d, circulus uero k æqualem semidiametrum ipsi d b habens. Est igitur h circulus æqualis superficiei d a e portionis, k uero æqualis superficiei d b e portionis. Hoc enim ante demonstratũ est in primo libro. & quoniam data est superficies quæ sub a b d continetur, & c d perpēdicularis existit, erit ut a c ad c b, hoc est f ad g, sic quadratum a d ad quadratum d b: hoc est quadratum semidiametri h circuli, ad quadratum semidiametri k circuli: hoc est h circulus ad k circulũ. hoc item est superficies d a e portionis, ad superficiem d b e portionis sphæræ. 3



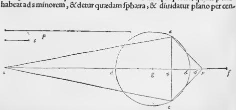
DAtam sphæram sic secare, ut portiones sphæræ inter se eandem habeant proportionem ei, quęcunq; data sit proportioni. Esto data sphæra a b c d, oportet eam plano secare, sic ut ipsæ sphæræ portiones inter se habeant propor- 4



tionem datam. Diuidatur itaq; secundũ a c à plano. proportio igitur a d c portionis, ad a b c portionem sphæræ est data. diuidatur autem sphæra per centrum, & sit sectio maximus circulus a b c d, centrum autem k, & diametros d b. & fiat, ut sicut utraq; simul k d, d x ad d x, sic r x ad x b. Sicut autem utraq; simul k b, b x ad b x, sic

b x, ſic l x ad x d: & iunganturа l, l c, a r, r c. conus igitur a l c, eſt æqualis a d c portioni ſphæræ, a r c uero ipſi a b c. Proportio igitur a l c coni ad a r c conum eſt data. Sicut autem conus ad conum, ſic l x ad x r, cum eandem baſem habeanr, circulum qui eſt circa a c diametrum conuolutus. Proportio igitur etiam l x ad x r eſt data, & iam eadem ſequuntur, quæ prius propter apparatum ſicut l d ad k d, ſic k b ad b r, & d x ad x b. & quoniam eſt ſicut r b ad b k, ita k d ad l d coniungendo ſicut r k ad k b, hoc eſt ad k d, ſic k l ad l d. Tota igitur r l ad totam k l eſt, ſicut k l ad l d. quod igitur ſub r l, l d cõtinetur, æquatur quadrato l k. Sicut igitur r l ad l d, ſic quadratum k l ad quadratum l d. & quoniam eſt ſicut l d ad d k, ſic d x ad x b: erit etiam è conuerſo & iungendo, ſicut k l ad l d, ſic b d ad d x. ſicut igitur quadratum k l ad quadratum l d, ſic quadratum b d ad quadratum d x. Rurſus quoniam eſt ſicut l x ad d x, ſic utraq; ſimul k b, b x, ad b x. diſiungendo erit ſicut l d ad d x, ita k b ad b x. & ponatur b f æqualis ipſi k b. quod autẽ f extra r cadet, manifeſtũ eſt. & eſt ſicut l d ad d x, ita f b ad b x. quare & ſicut d l ad l x, ſic b f ad f x. Cum autem proportio r x ad l x ſit data, erit etiam r l ad l x proportio data. Quoniam igitur proportio r l ad l x compotuitur ex proportione quam r l habet ad l d, & d l ad l x. uerũ ſicut r l ad l d, ſic quadratum d b ad quadratum d x. ſicut autem d l ad l x, ſic b f ad f x. igitur proportio r l ad l x coniungitur ex proportione, quam habet quadratũ b d ad quadratũ d x, & ex b f ad f x. Fiat autem ſicut r l ad l x, ſic b f ad f h. Proportio autẽ r l ad l x erat data: quare & proportio b f ad f h erit data. Linea uero b f eſt data, nam eſt æqualis ſemidiametro: igitur & f h linea data erit, & proportio b f ad f h compotuitur ex proportione quadrati b d ad quadratum d x, & ex b f ad f x. ſed b f ad f h proportio componitur ex proportione b f ad f x, & ex f x ad f h. ſublata cõmuni, quę eſt b f ad f x: reliquum erit igitur, ſicut quadratum b d quod eſt datum ad quadratum d x, ſic x f ad f h quod eſt datum. & eſt f d linea data iuxta datã d b, quam diuidere oportet ſecundum x, & facere ut x f ad f h datam ſit ſicut quadratum b d datum ad quadratum d x. Hoc autem non habet determinationem ſimpliciter dictam, ſed ijs quæ iſtic requiruntur poſitis: hoc eſt poſito hoc, duplam eſſe d b ipſius b f, & hoc, maiorem eſſe f h quàm b b, tanquam per reſolutionem, nõ habet determinationem. Problema uero tale eſt. Datis duabus lineis rectis d b, b f, quarũ d b ſit dupla ipſius b f, & ſigno h in b f poſito, diuidere ipſam d b in puncto x, & facere quod ſicut quadratum b d ad quadratum d x, ſic f x ad f b. Vtraq; uero hæc in fine reſoluentur & componentur.

Compotuitur autem problema hoc modo. Eſto data proportio, quam p maior habeat ad s minorem, & detur quædam ſphæra, & diuidatur plano per cen-

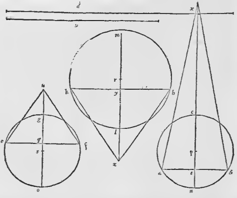


trum ducto, & ſit ſectio a b c d circulus, cuius diametros ſit b d, centrum k, & ipſi k b ponatur æqualis b f, & diuidatur b f in puncto h, ita ut ſit h f ad h b, ſicut p ad

s. &

s. & etiam diuidatur b d in puncto x, ita ut sit x f ad h f, sicut quadratū b d ad quadratū d x. Et per punctum x educatur planum, erectū super b d secundū angulos rectos. Dico itaq;, quod planū illud diuidit sphęram, ita ut maior portio ad minorem sic se habeat, uti p ad s. Factū sit enim, ut sicut utraq; simul k b, b x ad b x, sic l x ad d x. Sicut aūt utraq; simul k d, d x ad x d, ita r x ad x b. Et iungantur a l, l c, a r, r c. est igitur secundū apparatum ita, sicut in resolutione ostendimus, id quod sub r l, l d continetur, æquale quadrato l k: & sicut k l ad l d, ita b d ad d x. Quare sicut quadratum k l ad quadratum l d, sic quadratum b d ad quadratum d x. & quia id quod sub r l, l d continetur, est æquale quadrato l k, erit sicut r l ad l d, ita quadratum l k ad quadratum l d. erit igitur, & sicut r l ad l d, sic quadratum b d ad quadratum d x: hoc est, x f ad f h. & quoniam sicut utraq; simul k b, b x ad b x, sic l x ad x d. æqualis est autē k b ipsi b f, erit igitur & sic f x ad x b, sicut l x ad x d. & euertēdo, sicut x f ad f b, ita x l ad l d. quare & sicut l d ad l x, sic b f ad f x. & quoniam est sicut r l ad l d, sic f x ad f h. sicut autem d l ad l x, sic b f ad f x. & per æquale in proportionalitate indirecta, sicut r l ad l x, ita b f ad f h. sicut ergo l x ad x r, sic f h ad h b. sicut autem f h ad h b, sic p ad s. quare sicut l x ad x r: hoc est, a l c conus ad a r c conum: hoc est a d c portio sphęræ, ad a b c portionem sphæræ, sic p ad s.

DAtis duabus sphæræ portionibus, tertiam constituere portionem, quæ alteri earum quæ datæ sunt similis sit, alteri uero æqualis. Esto duæ portiones sphæræ datæ a b c, e f g: & sit basis ipsius portionis a b c, circulus circa diametrum



a b constitutus: eius uero uertex sit c pūctum: basis uero e f g, sit circulus circa diametrum e f constans: uertex g punctū. Oportet itaq; portionem sphæræ inuenire, quæ sit æqualis ipsi a b c portioni, & ipsi e f g similis. Esto inuenta sit, & ponatur esse h k, & sit eius basis circulus circa h k diametrum conuolutus, uertex uero l punctum. Sint etiam circuli in sphæris a n b c, b m k l, e o f g: diametri uero corū

ad

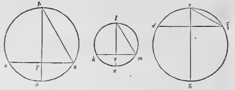
ad angulos rectos basibus portionum instituti sint c n, l m, g o. & sint centra p, r, s. & factum sit sic, ut utraq; simul p n, n t ad n t, ita x t ad t c. sicut autē utraq; simul r m, m y ad m y, sic z y ad y l. & sicut utraq; simul s o, o q ad o q, sic u q ad q g. et intelligantur coni, quorum bases sint circuli circa diametros a b, h k, e f constituti, uertices uero x z u puncta. conus itaq; a b x, æquatur portioni a b c sphæræ. conus uero h z k, æquatur ipsi h k l. conus demum e u f, æquatur ipsi e g f. hoc enim demonstratum est antea. Et quoniam sphæræ portio a c b equatur h l k portioni, conus a x b erit æqualis h z k cono. æqualiū autem conorum bases sunt altitudinibus mutuæ. Circulus igitur circa diametrum a b, ad circulum circa diametrum h k, est sicut z y ad x t. sicut autem circulus ad circulum, sic quadratum a b ad quadratum h k. Sicut ergo quadratum a b ad quadratum h k, sic z y ad x t. Et quoniā similis est e f g portio portioni h l k, conus igitur e u f similis est cono z h k. Hoc autem ostendetur. Est igitur sicut u q ad e f, sic z y ad h k. proportio autem ipsius u q ad e f data est: igitur proportio z y ad h k erit data. Esto eadem x t ad d, & x t data est, erit & d data. & quoniam est sicut z y ad x t, hoc est quadratū a b ad quadratū h k, sic h k ad d. Ponatur id quod sub a b & 9 continetur, æquale esse quadrato h k, erit igitur quadratum a b ad quadratum h k, sicut a b ad 9. Ostensum est aūt, quod sicut quadratum a b ad quadratū h k, sic h k ad ipsam d: & permutatim, sicut a b ad h k, sic 9 ad d. Sicut aūt a b ad h k, sic k h ad 9. propterea quod quadratum h k æquatur ei quod fit ex a b in 9. sicut ergo a b ad h k, ita h k ad 9, & 9 ad d. Inter duas igitur datas duæ mediæ in proportione continua sunt positæ: hoc est inter a b & d, sunt h k, & 9.

Componetur autem iam propositum hoc pacto. Esto portio a b c, cui uolumus statuere æqualem portionem. & esto e f g portio, cui similem oportet statuere. & sint maximi in sphæris circuli a b c n, e f g o: quorum diametri sint c n, g o: & centra p, s. & fiat, ut sicut utraq; simul p n, n t ad n t, sic x t ad t c. sicut aūt utraq; simul s o, o q ad o q, sic u q ad q g conus igiť x a b, est ęqualis portioni a b c sphęræ. conus uero f u e, æquať portioni e g f. fiat sicut u q ad e f, sic x t ad d. & inter duas lineas rectas datas a b, & d duæ mediæ in continua proportione sumantur h k & 9: ita ut sicut a b ad h k, ita h k ad 9, & 9 ad d. & similiter h k circulo portio statuatur h l k, similis e f g portioni circuli, & perficiatur circulus, & sit eius diametros l m, & intelligatur sphæra cuius maximus circulus sit l h m k, centrū r. & secūdum h k planum transeat erectum ad angulos rectos super l m, erit iam portio sphæræ uersus l similis e f g portioni sphæræ, cum circulorum portiones sint similes. Dico autem, quod etiam est æqualis a b c portioni sphæræ. fiat enim sicut utraq; simul r m, m y ad m y, sic z y ad y l. igitur conus z h k, æquatur portioni sphæræ h k l. & quoniam conus z h k similis est cono f u e, est ergo sicut u q ad e f, hoc est x t ad d, sicut z y ad h k: & permutatim, & conuersim. sicut igitur z y ad x t, sic h k ad d. Cum autem proportionales sint a b, h k, 9, d erit sicut quadratum a b ad quadratum h k, sic h k ad d. sicut autem h k ad d, sic z y ad x t. ergo sicut quadratū a b ad quadratum h k, hoc est circulus circa diametrum a b constitutum, ad circulum circa diametrū h k cōstantem, sic z y ad x t. conus igitur a x b æquatur cono h z k. quare & a b c portio sphæræ est æqualis h k l portioni sphæræ. Igitur a b c portioni datæ æqualem constituimus h l k portionem sphæræ, quæ etiam alteri e f g similis existit.

6 DVabus portionibus, siue eiusdem siue non eiusdem sphæræ datis, tertiam inuenire sphæræ portionem, quæ quidem alteri datarum portionum sit similis, superficiem uero habeat alterius portionis superficiei æqualem. Sint sphæricæ portiones secundum a b c, d e f circumferentias sumptæ. & esto portio, cui similem inuenire oporteat secundum a b c circumferētiam sumpta. ea uero cuius superficies æqualis esse debeat superficiei portionis inueniendæ, sit secundum

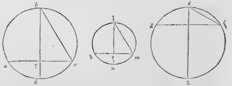
d e f

d e f circumferentiam. & ponatur factũ quod quæritur, & esto k l m portio sphæræ ipsi a b c portioni similis. superficiem quoq; habeat superficiei d e f portionis æqualem: & intelligantur centra sphærarum, & per ea transeãt plana erecta per-



pendiculariter super bases portionum. & in sphæris quidem sint sectiones hæ k l m n, a b c h, e f g d maximi circuli, & in basibus portionum sint k m, a c, d f diametri. sphærarum uero diametri sint super k m, a c, d f perpendiculariter erectæ. sintque l n, b h, e g: & coniungantur l m, b c, e f. & quoniam superficies portionis sphæræ k l m æqualis est superficiei d e f portionis, æqualis erit ergo circulus cuius semidiametros sit ipsi l m æqualis, circulo cuius semidiametros sit æqualis e f. Superficies enim dictarum portionũ ostensæ sunt esse æquales circulis, quorum semidiametri sint æquales lineis, quæ à uerticibus portionum ad bases earum deducantur. Quapropter l m erit æqualis e f. Cum autem k l m sit similis portioni a b c, erit sicut l r ad r n, sic b p ad p h. & cõuersim, & coniungendo, sicut n l ad l r, sic h b ad b p. uerum & sicut r l ad l m, sic b p ad b c. nam trianguli similes existũt. Sicut ergo n l ad l m, hoc est ad e f, sic h b ad b c: & permutatim. proportio uero e f ad b c est data. nam utraq; earum est data. igitur proportio l n ad b h data erit. sed b h est data: quare & l n, & sphæram quoq; datam esse necesse est.

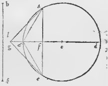
Componetur autem propositum hoc modo. Sunto duæ portiones sphæræ datæ a b c, d e f. & sit a b c, cui similem d e f, cuius superficiei æqualem oporteat constituere superficiem. & eadem parentur omnia, quæ in resolutione parata fuẽ



runt. & fiat, sicut b c ad e f, sic b h ad l n. & circa diametrum l n describatur circulus, & intelligatur sphæra cuius sit maximus circulus l k n m. & diuidatur n l in puncto r, ita ut sit sicut h b ad b p, sic n l ad l r. & secundum r diuidatur superficies plano super l n perpẽdiculariter erecto, & ducatur linea l m. portiones igitur circulorum, quæ sunt super k m, a c lineas rectas, sunt inter se similes: quare & sua

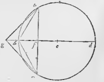
rum ſphærarum portiones ſimiles erunt. & quoniam eſt ſicut h b ad b p, ſic n l ad l r. etenim ſunt ſecundum diuiſionem. Sed & ſicut b p ad b c, ſic r l ad l m. ergo & ſicut h b ad n l, ſic b c ad e f. erit igitur e f ipſi l m æqualis. quare & circulus cuius ſemidiametros eſt e f, æquabitur circulo cuius ſemidiametros eſt l m. & circulus quidem cuius ſemidiametros eſt e f, æquatur ſuperficiei portionis d e f. circulus autem cuius ſemidiametros eſt l m, æquatur ſuperficiei portionis k l m. hoc enim in primo libro fuit oſtenſum. Superficies igitur k l m portionis ſphæræ, ſimilis eſt a b c, & æqualis ſuperficiei d e f.

7 A Data ſphæra portionem plano ſic abſcindere, ut ipſa portio eã quæ propoſita ſit proportionem ſeruet ad conum, qui baſim habeat eandem cum portione, & altitudinem æqualem. Eſto iam data ſphæra, & maximus in ea circulus a b c d, diametros eius b d. oportet iam ſphæram plano ſecare ipſo a c, ita ut ſit a b c portionis ſphęræ ad conum a b c, proportio eadem proportioni datæ. Factum ſit hoc, & ſit centrum ſphæræ e, & ſit ſicut utraq; ſimul e d, d f ad d f, ſic g f ad f b. conus igitur a c g eſt æqualis portioni a b c. Proportio igitur coni a g c, ad conum a b c eſt data. quare & proportio g f ad f b data erit. Sicut autem f g ad f b, ſic utraq; ſimul e d, d f ad d f. igitur proportio utriuſque ſimul e d, d f ad d f eſt data: quare et e d ad d f data, quare & d f data erit. ſimiliter a c data. & quoniam utraq; ſimul e d, d f ad d f



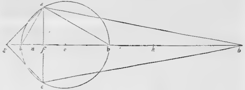
maiorem habet proportionẽ quàm utraq; ſimul e d, d b ad d b, & eſt utraq; ſimul e d, d b ter ipſa e d. ipſa uero b d, bis e d: habebit utraque ſimul e d, d f ad d f maiorem proportionẽ, quàm ſicut tria ad duo. proportio uero utriuſq; ſimul e d, d f ad d f. eſt eadem proportioni datæ. Oportet igitur proportionem datam in compoſitione maiorem eſſe quàm tria ad duo.

Componetur autem propoſitum hoc pacto. Eſto data ſphæra, & maximus in ea circulus a b c d, diametros uero b d, centrum e. proportio autem data ſit h k ad k l, maior ſcilicet quàm tria ad duo. ſicut autem tria ad duo, ſic utraq; ſimul e d, d b, ad d b. & ideo h k ad k l maiorem habet proportionẽ, quàm utraq; ſimul e d, d b ad d b. diuidendo igitur h l ad l k maiorem proportionẽ habet, quàm e d ad d b. & fiat ſicut h l ad l k, ſic e d ad d f, & per ipſum f perpendicularis a f c ipſi b d ducatur, & per lineam a c ducatur planum ad b d perpẽdiculare. Dico igitur, quod a b c portio ſphæræ ad a b c conum, habet eandem proportionem datæ proportioni h k ad k l. Factum ſit enim, quod ſicut utraq; ſimul e d, d f ad d f, ſic g f ad f b. conus igitur c a g, æquatur portioni ſphæræ a b c. & quoniam eſt ſicut h k ad k l, ſic utraque ſimul e d, d f ad d f: hoc eſt g f ad f b, hoc eſt a g c conus ad a b c conum. conus uero a g c æquatur portioni ſphæræ. Sicut igitur a b c portio ad a b c conum, ſic h k ad k l.



8 SI ſphæra quæuis à plano non per centrum ducto ſecetur, maior portio ad minorem habere probatur proportionem minorem, quàm ſit ea proportio duplicata, quam habet ſuperficies maioris ad ſuperficiem minoris portionis, maiorẽ uero

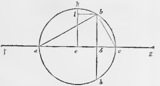
uero quàm sit proportio, quæ sit sesquialtera ad dictam proportionem. Esto sphæra, & maximus in ea circulus a b c, & diametros b d & secet plano per a c ducto, & erecto super a b c d circulo, & sit maior sphæræ portio a b c. Dico itaq;, quod



portio a b c ad a d c portionem, minorem habet proportionem, quàm sit ea proportio duplicata, quam habet superficies maioris portionis ad superficiem minoris. maiorem uero quàm sit proportio sesquialtera ad eandem. Iungantur b a, a d: & sit centrum e, & fiat ut sicut utraq; simul e d, d f ad d f, ita h f ad f b. sicut autem utraq; simul e b, b f ad b f, sic g f ad f d. & intelligantur coni basem habentes circulum, qui est circa diametrum a c: uertices uero puncta h, g. & conus a h c, æqualis erit portioni sphæræ a b c. conus uero a c g, ipsi a d c æqualis. & est sicut quadrati b a ad quadratum a d, sic superficies portionis a b c ad supetficiem a d c portionis. hoc enim antea scriptũ est. Ostendendum, quòd maior portio sphæræ ad minorẽ habet minorẽ proportionem, q̃ sit ea proportio duplicata, quam superficies maioris portionis habet ad superficiẽ minoris portionis. Dico quòd a h c conus, ad a g c conũ, hoc est f h ad f g, habet minorem proportionẽ, quàm est illa duplicata, quam habet quadratum b a ad quadratum a d, hoc est b f ad f d. Et quoniam est sicut utraq; simul e d, d f ad d f, sic h f ad f b. sicut autem utraq; simul e b, b f ad b f, sic f g ad f d: erit & sicut b f ad f d, ita h b ad b e. nam b e est æqualis ipsi d e. hoc enim in superioribus simul ostensum fuit. Rursus quoniam sicut utraque simul e b, b f ad b f, sic g f ad f d. Esto ipsi b e æqualis b k. manifestum nãq; est, quòd h b est maior b e: quoniam & b f maior est f d. & erit sicut k f ad f b, sic g f ad f d. sicut autem f b ad f d, ita ostensum est esse h b ad b e. æquatur autem b e ipsi k b. sicut ergo h b ad b k, sic k f ad f g. Et quoniã b f ad f k minorem proportionem habet, quàm h b ad b k: sicut autem h b ad b k, ostensum est ita esse k f ad f g. igitur h f ad f k minorem haber proportionem, quàm k f ad f g. minus ergo est quod continetur sub h f, f g, quadrato f k. Id igitur quod cõtinetur sub h f, f g, ad quadratum f g minorem habet proportionem, quàm quadratum k f ad quadratum f g. Quadratum uero k f ad quadratum f g, habet eam proportionem duplicatam, quæ est k f ad f g. igitur h f ad f g minorem proportionem habet, quàm est ea duplicata quæ est k f ad f g. Hoc autem est quod quærebamus. Et quoniam b e est æqualis ipsi d e, minus est igitur id quod sub b f, f d cõtinetur, eo quod sub b e, e d continetur. ergo f b ad b e minorem habet proportionem, quàm e d, ad d f, hoc est h b ad b f. quadratum igitur f b, minus est eo quod fit ex h b in b e. Sit itaq; quadratum b n æquale ei quod sub h b, b e. est igitur sicut h b ad b k, sic quadratum h n ad quadratum n k. quadratum autem h f ad quadratum f k maiorem habet proportionem, quàm quadratum h n ad quadratum n k. quadratum ergo h f, ad quadratũ f k maiorem proportionẽ habet, quàm b b ad b k. hoc est, quàm h b ad b e. Hoc

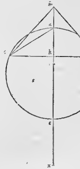
idem eſt, quàm k f ad f g. ergo h f ad f g maiorem habet proportionem, quàm ſit ſeſquialtera ad proportionem k f ad f g. hoc enim perficit quod intendimus. et eſt ſicut h f ad f g, ſic a h c conus ad a g c conum: hoc eſt portio a b c ad portionẽ a d c. ſicut autem k f ad f g, ſic b f ad f d: hoc eſt quadratum b a ad quadratum a d: hoc idem eſt ſicut ſuperficies portionis a b c a d ſuperficiẽ a d portionis. ſed maior portio ad minorem habet minorem proportionem, quàm ſit ea duplicata, quam habet ſuperficies maioris portionis ad ſuperficiem minoris portionis, maiorem uero quàm ſit proportio ſeſquialtera ad eandem.

Aliter. Eſto ſphæra, & maximus in ea circulus a b c d, diametros autem a c, centrum uero e. & ſeceturplano ſecundum b d erecto ſuper a c. Dico quod maior portio d a b, ad minorem b c d, habet minorem proportionem quàm ſit ea duplicata, quam habet ſuperficies a d b portionis ad ſuperficiem b c d portionis: maiorem uero quàm ſit proportio ſeſquialtera ad eandem. Iungantur enim a b, b c. Proportio autem ſuperficiei ad ſuperficiem eſt, ſicut circuli, cuius eſt ſemidiametros a b, ad circulum cuius ſemidiameter eſt b c. hoc eſt h a ad a c. ponatur autem utraq; a f, c g eſſe æqualis ipſi ſemidiametro. proportio autem b a d, portionis ad b c d, componitur ex proportione b a d portionis ad conum, cuius baſis ſit circulus circa b d diametrũ deſcriptus, uertex uero a punctum: & ea quam habet idem conus ad conum habentem eandẽ baſem, uerticem uero c punctũ: & ex ea quam habet dictus conus ad b c d portionem. ſed proportio b a d, portionis ad b a d conũ eſt, ſicut g h ad h c. coni uero ad conum eſt ſicut

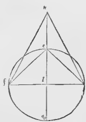


a h ad h c. coni autem b c d ad portionem b c d, eſt ſicut a h ad h f. At uero proportio cõpoſita ex proportione g h ad h c, & ex a h ad h c, eſt ſicut eius quod fit ex g h in a h, ad quadratum h c. eius autem quod fit ex g h in a h ad quadratum h c, cum ea quæ eſt a h ad h f, eſt ſicut ea quæ eſt eius quod fit ex g h, in quadratum h a, ad quadratũ h c in h f. proportio aũt eius quod fit ex g h in quadratũ h a, ad id quod fit ex quadrato h c in g h, eſt ſicut quadratum h a ad quadratum h c. quod igitur fit ex quadrato h a in h g, ad id quod fit ex quadrato c h in h f, minorem proportionẽ habet, quàm proportio quadrati a h ad quadratum h c. Quoniam enim eſt maius quadratũ c b in f h, quàm quadratum c h in h g: quoniam maior eſt h f ipſa b g. Dico igitur, quod maior portio habet ad minorem proportionem, maiorem quàm ſeſquialteram proportioni ſuperficiei ad ſuperficiem. Portio enim ad portionem oſtenſa eſt habere eam proportionem, quam habet quadratum a h, ductum in h g, ad quadratum h c in h f. proportioni autem ſuperficierũ ſeſquialtera eſt proportio cubi a b, ad cubum b c. Dico iam, quòd quadratum a h in h g, ad quadratũ c h in h f maiorem habet proportionẽ, quàm cubus a b ad cubum b c: hoc eſt cubus a h ad cubum h b, hoc eſt quadrati a h ad quadratum h b, et a h ad h b. proportio autem quadrati a h ad quadratum b h, aſſumens ſimul proportionem a h ad h b, eſt ſicut quadrati a h, ad id quod fit ex c h in h b. proportio autẽ quadrati a h, ad id quod fit ex h b in b c, eſt ſicut quadrati a h in h g, ad id quod fit ex h b in h c, ductum in h g. Dico iam quòd quadratũ a h, in h g, ad quadratum c h in h f maiorem proportionẽ habet, quàm quadratum a h, ad id quod fit ex b h in h c: hoc eſt quadratum a h in h g, ad id quod continetur ſub b h, h c, ductũ in h g. Eſt igitur oſten-

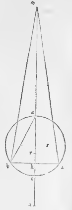
ostendēdum, quod quadratum h c in h f minus producit, quàm id quod sub b h, h c continetur, ductum in g h. quod idem est ac si demonstremus, quòd quadratū h c ad id quod sub b h, h c cōtinetur, minorem habet proportionem quàm g h ad h f. Oportet itaque ostendere, quod g h ad h f maiorem habet proportionē, quàm c h ad h b. Ducatur ab ipso b perpendicularis super ipsam g f, quæ sit b d. oportet itaq; ostendere, quòd g h ad h f maiorem proportionem habet, quàm c h ad h b. Est autem h f æqualis utriq; simul a h, k e, quare ostēdere oportet, quòd g h ad h f, hoc est ad utrāq; simul h a, k e maiorem habet proportionē, quàm c h ad h b. sublata igitur c h ab ipsa g h, & ab ipsa k e sublata e l, æquali b h oportebit ostēdere, quòd reliqua c g ad reliquam utramq; simul a h, k l maiorem habet proportionē, quàm c h ad h b, hoc est h b ad h a, hoc est l e ad h a. & permutatim, quòd k e ad e l maiorem habet proportionem, quàm utraque simul k l, h a ad h a: & diuidendo k l ad l e habet maiorem proportionem, quàm k l ad h a. quare minor est l e, quàm h a.



Earum sphæræ portionum, quæ æqualibus superficiebus continentur, medietas sphæræ maxima existit. Esto maximus in sphæra circulus a b c d, cuius diameter a c. Et esto alia sphæra, cuius maximus circulus e f g h: eius diameter e g. & secentur ambæ plano, altera per centrum ducto, altera non per centrum ducto. & sint plana secantia erecta super diametros a c, e g: & sectæ sint secundum lineas d b, f h. Est igitur portio sub f e h superficie cōtenta, dimidia sphera: portionū uero quæ secundum b a d circumferentiam habentur in alia figura, ad a punctum, altera est maior dimidia sphæra, altera in alia figura minor dimidia sphera. Esto aūt superficies maioris portiōis unius sphęræ superficiei dimidiæ sphęræ æqualis, quæ est ad circumferentiam f e h. Dico igitur, quod maior est dimidia sphæra, quæ est ad circumferentiam f e h, quàm portio quæ est secundum b a d circumferentiam. Quoniam igitur superficies dictarum portionū positæ sunt æquales, manifestū est quod b a linea recta est æqualis e f rectæ. nam ostensum est, quod cuiuscunq; portionis sphæræ superficies æqualis sit circulo, cuius semidiametros sit æqualis lineę rectæ, ductæ à uertice portionis ad circumferentiam circuli, qui est basis portionis. Et quoniam b a d circumferentia maior est dimidio circulo in altera figura, in qua est s pūctum: manifestum igitur est, quod b a minor est quàm dupla in potētia ipsius a k, semidiametro autem maior quàm dupla in potentia. Esto etiam quòd c x sit æqualis semidiametro circuli a b d, & quā pro



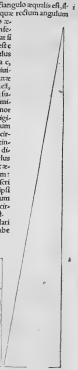
portionem habet c x ad c k, hanc habeat m a ad a k. A' circulo uero circa diametrum b d descripto, erigatur conus, cuius uertex m punctum. conus igitur iste æquatur portioni sphæræ, quæ est ad circumferentiam b a d. Esto ipsi e l æqualis ipsa e n, & à circulo circa diametrum h f constituto erigatur conus, cuius uertex sit punctum n. & iste quoque æqualis est dimidiæ sphæræ, quæ est secundum h e f circumferentiam. id autem quod continetur sub a r, r c, maius est contento sub a k, k c: propterea quod habet latus minus suum minore latere alterius maius. quadrato uero a r æquatur id quod continetur sub a k, c x. nam dimidium est quadrati a b. igitur utrumque simul est maius utroque simul. Quod igitur continetur sub c a, a r, maius est contento sub x k, k a. Ei uero quod continetur sub x k, k a, æquatur id quod continetur sub m k, k c. quare quod continetur sub c a, a r, maius est eo quod continetur sub m k, k c. quare maiorem habet proportionem c a ad k c, quàm m k ad a r. quam uero proportionem habet a c ad k c, eãdem quadratum a b ad quadratum b k. Manifestum igitur, quod dimidium quadrati a b, quod est æquale quadrato a r, ad quadratum b k maiorem habet, quàm m k ad duplam ipsius a r, quæ æquatur lineæ l n. maiorem ergo proportionem habet circulus circa diametrum h f constitutus, ad circulum circa diametrum b d descriptum, quàm m k ad l n. quare minor est conus, qui basem habet circulum circa diametrum h f constantem, uerticem uero n punctum, eo cono qui habet basem circulum circa b d constitutum, uerticem autem m punctum. Vnde manifestum quoque, dimidiam sphæram, quæ secundum e f h circumferentiam constat, maiorem esse portione, quæ secundum b a d circumferentiam posita est.



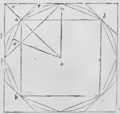
ARCHIMEDIS DE SPHAERA ET Cylindro Libri secundi Finis.

ARCHIMEDIS CIRCVLI DIMENSIO.

QVILIBET circulus triangulo rectangulo æqualis est, illi uidelicet cuius latus alterum eorum quæ rectum angulum ambiunt, sit dicti circuli semidiametro æqualis, alterum eiusdem circuli circumferentiæ. Esto a b c d circulus, sic habeat sicut proponitur. Dico, quod æqualis est e triangulo. Et si fieri potest, esto circulus dicto triangulo maior, & inscribatur circulo quadratum a c, & diuidantur arcus per æqualia, ducanturq; ad puncta diuisionum lineæ rectæ, fiantq; hoc modo intra circulum figuræ rectilineę, donec inciderimus in aliquam figuram rectilineā, quæ sit maior dicto triangulo: & ponatur centrum n. & sit super unum latus figuræ perpendicularis n x. igitur n x est minor latere trianguli. Est etiam linea claudens figuram, minor reliqua trianguli linea, cum sit minor circuli limbo. Dicta igitur figura minor est dicto triangulo: quod quidem absurdum est. Esto item si fieri potest, sit triangulo circulus minor, & circulo circumscribatur quadratum, & arcus inter puncta cōtingentiæ circuli interclusi in æqua diuidantur, & per puncta diuisionum ducantur lineę contingentes. rectus igitur angulus à lineis o a r ambitur, quare o r erit maior r m. nā r m, r a sunt æquales, & triāgulus r o p est maior figura o f a m q; dimidium: quare & maior dimidio eius partis quadrati circulo circumscripti, quæ est ex parte o. Sumptæ sint itaq; portiones similes ipsi p f a, quæ sint minores eo, quo triangulus e superat circulum a b c d: atque idcirco ipsa quoque figura rectilinea circulo circumscripta, minor erit triangulo e. quod item absurdum est. nam maior esse probatur: quia n a æqualis est perpendiculari trianguli, limbus uero dictæ figuræ base trianguli maior habetur. quare circulus dicto triangulo erit necessariò æqualis.

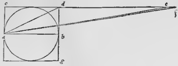


PRoportio circuli cuiuscūque ad quadratū suæ diametri est, sicut undecim ad quatuordecim. Esto circulus, cuius diametrus a b & circumscribatur ei quadratum c g: & ipsa c d dupla sit d e: ipsius etiam c d, sit e f pars septima. Quoniam igitur c e ad c d eam habet proportionē,

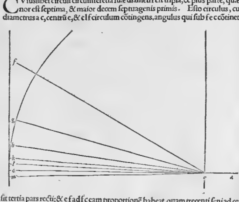


quam uicenum primum ad septenum tenet: i c d uero ad e f etiam, quam septenum

num ad unum. e f igitur ad c d, uti uicenũ secundum ad septenum habebit. Verum ipsius a c d trianguli quadruplum est c g. quadratum & triangulus a c d f est ipsi circulo æqualis, cum c d perpendicularis sit semidiametro æqualis, & basis diametro sit tripla, & propè sesquiseptima, uti ostendetur. Circulus igitur ad quadratum c g proportionem habet eam, quam undenus ad quatuordenum.



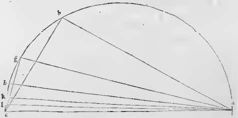
3 CViuslibet circuli circumferẽtia suæ diametri est tripla, & plus parte, quæ minor est septima, & maior decem septuagenis primis. Esto circulus, cuius diametrus a c, centrũ e, & c l f circulum cõtingens, angulus qui sub f e c cõtinetur,



sit tertia pars recti: & e f ad f c eam proportionẽ habeat, quam trecenti seni ad centum quinquagenos trinos. f c uero ad c e habet proportionem, quam ducenti sexageniquini ad centũ quinquagenos trinos. Diuidatur itaq; angulus f e c, in æqualia, ducta linea e g. Est igitur sicut f e ad e c, ita f g ad g c: & permutatim, & componendo, sicut utraq; simul f e, e c ad f c, ita e c ad c g. quare e c ad c g maiorem habet proportionem, quàm quingenti septuageniprimi ad centum quinquagenos trinos. e g ergo ad g c eam potentia proportionem habet, quam trecenta sex & uiginti milia unũ & quadraginta, ad tria & uiginti milia quadringenta & nouem. longitudine uero sicut quingenta unum & septuaginta ad centum tria & quinquaginta. Rursus secetur in duo æqualia angulus g e c, ducta linea e h. Eadem itaq; ratione e c ad c h maiorem habet proportionem, quàm mille centum duo & sexaginta ad centum tria & quinquaginta. Igitur h e ad h c maiorem habet proportionem, quàm mille centũ septuaginta duo ad centum tria & quinquaginta. Item in duo æqua diuidatur angulus h e c, ducta linea e k. igitur e c ad c k maiorẽ habet

habet proportionẽ, quàm duo milia trecenta quatuor & triginta & quarta ad centum tria & quinquaginta. ergo e k ad c k maiorem habet, quàm duo milia trecenta nouem & triginta & quarta ad centum tria & quinquaginta. Item in duo æqua diuidatur angulus k e c, ducta linea e l. igitur e c ad l c habet maiorem proportionẽ, quàm quatuor milia quadringenta tria & septuaginta, ad centum tria & quinquaginta. Quoniam igitur angulus f e g, cum sit tertia pars anguli recti, quater diuisus est in æqualia, erit angulus l e c anguli recti pars quadragesimaoctaua. Ponatur itaq; ipsi angulo l e c æqualis angulus c e m. Angulus ergo l e m erit recti pars uigesimaquarta, quare linea l m est latus figuræ multorum angulorum circa circulum descriptæ, quæ sex & nonaginta lateribus concluditur. Cum igitur sit ostensum, e c habere ad c l maiorem proportionem, quàm quatuor milia sexcẽta tria & septuaginta & semis, ad centum tria & quinquaginta. Sed et ipsius e c dupla est a c, ipsius uero l c dupla est l m. habebit ergo a c, ad limbum ipsius figuræ sex & nonaginta laterum, proportionem maiorem, quàm quatuor milia sexcenta tria & septuaginta & semis, ad quatuordecim milia sexcenta & octo & octuaginta. & est tripla, & insuper habens sexcentas septem & sexaginta partes & semis, ipsorum quatuor milium sexcentorum trium & septuaginta & semis: quæ quidem sunt dicti numeri minus septima parte. quare figuræ multorum angulorum circulo circumscriptæ, latera simul iuncta diametro circuli sunt tripla, & insuper partem parte septima diametri minorem habent. Quare multo magis limbus circuli cum sit diametro sua plus quàm triplus, minorem tum parte septima super triplicatam diametrum addet.

Esto item circulus, cuius diametrus a c, angulus uero b a c, sit tertia pars anguli recti. Igitur a b ad b c minorem habet proportionem, quàm trecenta quatuor



& quinquaginta ad septingenta octuaginta. a c uero ad c b habet eam quam mille quingenta sexaginta ad septingenta octuaginta. Secetur in duo æqua b a g, sit æqualis angulo g c b: sed et angulo g a c, & angulus g c b æqualis angulo g a c. & communis est angulus rectus a g c, & tertius angulus g f c erit tertio angulo a c g æqualis. quare triangulus a g c est æquiangulus triangulo c g f. erit ergo sicut a g ad g c, sic g c ad g f, & ita a c ad c f. Verum sicut a c ad c f, ita & utraq; simul c a, a b ad b c. & sicut utraq; simul c a, a b ad b c, sic a g ad g c. Propter hoc itaque a g, ad g c minorem habet proportionem, quàm duo milia nongenta undecim ad septingẽta octuaginta, uerum a c ad c g minorem habet proportionem, quàm tria milia

 trede-

tredecim ad ſeptingenta octuaginta. Diuidatur item in duo æqua angulus c a g, ducta linea a h. igitur a h ad h c eadem ratione minorē proportionē habet quàm quinque milia trecenta quatuor & uiginti & quinta & quarta ad ſeptingenta octuaginta, uel quam mille octingenta quatuor & uiginti ad ducenta quinquaginta. nam utraq; utrinq; quare a c ad c h minor, quàm mille octingenta octo & triginra & nona ad ducenta quadraginta. Item angulus h a c in duo æqua diuidatur

Item k a c angulus diuidatur per lineam a l: ergo a l ad l c minorem hab et proportionē quàm duo milia ſedecim & ſexta ad ſex & ſexaginta. ipſa uero a c ad c l minorem quàm duo milia decem & ſeptem & quarta, ad centum & ſex & ſexaginta. Conuerſim uero limbus figuræ multorum angulorum ad diametrum maiorem habet proportionem, quàm ſex milia trecenra & unū & ſexta ad duo milia decem & ſeptem & quartam. Sunt illa duobus milib. decem & ſeptē & quarra maiora, quàm tripla ſuper decies parnentia ſeptuageſimas primas. igitur limbus figuræ ſex & nonaginta lateribus concluſæ circulo inſcriptæ, maiot eſt diametro circuli, quàm tripla ſuper decies partiens ſeptuageſimas primas. quare multo magis circumferentia circuli maior erit ſua diametro, quàm tripla ſuper decies partiens ſeptuageſimas primas. Vnde colligitur, circuli circumferentiam ſua diametro maiorem eſſe quàm triplam ſeſquioctauā, minorē uero quàm triplā ſeſquiſeptimā.

ARCHIMEDIS DE CIRCVLI DImenſione Finis.

ARCHIMEDIS DE CONOIDALIBVS ET SPHAEROIDIBVS figuris inuenta.

ARCHIMEDES DOSITHAEO recte agere.

RELIQVORVM theorematum demonſtrationes, quas in his quæ ſuperius ad te miſſa ſunt uoluminibus, nō habebas, tibi nunc in hoc libro conſcriptas mitto. Nonnullas preterea quorundam aliorum, quæ poſtea ſunt inuenta. quæ cū ſæpe prius in manus adduxiſſem, tentaſſemq; inſpicere & contemplari, ueritus ſum maxime, ne difficilem admodum & penitus indeprehenſibilem haberent explicationem. Atque idcirco cum cæteris tibi data non fuerunt ipſa propoſita. Verum poſteaquam ea diligentiori ſtudio inueſtigare cœpiſſem, quæ prius dubia & perobſcura uidebantur, omnia cōpræhendi. Erant autem reliqua quidem priorum theorematum de rectangula figura conoidali propoſita. Quę uero nuperrimè ſunt inuēta circa obtuſianguli figuram conoidalem, & etiam ſphæroidas figuras uerſantur: quarum quaſdam oblongas, quaſdam prolatas libet appellare. De rectangulo itaq; conoidali hæc ſubiecta fuerant.

Si rectanguli coni ſectio quieſcente diametro circumferatur, donec in eū unde duci cœperat locum redierit figura, quæ à rectanguli coni ſectione cōpræhendetur, conoidale rectangulum uolumus appellari, & eius axem diametrum quieſcentem, uerticem uero punctū in quo ſuperficiei conoidalis axis applicatur.

Item

Item si conoidalem figuram rectangulam planum contingat, ipsi uero contingenti alterum planum æquedistantet ductum aliquam conoidalis portionẽ abscindat, ipsius portionis basim uocari planũ, quod ab ipsa conoidalis sectione in abscindendo comprȩhensum sit: uerticem uero, punctũ illud in quo alterum planum conoidale contingit. axem aũt lineam rectam, quæ inter portionem depræhendit à linea recta, quæ à uertice portionis ducta, sit axi conoidalis æquedistãs.

Hæc autem proponebantur consideranda & inspicienda. Cur fiat, quod si conoidalis rectanguli sectio secetur à plano super axem erecto, portio abscisa erit sequialtera cono qui habet basem cum portione eandem, & axem eundem. Rursus quare est, si à conoidali rectangulo duæ portiones à planis utrinq; ductis abscindantur, pottiones abscisæ babent inter se, eam quæ est suorum axiũ, proportionem duplicatam.

Circa uero obtusianguli conoidale hæc supposita uolumus Si in eodem plano sit obtusianguli coni sectio, & eius diametrus & lineæ, quæ sint proximȩ dicti coni portioni, & quiescente diametro uertatur planum donec redeat ad locum unde cœpit moueri, in quo scilicet plano dictȩ lineæ existunt, lineæ rectæ quæ sectioni coni obtusianguli proximȩ sunt, palàm est quod conum comprehendent æquicrurem, cuius uertex punctum erit in quod lineæ quæ proximȩ sunt cõcurrunt. axis uero diametros immota. Figura uero sub sectione coni obtusianguli comptæhensa, conoidale obtusiangulum appelletur. axem autem eius diametrum immotam: uerticem uero, punctum in quo axis superficiei conoidalis applicatur. Conum aũt comptæhensum à lineis sectioni coni obtusianguli proximis complectentem conoidale uocari. Lineam uero rectam, quæ intermedia capitur inter uerticem conoidalis & uerticem coni complectentis conoidale, adiectam axi dici. Et si obtusianguli conoidale planum contingat, ipsi autem contingenti alterum planum æquedistanter ducatur, quod abscindat à conoidali portionem, basem abscisȩ portionis uocari planum quod sit à sectione conoidalis in secando comptæhensum. uerticem autem, punctum in quo planum contingit conoidale. axem uero, lineam intra portionem compræhensam, à linea ducta per verticẽ portionis & uerticem coni complectentis conoidale, & quæ dictis uerticibus intermedia babetur tectam lineam ad axem adiectam uocari.

Omnia uero conoidalia rectangula sunt similia. Eorum autem quæ sunt obtusianguli, similia dicantut illa, quæ à conis similibus sunt compræhensa.

Hæc autem inspicienda proponuntur. Quare est, si à conoidali obtusianguli portio abscindatur plano super ipsius axem erecto, portio abscisa ad conũ eandem basem cum portione & eundem axem habentem, haber eam proportionẽ quam habet utraq; simul linea, & ea quæ æquatur axi pottionis, & ea quæ tripla est lineȩ axi adiectæ, ad lineã æqualem his duab. simul, axi portionis, & lineȩ quȩ dupla sit lineæ axi adiectæ.

Item quare est, si à cono anguli obtusi portio abscindatur plano non erecto super axem, portio inde abscisa ad figuram, quæ basim babeat eandem, & axem eũdem portioni, quæ figura sit sectio coni, eam habet proportionem, quam utraq; simul linea quæ axi portionis sit æqualis: & linea quæ tripla sit lineæ axi adiectæ ad lineam æqualem istis utrisq;, uidelicet axi pottionis, & lineæ duplæ ad lineam axi adiectam.

At uero circa sphæroidas figuras subiecimus ista.

Si sectio coni anguli acuti, quiescente eius maiore diametro circumferatur, donec redeat in eum locum unde moueri cœpit, figuram inde compræhensam à sectione coni anguli acuti, sphæroides oblongum appellan. Si autem minori diametro quiescente circũferatur, item donec ad locum unde cœpta est moueri portio coni acuti anguli redeat, figuram inde à sectione coni anguli acuti compræhẽ

sam sphæroides prolatum uocari. Vtriusque autem sphæroidis axem dici diametrum quiescentem: uerticem uero punctum illud in quo axis applicatur superficiei sphæroidis. Centrum uero punctum axis medium: diametrum uero lineam à centro eductam perpendiculariter ipsi axi.

Si sphæroidas figuras utcunque plana contingant æquedistantia, & figuras nõ secantia: ipsis autem, ut dictum est, contingentibus alterum planum æquedistanter agatur, diuidatque dictas figuras sphæroidas, portionum inde nascentium basem quidem uocari, id plani quod comprehensum est à sphæroidis sectione in diuidente plano: uertices uero, puncta in quibus plana æquedistantia contingunt sphæroides. axes autem lineas rectas, in portionibus comprehensas ex recta linea, quæ uertices earum iungit. Quòd autplana contingentia in uno solum puncto contingant sphæroidis superficiem, quodque linea recta contactus contingens per centrum sphæroidis transeat, in sequentibus ostendemus. Similes autem figuras sphæroidas dici, quarum axes ad diametros eandem habent proportionẽ.

Portiones autem sphæroidum & conoidalium figurarum similes illę dicatur, quæ à similibus figuris sint abscisæ, quæque bases similes habeãt, & axes earum aut erecti sint super planas basium superficies, aut angulos æquales habeant ad diametros basium (correlatiuas) consimiles, proportionemque teneant ad diametros basium consimiles eandem.

Proponuntur autem hæc circa sphæroidas figuras consideranda: Cur fiat, si figurarum sphæroidum aliqua secetur plano per eius centrum transeunte, & super axem erecto, portionum inde productarum utramque duplam sit cono suo, eãdem basim & axem eundem cum portione habenti. Si autem plano secetur non super axem erecto, & per centrum transeunte: earum quæ inde resultant portionũ, maior quidem ad conum eãdem basim, & eundem cum portione axem habentem, habebit eandem proportionem, quam habet linea, quę sit æqualis utrisque simul istis, dimidio axis sphæroidis, & axi minoris portionis, ad axem minoris portiõis. Minor autem portio ad conum, qui eandem basem & axem eundem cum portione habuerit, eam tenet proportionem, quam linea æqualis utrisque simul istis, dimidio axis sphęroidis, & axi maioris portionis habet, ad axem portionis maioris.

Item quare fit, si qua figurarum sphæroidum plano secetur, transeunte per cẽtrum non erecto super axem, utraque portionum inde nascentium dupla erit figuræ, quæ basim eandem, & axem habeat cum portione eundem: sit autem ipsa figura abscisor coni.

Item si neque per centrum, neque erecto super axem plano, sphæroides secetur, portionum inde factarum maior ad figuram eandem basim, & eundem cum portione axem habentem, tenebit eam proportionem, quam linea æqualis utrique simul istis dimidiæ lineæ, quæ utriusque portionis uertices iungit, & axi portionis minoris habet ad axem portionis minoris. Minor autem portio ad figuram eandem basem & axem habentem cum portione eundem, habebit eam proportionem, quam linea æqualis utrisque simul istis dimidiæ lineæ, quæ utrisque portionis uertices iungit, & axi maioris portionis ad axem maioris portionis. sit autẽ & in his figura abscisor coni.

Istis itaque quæ dicta sunt theorematibus demonstratis, per hæc ipsa inueniũtur multa alia theoremata, et problemata multa: quale est hoc quod sequit, Quod sphæroides figuræ similes, & portiones sphæroidum figurarum similes, & similiter conoidalium, habent eam quæ est axis ad axem proportionem triplicatam.

Item quare sphæroidum figurarum æqualium quadrata diametrorum mutuam habent axium proportionem. & si figurarum sphæroidum quadrata diametrorum mutuam habuerint axium proportionem, sphæroides figuras illas æquales esse.

Propo

Propositum autem quale est hoc, A' data figura sphæroidis, aut conoidalis portionem abscindere plano, quod sit alteri plano dato æquedistanter ductum. Esse autem portionem abscisam æqualem aut cono dato, aut cylindro, aut sphæræ datæ. Præmittens igitur primùm & theoremata & præcepta proposita, quę ad illorum demonstrationem sunt necessaria, postea tibi ea quæ supra sunt proposita, describemus feliciter.

Si conus plano secetur omnibus lateribus suis coincidenti, sectio erit aut circulus, aut coni anguli acuti sectio. Quod si dicta sectio sit circulus, palàm est quod portiò ab eo uerticem uersus comprænhensa, conus existit. Si uero sectio sit coni anguli acuti sectio, figura à coni sectione dicta uersus uerticem coni comprænhensa, abscisor coni uocetur. Huius uero abscisoris basis uocetur planũ illud quod á sectione coni acuti anguli continetur. uertex uero punctum, quod est & coni uertex. axis autem, linea à uertice ad centrum sectionis coni acuti anguli ducta.

Et si cylindrus duobus planis æquedistantibus secetur, quæ omnib. lateribus cylindri coincidant, sectiones erunt aut circuli, aut coni acuti anguli sectiones æquales & similes inuicem. Siquidem sectiones circuli fuerint, manifestũ est quod figura à cylindro abscisa inter plana æquedistantia intercepta, cylindrus existit. Si uero sectiones fuerint coni acuti anguli sectiões, abscisa à cylindro figura, quæ est inter plana æquedistantia contenta, sector cylindri appelletur. Ipsius autem sectoris bases uocentur plana comprehensa à sectione coni acuti anguli. axis uero linea ducta ad centra, sectiorum coni acuti anguli. Erit autem hæc ipsi axi cylindri eadem.

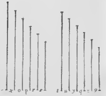
1

SI fuerint quotcunque numero magnitudines sumptæ, quæ sese excedant æqualiter, fueritq; earum excessus minime illarum æqualis, sumantur aliæ totidem numero magnitudines omnes maximè prædictarũ æquales. istæ pòst simul sumptæ collectæ omnis ad prius sumptas omnis collectas minus sunt quàm duplæ. item eædem omnis istæ ad illas easdem omnes, dempta earum maxima, plus erunt quàm duplæ. Huius aũt demonstratio manifesta existit.

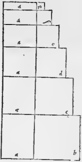


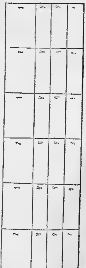
2

SI fuerint quotcũq; numero sumptę magnitudines, itemq; totidem alię numero ponantur magnitudines, hoc pacto, ut quã cunque unaquaque prius sumptarum ad suam proximam habuerit proportionem, eandem unaquæq; posterius sumptarum ad suam eodem ordine proximam seruet, quæcunq; fuerint illæ proportiones, item prius sumptæ magnitudines ad quasdam alias, totidem numero magnitudines omnes, aut earum aliquas, quibuscũq; proportionibus referantur: sumptæ quoq; posterius magnitudines ad quasdã alias totidẽ, eodem ordine & eisdem proportionibus sint relatæ: erit tunc, ut magnitudines prius sumptæ omnes, habeant ad eas magnitudines omnes ad quas dicta ratione comparãtur, eandem proportionem, quam magnitudines posterius sumptæ omnis habuerint,



rint, ad omnes illas magnitudines ad quas fuerint similiter comparatæ. Esto quędam magnitudines a b c d e f, item aliæ totidē g h i k l m, sitq; ut unaquæq; prius sumptarum habeat ad suam proximam, sicut unaquæq; posterius sumptarum ad suam proximam. Vt uidelicet a habeat ad b eandem proportionem, quam g ad h. ipsa uero b habeat ad c, sicut h ad ipsam i, & reliquę deinceps similiter. referātur autem a b c d e f magnitudines, ad alias magnitudines n x o p r s, in quibuscū que proportionib. ipsæ uero g h i k l m ad alias, uidelicet t u y q z 9, eisdem eodem ordine proportionibus: ut sicut a habet ad n, ita g ad t, & sicut b ad x, ita h ad u, & reliquæ istis similiter. Ostēdendū itaq; est, quod omnis a b c d e f, ad omnis n x o p r s eandem habent proportionem, quam habent omnes g h i k l m, ad omnes t u y q z 9. quoniam n ad a eandem habet proportionem, quam t ad g: ipsa uero a ad b, sicut g ad h. uerum b ad x, sicut h ad u. erit sicut n ad x, ita t ad u. eadem ratione & x ad o, sicut u ad y: & reliqua his similiter. Habent autem omnes a b c d e f g ad a, sicut g h i k l m ad g. uerum a ad n, sicut g ad t. at uero n ad omnes n x o p r s, sicut t ad omnes t u y q z 9. Manifestum igitur est, quod omnes a b c d e f, ad omnes n x o p r s: sicut omnes g h i k l m, ad omnes t u y q z 9. Clarum autē est, quod si ipsarū a b c d e f magnitudinum, istę a b c d e referantur ad n x o p r, ipsa uero f nō referatur: at ipsarū g h i k l m, istæ g h i k l, referantur ad t u y q z sibi correspondentes eisdem proportionibus, m uero nō referatur. Et similiter omnis a b c d e f, ad omnes n x o p r eandem habebunt proportionē, quā omnes g h i k l m, ad omnes t u y q z.





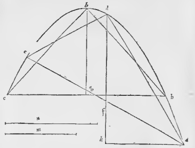
3 Si lineæ quotcunq; numero, fuerint inter se æquales, & unicuiq; earū accedat spaciū, ita quod spaciū secundæ superet spaciū primę quadrata forma, & sic deinceps reliqua se habeant, sintq; excessuū latera æqualē excedētia, & hic laterū excessus sit æqualis minimæ huius numeri lineæ. item sint alia spacia prædictis numero æqualia, quantitate uero unumquodq; maximo prædictorum æquale. Dico, tunc hęc simul omnia spacia minorem habere proportionem ad prædicta simul omnia, quàm linea quæ

quæ sit æqualis utrisque simul istis lineis, ei quæ est latus excessuum spaciorũ maximum, & uni ex lineis æqualibus habeat ad lineam æqualem utrisq; simul istis, lineæ quæ sit tertia pars lateris excessus maximi, & lineæ quæ sit unius æqualiũ dimidia. Et item hæc eadem spacia ad illa eadem omnia, dempto eorum maximo, maiorem habere proportionem, quàm sit dictarum linearum proportio. Esto lineæ rectæ quotcunque numero quantitate inter se æquales, in quibus a, & unicuiq; earum spacium accedat, ita ut crescendo maius excedat sibi proximum minus forma quadrata. sint autem excessuum latera b c d e f g, quæ sese æqualiter excedant. & excessus ille sit æqualis minimæ illarum linearum, uidelicet ipsi g. sitq; b maximum latus dictorũ excessuum, & g sit minimũ latus minimi spacij ex dictis spacijs. Esto quoq; alia spacia numero æqualia prædictis, quantitate uero unumquodq; æquale maximo prędictorum, quod adiacet lineæ a b. sintq; hæc secunda spacia, in quib. h i k l lineę, sitq; linea h i æqualis lineę a, linea uero k l æqualis lineę b: & utraq; simul h i sit dupla ad lineam i. utraq; uero k l simul sit tripla ad lineam k. His ita dispositis, demõstrandum est, quod omnia simul spacia in quibus h i k l, ad spacia simul omnia in quibus a b, a c, a d, a e, a f, a g minorem habent proportionem, quàm habeat linea h i k l, ad lineam i k. Item quod hæc eadẽ spacia simul omnia ad illa eadem simul omnia, dempto maximo eorum, maiorem habent proportionem, quàm sit dicta lineæ ad lineam proportio. Sunt enim quędam spacia, in quibus a, sese æqualiter excedentia: & eorum excessus est æqualis numero, quoniam adiectiones linearum & latitudines sunt æqualiter sese excedentes sunt itẽ alia spacia, in quibus b i totidem numero prædictis spacijs, quantitate uero unũquodq; maximo prædictorum æquale. Omnia igitur simul in quibus h i spacia sunt, omnium simul in quibus a, minus quàm dupla. sunt item eadem simul omnia, eorundem simul omnium, dempto eorum maximo, plusquam dupla. Spacia igitur omnia simul in quibus i, erunt omnibus simul in quibus a, minora: omnibus item simul dempto maximo, maiora erunt quàm dupla. Rursus quædam lineæ sunt hæ b, c, d, e, f, g: quæ sese æqualiter excedunt. & ille excessus est æqualis minimæ earum, & item aliæ lineæ, in quib. k l lineis prædictis multitudine æquales, magnitudine uero unaquæq; æqualis maximæ illarum. quadrata igitur simul omnia linearum secundarum inter se, & lineæ prioris ordinis maximę æqualium sunt minus quàm tripla ad quadrata simul omnia, linearum prioris ordinis sese æqualiter excedentium. ad quadrata uero simul omnia reliquarum, dempto maximæ lineæ quadrato, sunt eadem plus quàm tripla. Hoc autem est ostensum in his quę circa lineas cocleares sunt exposita. Spacia igitur in quibus k, spacijs simul omnibus in quibus b c d e f g, sunt minora: spacijs uero simul omnibus in quibus c d e f g, sunt maiora. quare & omnia simul spacia in quib. i k, spacijs simul omnib. in quibus a b c d e f g, erũt minora. Illis aũt in quibus a c d e f g spacijs, simul omnibus maiora erunt. Patet igitur, omnia simul spacia in quib. h i k l, ad spacia simul omnia in quibus a b, a c, a d, a e, a f, a g, esse minora: illis uero in quibus a c, a d, a e, a f, a g spacijs simul omnibus maiora. Ex quo clarum est, spacia simul omnia in quibus h i k l, ad spacia simul omnia in quibus a b, a c, a d, a e, a f, a g minorẽ proportionem habere, quàm habeat linea h l ad lineã i k. ad reliquas uero illarũ dempta a b linea, maiorem proportionem dicta proportione seruate. quare, &c.

Si cuiuscunq; coni sectionę lineę rectæ ab eodem puncto exeuntes cõtigerint, sint autem & aliæ recte lineæ intra coni sectionẽ lineis contingentib. æquedistãter ductæ, & sese inuicẽ secantes quadrãgulæ superficies, quæ sub dictarũ linearũ sectionib. cõtinentur, eandẽ habent proportionẽ ad quadrata contingentiũ, unaquæq; ad quadratũ cõtingentis illius quæ sibi respondeat, quã habet superficies producta ex partib. alterius lineæ una in alterã ductis, ad quadratum cõtingentis eius quæ sibi fuerit æquedistãs. Hoc aũt demonstratũ iam fuit in conicis elemẽtis.

Si

4 SI ab eadem rectanguli coni sectione duæ portiones, utcunque contingant, abscindantur, quæ diametros habeant æquales, ipsæ quoque portiones æquales erunt, & trianguli ipsis inscripti, qui eandem cum portionibus basim & altitudinem habuerint, erunt æquales. Diametrum autem uoco cuiuscunque portionis lineam rectam, quæ diuidit in duo æqua omnem lineam rectam basi ipsius portionis æquedistantē.

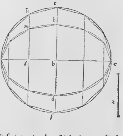


Esto rectanguli coni sectio a b c, et ab ea abscindantur duæ portiones a d e, & h b c. Esto autem ipsius portionis a d e, diametros d f: ipsius uero b b c diametros b g, & esto d f æqualis ipsi b g. Ostendendum est, quod portiões ipsæ sunt æquales inuicem, a d e ipsi h b c. & trianguli quoque ipsis eo modo, quo dictū est inscripti, æquales inuicem. Esto primum quæ scindit alteram portionem h c, secundum angulos rectos ad diametrum portionis coni rectanguli. sumatur autem ea iuxta quā possunt illæ quæ à sectione ducuntur dupla eius quę à sectione ad axem ducitur, esto illa in qua m: ducatur autem ab ipso a perpendicularis super d f, quæ sit a k. Quoniam igitur d f est diametros portionis, & a e in duo æqua diuiditur in puncto f, & d f est æquedistans diametro sectionis coni rectanguli: sic enim in duo diuidit omnes æquedistāter ipsi a e ductas, quam itaque proportionem habet quadratum a f ad quadratum a k, eandem habeat m ad n. quæ autem à sectione ad ipsam d f ducuntur æquedistanter ipsi a e possunt ea spacia, quæ lineæ ipsi n æquali adiaceant, latitudinem habentia lineam illam, quam illæ ductæ æquedistanter ipsi a e ex d f diametro incidunt uersus d terminum sumptam. Nam hoc est ostensum in conicis. Igitur a f ualet tantum, quantum continetur sub n & d f. potest autem & h g æquale ei quod continetur sub m & b g, cum h g sit perpendicularis super diametrum, & quadratum a f ad quadratum h g habeat eandem proportionem quam m habet ad n, quia d f & b g sunt positæ æquales. habet autem quadratum a f ad quadratum a k eandem proportionem, quam habet m ad n, erunt igitur h g & a k æquales. sunt autem & b g, & d f æquales: quare id quod fit ex h g in b g, æquatur ei quod fit ex a k in d f. æqualis est igitur triangulus h g b triangulo d a f, quare & eorum dupla æqualia sunt. Portio autem a d e, est sesquitertia trianguli a d e: trianguli uero h b c, similiter sesquitertia est portio h b c: quare patet portiones & triangulos ipsis portionibus inscriptos inter se esse æquales. Si uero neutra earum quæ diuidunt portiones linearum fuerit ad ipsam sectionis diametrum secundum angulos rectos, ducta ex diametro sectionis coni rectanguli uersus eam partē à qua diametros sectionis ab ipsa sectione exierit, sumatur pars quæ sit æqualis diametro portionis unius, & à puncto huius sumptæ extremo ducatur in utramque partem secundū angulos rectos linea recta, quæ abscindit portionem

utrisque

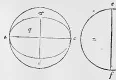
utrięq; prædictarum æqualem, ut suprà ostensum est. quare constat propositū.

OMne spacium quod compræhenditur à sectione coni acutianguli ad circulum, qui habeat diametrum æqualem maiori diametro sectionis coni acutianguli, habet eam proportionem quam minor sectionis diametros habet ad maiorem, quæ est circuli diametros. Esto coni acutianguli sectio, in qua a b c d, eius maior diametros esto, in qua a c: minor uero, in qua b d. esto circulus circa a c diametrū. Ostēdendū est, spaciū à sectione coni acutianguli compręhensum, habere ad dictum circulum eam proportionem, quā habet b d ad a c: hoc est ad e f. quā itaq; habet b d ad e f, eam habeat circulus in quo z ad a e c f circulum. Dico quod circulus z est æqualis sectioni coni acutianguli. Si enim circulus z non dicatē ęqualis spacio cōpręhēso à sectione coni acutiāguli, esto primū si fieri potest maior. potest itaq; in circulo z figura multorum angulorum & numero pariū inscribi, quæ sit maior dicto spacio a b c d. intelligatur ergo inscripta,

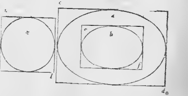


& inscribatur circulo a e c f figura similis inscriptæ circulo z, & ab eius angulis ducantur perpendiculares super a c diametrum: in quibus uero punctis perpendiculares scindunt sectionem coni acutianguli, ea puncta lineis rectis iungantur. eritq; iam quædam figura in ipsa coni acutianguli sectione inscripta, quę figura ad rectilineam figuram circulo a e c f inscriptam, eādem habebit proportionem, quā habet b d ad e f. quoniam e h, k l perpendiculares in eandem proportionem diuiduntur secundum m b: manifestum est, quod l e spacium tabulare, ad h m habet eam quam h e ad b h proportionem. eadem ratione & cætera spacia tabularia, unumquodq; eorum quæ sunt in circulo, ad unumquodq; eorum quæ sunt in sectione coni acutianguli, eam habebit quæ est e h ad b h proportionem: habent quoq; trianguli qui ad a c existunt, in circulo ad triangulos in sectione coni acutianguli proportionem eandē. Tota igitur figura rectilinea circulo inscripta a e c f, ad totam figuram rectilineam sectioni coni acutianguli inscriptam, habebit eandem proportionem quam e f habet ad b d. habet autem eadem ipsa figura rectilinea ad rectilineam circulo z inscriptam, hanc eandem proportionem, quoniam circuli eandem proportionem inter se retinebant. Igitur rectilinea circulo z inscripta, est æqualis rectilineæ sectioni coni acutianguli inscriptæ: quod quidē esse non potest. nā maior erat toto spacio à sectione coni anguli acuti cōpræhenso. Sed esto item si fieri potest minor. Rursus potest in sectione coni acutianguli inscribi figura paribus contenta lateribus, quæ maior sit circulo z. Esto igitur inscripta, & ab angulis eius perpendiculares ducantur ad a c, & educātur ad circuli circumferentiam. Rursus igitur erit, ut rectilinea circulo a e inscripta, ad rectilineā sectioni coni acutianguli inscriptam, habeat eam proportionē, quam e f ad b d. si itaq; circulo z inscribatur similis illi, ostendetur eam quæ in circulo z est inscripta, æqualem illi esse quæ sectioni coni acutianguli est inscripta: quod sanè esse non potest. Circulus igitur z neq; minor est spacio à sectione coni acutianguli compræhenso Manifestum est igitur, quod dictum spacium habet ad a e c f circulum eandem proportionem, quam habet b d ad e f.

6 Quodlibet spacium à coni acutianguli sectione comprahensum, ad quemcunque circulum comparetur, eam habet proportionem, quam superficies ex utrisque eius sectionis diametris producta habere percipitur, ad quadratum diametri eius circuli ad quem fuerit comparatũ. Esto spacium à coni acutianguli sectione comprehensum, in quo q. eius sectionis diametri sint a c, b d maior autem a c: & esto circulus in quo z, eius autẽ diametros in quo est e f. Est igitur demõstrandũ, spacium q ad circulum z eam habere proportionem, quam superficies producta ex a c diametro in b d habet, ad quadratum diametri e f. Circũscribatur itaque circulus ipsi a c diametro. Spacium igitur q, ad circulũ cuius diametros est a c, eam habet proportionem, quam superficies ex a c in b d producta habet, ad quadratum diametri a c. circulus quoque cuius diametros est a c, ad circulum cuius diametros est e f, habet eandem proportionem, quam habet quadratũ a c ad quadratum e f. Ergo manifestum est, spacium q ad circulum z eam proportionem habere, quam superficies ex a c in a d producta, habet ad quadratum e f.

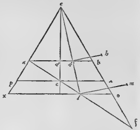


7 Spacia quæque à coni acutianguli sectione comprahensa, ad alia quæque spacia quæ à coni acutianguli sectione comprehendantur comparata, eandem proportionem habere probantur, quam superficies ex illorum diametris productæ, ad superficies ex illorum diametris productas habuerit. Esto spacia à coni acutianguli sectione cõprahensa, in quibus a b: esto etiam c d superficies producta ex diametris sectionis a. esto item e f superficies producta ex diametris sectionis b. Est itaque declarandũ, spacium a ad spacium b, eandem proportionem habere, quam c d habuerit ad e f. Sumatur itaque quispiam circulus in quo z, quadratum diametri illius esto k l: habet itaque a spacium ad circulum z eandem proportionem, quam c d ad k l: circulus autem z ad b spacium eandem habet proportionem, quam k l ad e f. Manifestum est igitur, a spacium habere ad b spacium eã, quam c d ad e f habuerit proportionem. Ex hoc igitur manifestum est, quod spacia à similibus sectionibus coni acutianguli comprahensa, eam inter se proportionem seruabunt, quam sectionum diametri, quæ rationis eiusdem fuerint, potentia inuicem retinebunt.



8 Data coni acutianguli sectione, & ab eius centro recta linea super plano in quo dicta sectio existit, perpendiculariter erecta, fieri potest, ut conus quidã deprehendatur, qui uerticem habeat erectæ lineæ terminum, in cuius coni superficie data coni sectio comprahendatur. Detur aliqua coni acutianguli sectio, & de eius centro recta linea super planum perpendiculariter erigatur, in quo data sectio

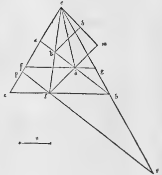
ctio continetur: per minorem uero diametrum & lineam erectam planum educa
tur, & sit in ipso minor diametros a b: centrum uero datæ sectionis d, linea à cẽtro
erecta c d, eius terminus c. sectio autem coni acutianguli intelligatur circa diame-
trum a b descripta, in plano ere-
cto a d, c d. Oportet itaq; conum
inuenire, qui uerticem habeat
punctum c, in cuius superficie
sit coni acutianguli sectio. Duca
tur autem à pũcto c ad a b recta,
quæ educatur: & à puncto a du-
catur a f, ita ut id quod fit ex a e
in e f, ad quadratum e c, eam ha
beat proportionem, quam ha-
bet quadratum dimidiæ maioris
diametri ad quadratum d c. hoc
enim fieri potest, cum maior sit
proportio ista, quàm ea quam
habet id quod fit ex a d in d b,
ad quadratum d c. Secũdum ue
ro a f planum erigatur, erectum
super planum in quo est a c, a f.
in quo item plano circulus de-



scribatur circa diametrum a f, & ab hoc circulo conus fiat qui uerticem habeat pũ
ctum c. in huius autem coni superficie demonstrabitur esse sectio coni acutiangu
li. Nam si non fuerit, necesse est punctum aliquod esse in sectione coni acutian-
guli, quod non erit in superficie coni. intelligatur itaq; punctum quoddam in se-
ctione coni acutianguli sumptum, quod sit h, quod non sit in superficie coni, &
ducatur ab ipso h perpẽdicularis h k, erit igitur ipsa super plano erecta in quo est
a c, a f. ducta itaq; linea recta à puncto c ad k, incidet iñ ipsa lineæ a f. esto in pũcto
l: et à pũcto l erigatur perpẽdicularis super a f, quæ sit l m, in circulo circa a f descri
pto. intelligatur autem m eleuatum in circũferentia eius. ducatur autem et à pun-
cto l æquedistans ipsi a b, quæ sit x o: à puncto autem e, ducatur p r. Quoniam igi
tur id quod sub e a & e f continetur, ad quadratum e c, eam babet proportionem,
quam quadratum dimidiæ maioris diametri, ad quadratum d c: quadratum ue-
ro e c, ad id quod cõtinetur sub e p, e r, eam habet quam quadratũ d c ad id quod
fit ex a d in d b. Id igitur quod fit ex a e in e f, eã habet ad id quod ex p e in e r, quã
quadratum dimidiæ maioris diametri habet ad id quod fit ex a d in d b. Est aũt si
cut id quod fit ex a e in e f, ad id quod fit ex p e in e r: sic id quod fit ex a l in l f, ad id
quod fit ex l x in l o. sicut autem quadratum dimidiæ maioris diametri, ad id quod
fit ex a d in d b: sic quadratum h k, ad id quod fit ex a k in k b. Igitur eandem ha-
bet proportionem id quod fit ex a l in l f, ad id quod fit ex x l in l o: quam quadra-
tum h k, ad id quod fit ex a k in k b. Habet autem id quod fit ex x l in l o, ad qua-
dratum c l, eandem proportionem, quam id quod fit ex a k in k b, ad quadratum
k c. Igitur id quod fit ex a l in l f, ad quadratum c l, eandem proportionem, quam
quadratum h k ad quadratum k c. ei autem quod fit ex a l in l f, æquale est quadra
tum l m, nam in semicirculo circa a f descripto, ducta est l m perpendicularis. ean-
dem igitur habet proportionem quadratum l m ad quadratum l c, quam quadra
tum h k ad quadratum k c. quare in eadem linea recta sunt puncta tria, c h m: ipsa
uero c m linea est in superficie coni. manifestum igitur, quod punctum h in coni
superficie existet. Suppositum autem fuerat, ibi non existere: nullum igitur pun-
ctum in sectione coni acutianguli est, quod non existat in superficie dicti co-

ni. Tota ergo coni acutianguli sectio in superficie eiusdem coni existet.

9 DAta coni acutianguli sectione, & linea recta ex eius centro non perpendiculariter educta in altum, in plano quod ex altera diametro sit erectum, super plano in quo est coni acutianguli data sectio, potest conus inueniri, qui uerticem habeat terminum lineæ eductæ, in cuius superficie coni acutianguli sectio data cõsistet. Esto itaq; datæ sectionis coni acutianguli diametros b a, centrum autem d. & sit d c ex centro educta, ut dictum est: intelligatur autem coni acutianguli sectio quędam circa diametrum a b, in plano erecto super planum in quo sunt lineæ a b, c d. Oportet itaq; conum inuenire, qui uerticẽ habeat punctum c, in cuius superficie sit coni acutianguli data sectio. Lineæ igitur a c, c b non erunt æquales: quare c d non stat erecta super plano, in quo est ipsius coni acutianguli sectio data. Sit igitur ęqualis c e ipsi c b, esto uero n recta æqualis dimidiæ alterius diametri, quæ est coniugalis ipsi a b, & per d ducatur f g ęquedistans ipsi e b: ab ipso

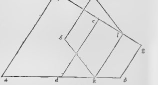


uero e b erigatur planum erecte stans super planum in quo est a c, c b: & in hoc plano describatur circulus circa diametrum e b, aut ellipsis. siquidem quadratum n est æquale ei quod fit ex f d in d g, fiat circulus. Sin autem fiat coni acutianguli sectio talis, ut quadratum alterius diametri ad quadratum e b eandem habeat proportionem, quam habet quadratum n ad id quod fit ex d f in d g: deinde conus sumatur, qui uerticem habeat punctum c, in cuius superficie erit circulus: aut coni acutianguli sectio circa diametrum e b. hoc enim esse potest, quoniam linea à puncto c ad mediam e b ducta, recta est ad planum quod est secundum e b constitutum. in hac itaq; superficie inest etiam coni acutianguli sectio circa diametrum a b. Si non existit in dicta superficie, dabitur aliquod punctum in coni acutianguli sectione, quod non erit in dicta superficie coni. Intelligatur quoddam huiusmodi punctum sumptum h, quod non sit in dicta coni superficie: & à puncto h ducatur perpendicularis h k super a b: iuncta uero c k extra ducatur, & coincidat e b in puncto l. per punctum uero l ducatur quædam in plano erecto secundum e b perpendicularis super e b, quæ sit l m: ipsum autẽ m punctum intelligatur eleuatum super superficiem coni, & ducatur per punctum l æquedistans ipsi a b linea p r: erit iam sicut quadratum n ad id quod fit ex f d in d g, ita quadratũ l m ad id quod fit ex e l in l b. uerum sicut id quod fit ex f d in d g, ad id quod fit ex a d in d b: ita quod fit ex e l in l b, ad id quod fit ex e l in l r. erit igitur sicut quadratũ n, ad id quod fit ex a d in d b, ita quadratũ l m, ad id quod fit ex p l in l r. sicut autẽ

qua-

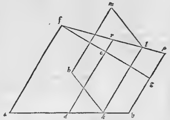
quadratum n, ad id quod fit ex a d in d b, ita quadratum h k, ad id quod fit ex a k in k b, quoniam in eadem coni acutianguli sectione ductæ sunt perpendiculares super diametrum a b. eandem igitur proportionem habet quadratum l m, ad id quod fit ex p l in l r, quam habet quadratum h k, ad id quod fit ex a k in k b. habet autem quod fit ex p l in l r ad quadratum c l eandem proportionem, quam habet id quod fit ex a k in k b, ad quadratum k c: igitur eandem proportionem habet quadratum l m, ad quadratum l c, quam quadratum h k ad quadratum k c, quare puncta c h m erunt in eadem linea recta. sed c m puncta sunt in superficie coni: quare manifestum est, h punctum in eadem superficie existere. suppositum autẽ fuerat, non esse: igitur patet, quod fuerat demonstrandum.

DAta coni acutianguli sectione, & linea ab eius sectionis centro erecta in plano, quod sit ex altera diametro eductum, quódq; erectum stet super plano in quo est coni acutianguli sectio data, potest cylindrus effingi, qui axem habeat directè iunctum lineæ à centro sectionis, ut dictum fuit, erectæ, in cuius cylindri superficie data coni acutianguli sectio existat. Esto datæ sectionis coni acutianguli altera diametros b a, cẽtrum eius d. esto autem c d linea ex centro, ut dictum fuit, erecta: intelligatur autem coni acutianguli sectio circa diametrum a b in plano illo constituta, quod stet erectũ super plano, in quo sunt lineæ a b, c d. oportet itaque cylindrum effingere, qui axem habeat in directũ lineæ c d coniunctum, in cuius cylindri superficie data coni acutianguli sectio existat. à punctis itaq; a b educantur a f, b g, æquedistantes ipsi c d: altera iam diametros sectionis coni acutianguli, aut æqualis erit interuallo quod inter a f & b g lineas continetur, aut maior, aut minor. Esto primum æqualis f g lineæ, & linea f g sit erecta perpendiculariter ad lineam c d: ab ipsa uero f g exeat planum, quod sit erectum super linea c d: & in hoc plano circulus esto circa diametrum f g, & ab hoc circulo cylindrus exeat habens axem c d: in superficie igitur huius cylindri erit data coni acutianguli sectio. Nam si non sit, dabitur aliquod punctum in sectione coni acutianguli, quod non continebitur in superficie dicti cylindri. sit illud h, & ab ipso h ducatur perpendicularis h k super a b: erit autem ipsa erecta super plano, in quo sunt a b, c d lineæ. à puncto uero k ducatur k l æquedistans ipsi c d, & à puncto l erigatur l m perpendiculariter ad f g, in circulo circa f g cõstituto. intelligatur autem m eleuatum in superficie semicirculi eius qui est circa diametrum f g. habet itaq; eandem proportionem quadratum h k perpendicularis, ad id quod fit ex a k in k b: & quadratum f c, ad id quod fit ex a d in d b. quoniam f g est æqualis alteri diametro. Habet autem & id quod ex f l in l g, ad id quod fit ex a k in k b, eam quam habet quadratũ f c ad quadratũ a d ellipsis: quare id quod fit ex f l in l g, æquatur quadrato h k, & etiam idem æquale quadrato l m: æquales igitur h k & l m perpendiculares erunt: quare lineæ l k & m h sunt æquedistãtes. atq; ideo d c & m h, æquedistantes erunt. unde & in superficie cylindri erit h m, quoniam ab m puncto in superficie cylindri constituto ducta est m h, æquedistans axi. ex quo sequitur, punctum h in eadem existere superficie. Fuerat suppositũ, non sic esse, unde patet id, quod oportuit demonstrare. Clarum iam est,

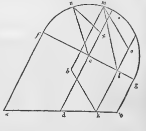


quod cylindrus compræhendens ellipsim, erit erectus, si altera diametros æqualis fuerit interuallo, quod interiacet inter lineas ab extremis alterius diametri ductas, ipsi lineæ ex centro erectæ æquedistantes.

Esto item altera diametros maior f g. et esto æqualis f p linea alteri diametro: ab ipsa autẽ p f erigatur planum erectc, stãs super plano, in quo est b c d: & in hoc plano esto circulus circa diametrũ p f. ab hoc circulo prodeat cylindrus, qui axem habeat d r. in superficie itaq; cylindri huius eadem ratione sectio coni acutianguli existere demonstrabitur.



Esto demum altera diametros minor f g. quantum maius potest f c, quàm dimidium alterius diametri: esto id c x lineæ quadratum. & à puncto x erigatur linea æqualis dimidiæ alterius diametri, erecta super plano in quo sunt lineæ rectæ a b c d, sitq; hæc x n. intelligatur aũt punctũ n eleuatũ. c n igitur erit æqualis c f, in plano uero in quo est f g, c n circulus describat̃, circa diametrum f g. iste autem ductus erit per n punctum. & ab ipso circulo cylindrus effingatur, qui axem habeat c d: in superficie itaq; huius cylindri sectio coni acutianguli existit. Sin autem non sic, dabitur aliquod punctum in sectione coni acutiãguli, quod nõ erit in superficie cylindri. esto illud h, & ducatur h k perpendicularis super a b, & à puncto k ducatur k l æquedistans lineæ c d. & à puncto l ducatur erecte l m super f g in semicirculo circa diametrum f g constituto. intelligatur autem punctum m eleuatum in arcu semicirculi circa f g constituti, super semicirculum circa f g constitutum. & à puncto m ducatur m o, perpendicularis super lineam k l eductam. erit aũt hæc erecta super plano in quo sunt a b, c d, quia est linea k l erecta perpendiculariter super lineam f g. est itaq; sicut quadratũ m o ad quadratũ m l, ita quadratum n x ad quadratum c n: sicut autem quadratum m l, ad id quod fit ex a k in b k, sic quadratum c n ad quadratum a d. quia quadratum m l est æquale ei quod fit ex f l in l g: quadratũ uero c n quadrato c f æquatur. erit igitur sicut quadratum m o, ad id quod fit ex a k in k b, sic quadratũ x n, ad quadratum a d. Est aũt & quadratũ k h, ad id quod fit ex a k in k b, sicut quadratũ x n ad quadratum a d: quia x n est æqualis dimidiæ alterius diametri. patet quod lineæ perpendiculares m o, h k,



erunt

erunt æquales: quare o k & h m erunt æquales. quoniam autem m h est ducta æquedistans axi in cylindro, et punctum m est situm in superficie eius, necesse est et lineam m h in cylindri esse superficie collocatam. manifestum est igitur, quod & h punctum in eadem superficie continetur. Sumptum autem fuerat, non contineri in illa. Constat ergo necessarium esse, sectionem coni acutianguli in superficie cylindri contineri.

OMnis coni ad quemcunque conũ proportionem compositam esse ex proportione basium inter se, & ex proportione altitudinum, demonstratur ex his quæ prius sunt ostensa: & quod omnis abscisio coni ab abscisione coni, habet proportionem compositam ex proportione basium & proportione altitudinum: & quod omnis sector cylindri triplus est ad abscisionẽ coni quę basim habeat eandem cum sectore, & eandem altitudinem. Eadem enim est demonstratio, & eius quod cylindrus est triplus ad conum, qui basim eandem, & altitudinem habeat eandem cum cylindro. 11

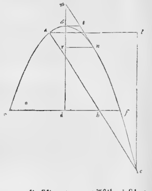
SI figura conoidalis rectangula plano per axẽ ducto scindatur, sectio erit conoidalis rectanguli sectio ipsa uidelicet eadem, quæ ipsam figuram conoidalem comprehendit, si fuerit circumuoluta; diametros eius erit cõmunis sectio duorũ planorum, eius quod scindit figuram, & eius quod per axem ducitur perpendiculariter, superdiuidens alterum erectum. Quod si secetur plano super axem erecto, sectio circulus erit, qui centrum in axe habebit. Si conoidale obtusiangulum scindatur plano per axem, aut æquedistanter axi ductum, aut per uerticem coni comprehendentis conoidale, sectio erit coni obtusianguli sectio. Siquidem per axem ea erit quæ figuram ipsam circumuoluta describit. Si autem æquedistanter axi, erit prædictæ similis. Si autem & per uerticem coni comprehendentis conoidale, non erit prædictæ similis: diameter uero sectionis erit communis sectio planorũ, diuident * figuram, & eius quod per axem ducatur erectum super planum diuidens. 12

Si conoidale secetur plano super axem erecto, sectio erit circulus, cuius centrũ est in axe situm.

Si quæcunque sphæroidum figurarum scindatur plano per axem, aut æquedistanter axi ducto, sectio erit coni acutianguli sectio: quod si per axem, eadem erit quæ figuram ipsam circũuoluta describit: si autem æquedistanter axi, erit illi similis. eius uero diametros erit sectio cõmunis duûm planorũ: eius quod secat, et eius quod per axem ducitur erectum super planum secans. Si autem secetur plano super axem erecto, sectio erit circulus, cuius centrum in axe situm habetur. Si autem quæcunque dictarum figurarum plano per axem ducto secetur, lineæ à punctis quæ in figuræ superficie sunt, non in sectione sita ductę perpendiculariter, ad planum secans intra sectionem figuræ cadent. Horum autem omnium demonstrationes sunt manifestæ.

SI conoidale rectangulum plano secetur, neque per axem, neque æquedistanter axi ducto, neque super axem erecto, sectio erit coni acutianguli sectio. eius maior diametros erit pars in conoidali deprehensa: pars dico sectionis communis duûm planorum, eius quod figuram secuerit, & eius quod per axem ductum, erectum super secans planum: minor uero eius diameter erit æqualis interuallo inter illas duas comprehenso, quæ ab extremitatibus maioris diametri ductæ sint axi æquedistantes. Secetur itaque conoidale rectangulum plano, uti dictum est, ipso eodem prius scisso à plano per axem ducto, & erecto super planum secans. 13
Esto conoidalis sectio a b c, plani autem figuram secantis sit c a linea recta: axis autem conoidalis sit, & diametros sectionis b d. Ostendendum est, sectionem conoidalis quæ à plano circa a c fit, esse coni acutianguli sectionem: & maior eius diametros est a c, minor autem diametros æqualis est ipsi a l, cum c l fuerit ipsi b d ęquedistaus,

ſtans, & a l fuerit ſuper c l ducta perpendicularis: intelligatur aliquod punctum k in ipſa ſectione ſumptum, & à puncto k ducatur k h perpendicularis ſuper c a: erit igitur k h erecta ſuper plano perpendicularis, in quo eſt a c b coni rectanguli ſectio, quia & planum ſecans ſtat erectũ ſuper eodem plano. per h autem ducatur e f, quæ faciat angulos rectos ſuper b d, & per e f & k h rectas lineas extra ducatur planum: erit autem hoc erectum ſuper lineam b d. diuiditur itaq; figura conoidalis plano ſuper axem erecto, quare ea ſectio circulus erit cuius centrũ eſt d. igitur k h, æquum poterit ei quod fit ex f k in k e. nã quod eſt ſuper e f, ſemicirculus eſt: & k h, in eo eſt perpendicularis. nã eius quod fit ex e h in h f, eſt media proportionalis. ducatur aũt contingens coni ſectionem linea m n, æquediſtans ipſi a c. cõtingat uero in puncto n: ducatur item b t, æquediſtans ipſi e f. id itaq; quod fit ex a h in c h, ad id quod fit ex e h in h f, eandem habet proportionem, quam quadratum n t ad quadratum b t:

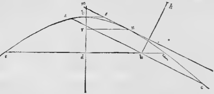


hoc enim oſtenſum eſt. linea uero n t æqualis eſt lineæ t m: quoniã & b r, ipſi b m eſt æqualis. habet igitur id quod fit ex a h in h c, ad quadratum k h, eandem proportionem, quam quadratum t m ad quadratum t b. quare & quadratum perpẽdicularis h k, ad id quod fit ex a h in h c, habet eandem proportionem, quam quadratum b t ad quadratũ t m. Quoniã igitur trianguli c a l, t m b ſunt ſimiles, ſimiliter oſtendentur quadrata, quæ fiũt ab alijs perpendicularib. ductis à ſectione ad a c, ad ea quæ fiũt ex partibus a c, altera in alterã ductis, eandẽ habebũt proportionẽ, quã quadratũ a l ad quadratum a c. unde manifeſtũ eſt, quod ſectio eſt coni acutianguli ſectio: eius uero maior diametros eſt a c, minor uero æqualis ipſi a l.

14 Si conoidale obtuſiangulum plano ſecetur, coincidenti omnibus lateribus figuræ compræhendentis conoidale, ſitq; ipſum planum non ſuper axem erectum, huiuſmodi ſectio erit coni acutianguli ſectio, eiuſq; maior diametros erit linea intra conoidale deprehenſa, quæ pars eſt ſectionis duûm planorum: eius uidelicet quod eſt ſecans, & eius quod per axem conoidalis ductum eſt, erectum ſuper planum ſecans. Secetur itaq; conoidale obtuſiangulum, ut dictum eſt, & alio item plano ducto per axem, & erecto ſuper planum ſecans, ſectio uero conoidalis eſto a b c, coni obtuſianguli ſectio: plani autem ſecantis figuram ſit linea recta a c, axis autem conoidalis & diametros ſectionis b d. intelligatur iam punctũ aliquod k in ſectione ſumptum, & à puncto k ducatur k h perpendicularis ſuper a c: ipſa iam erit erecta ſuper plano in quo eſt a b c ſectio coni: per punctum uero h ducatur perpendiculariter e f ad b d, & per e f & k h lineas rectas planũ ducatur ſecans conoidale, ſecabitur iam planum recto ſuper axem. quare huiuſmodi ſectio erit circulus, cuius centrum eſt d: igitur k h perpendicularis, æquum poterit ei quod fit ex h e in h f. Ducatur item m n æquediſtans ipſi a c, & contingens

ſe-

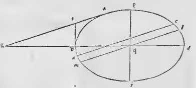
ſectionem coni in puncto n. ducatur b t æquediſtans ipſi e f. Id iam quod fit ex e h in h f, ad id quod fit ex a h in h c, eãdem habet proportionem, quam quadratũ b t, ad quadratum t n. quare quadratũ k h perpendicularis ad id quod fit ex a h in h c,



eam habet proportionem, quam quadratum b t ad quadratum t n. Similiter igitur oſtenditur, quod & quadrata aliarũ perpendicularium, quæ à ſectione ad a c ducentur, ad ea quæ fiunt ex partib. a c, altera in alteram ductis, quæ partes ab ipſis fiunt perpendicularibus, eam habent proportionem, quam quadratum b t ad quadratum t n. & b t, minor eſt ipſa t n, quoniam & m t minor eſt ipſa t n: etenim m b minor eſt b r. Hoc enim eſt in ſectionib. coni obtuſianguli accidens. Conſtat igitur, ſectionem eſſe coni acutianguli ſectionem, & maior eius diametros a c. Similiter exeunte n r perpendiculari in ſectione coni obtuſianguli, diametros eius maior erit c l.

SI ſphæroides oblongum plano ſecetur ſuper axem non erecto, ſectio huiuſmodi erit coni acutianguli ſectio, eius maior diametros erit linea quæ pars cõmunis ſectionis duũm planorum exiſtit, eius quod ſecat, & eius quod per axem ductum eſt, erectum ſuper planum ſecans, quæ linea intra ſphæroides in ſecando intercipitur. 15

Si enim ſecetur per axem, aut axi æquediſtãter, manifeſtum eſt. Secetur autem alio plano per axem ducto, erecto ſuper alterum ſecans, & eſto ſphæroidis ſectio a b c d, ſectio coni acutianguli: plani autem ſecantis eſto c a linea recta, axis autẽ ſphæroidis, & diametros ſe



ctionis coni acutianguli eſto b d, centrum autem q, & minor diametros eſto p r: Ducatur autẽ b t perpẽdicularis ad b d, & g n æquediſtans ipſi a c, cõtingens coni acutianguli ſectionem in puncto n. ducatur & m l per punctum q, æquediſtãs ipſi a c. Similiter iam his quæ prius dicta ſunt oſtendetur, quadrata perpendicularium earum quæ à ſectione ad a c ducuntur, ad ea quæ fiunt ex partibus a c altera in alteram ductis, eandem habere proportionem, quam quadratum b t ad quadratum

dratum t n. quod itaque huiusmodi sectio sit coni acutianguli sectio, patet: & quod diametros eius sit a c, item patet. Quod autem sit maior, ostendendum est. quod enim fit ex p q in q r, ad id quod fit ex m q in q l, eandem habet proportionem, quam quadratum b t ad quadratum n t: quia æquedistantes contingentibus sunt m l, & r p. minus autem est quod fit ex p q in q r, eo quod fit ex m q in q l, cum r q minor sit q l. Minus igitur est quadratum b t, quadrato m t: quare & quadrata perpendicularium, quæ a sectione ad a c ducentur, uel ductæ sunt, minora erunt his quæ fiunt ex partibus a c, altera in alteram ductis. Manifestum igitur, quod a c est maior diametros.

Si sphæroides prolatum plano secetur, cætera erunt eadem supradictis: diametros uero minor erit, ea quæ intra sphæroides comprahendetur. Ex istis autē manifestum est, quod si planis æquedistantibus secentur, eorum sectiones erunt similes. Nam quadrata perpēdicularium ad ea quæ fiunt ex partibus, eandem inter se proportionem retinebunt.

16 SI in cuiuscunque conoidis rectanguli superficie puncta quæcunq; notentur, lineæ quæ ab eis ducentur, æquedistantes axi in eam partem in qua conoidis conuexa sunt, extra ipsum conoides cadunt: quæ autem in alteram partem trahuntur, eas intra ipsum cadere necesse est. Ducto enim plano per axem et per pūctum, à quo æquedistās axi ducta est, huiusmodi sectio est coni rectanguli sectio, diametrus uero eius axis conoidis. Verum in sectione coni rectanguli à quocunque signo in sectione sito, lineæ ducantur axi æquedistātes, quæ uersus eam partem in qua sunt eius conuexa trahuntur, extra sectionem cadere necesse est: quæ uero in alteram, intra cadunt. patet igitur propositum.

In conoidali obtusiangulo à quocunq; puncto in superficie eius sito lineæ ducantur, æquedistātes lineæ cuipiam quæ in conoidali existit, ducta à uertice coni eius qui conoidale complectitur, quæ in eam partem ducentur in qua eius conuexa existunt, extra conoidale cadunt: quæ uero in alteram partem, intra cadere necesse est. Ducto enim plano per lineam quæ à uertice coni complectentis conoidale intra conoidale ducta sit, & per punctum à quo ducitur æquedistans illi, huiusmodi sectio erit sectio coni obtusianguli, diametros eius linea quæ à uertice coni intra conoidale ducta est. In sectione autem coni obtusianguli, à quocunq; puncto in sectione sito ducantur lineæ æquedistantes, lineæ sic ductæ à uertice quæ in eam partem ducentur, ubi sunt eius conuexa, extra: quę uero in alterā partem trahentur, intra sectionem cadere necesse est.

Si quascunq; conoidales figuras planum quodcunq; contingat, non scindēs conoidale, in uno solo puncto cōtinget, & planū per axem, & per contactum ductū erectū erit super plano cōtingente. Cōtingat itaq; si fieri potest, in pluribus punctis: sumptis igitur duob. punctis, in quibus planum cōtingat conoidale, ab utroq; ducemus æquedistantes axi lineas, & ab his ductis educetur planum æquedistans axi. aut enim per axem, aut ęquedistanter axi ductum erit. quare sectionem faciet coni sectionem, & pūcta erunt in coni sectione sita. quoniam igitur sunt in una superficie, & in plano linea recta, quæ inter illa cadit, erit intra coni sectionem: quare & intra conoidalis superficiem existat. ipsa uero eadem recta linea est in plano contingente, quia & puncta



pũcta in ea sunt. erit igitur ut aliquid plani contingentis sit intra conoidale, quod esse non potest. nam supponebatur, non secare: in uno igitur solo puncto contin get. Quod autem planũ per contactum & per axem ductũ, erectum sit super contingens planum. Si enim in puncto uerticis conoidale cõtingat, patet nam duobus planis per axem ductis conoidalis sectionis, erunt coni sectiones, quæ diametrum habent ipsum axem: lineæ uero plani contingentis sunt, quæ sectiones conorum contingunt in extremitate diametri, quæ angulos rectos faciũt diametro sectionum. erunt igitur in plano contingenti duæ lineæ rectæ, angulis rectis ad axem directæ: erit igitur planum ipsum super axem erectũ. quare & planum per axem ductum, erit super illud erectum. Sed esto non contingat in uertice conoidalis planum. ducatur iam planum per contactum & axem, & sectio conoidalis sit b c coni sectio, axis autem sit & diametros sectionis b d: contingentis autem plani sectio sit e h f, linea recta contingens coni sectionem in puncto h: & perpẽdicularis ab ipso h ducatur h k ad b d, & planum statuatur erectum super axem. efficiat autem hoc planum sectionem, circulum cuius centrum sit k, sectio autem communis huius & contingentis plani erit contingens circulum: ergo faciet angulos rectos ad h k. quare erecta erit super plano, in quo sunt k h, b d. Cõstat igitur, planum contingens esse erectum super plano, cũ & lineæ rectæ sint in eodẽ.

17 SI utramuis figurarũ sphæroidum planum contingat, nõ scindendo figuram, in uno solo puncto eam cõtinget: & id planum quod per axem & cõtactum fuerit ductum, erit super plano contingenti erectum. Esto, si fieri potest, contingat in pluribus punctis. notentur itaq; hæc puncta, in quibus planum contingit sphæroidem, & ab utroq; horum ducantur lineæ rectæ æquedistantes axi: & ducto per illas plano, sectio fiet coni acutianguli sectio, & pũcta erũt in sectione coni: linea igit recta media inter pũcta, erit intra coni sectionem: quare & intra sphæroidis superficiem existet. ipsa autem recta linea in plano cõtingente situatur, quoniam & puncta sita sunt in eodẽ: plani igitur contingentis aliquid erit intra sphæroidem. non est aũt hoc uerum. nam suppositum fuit, planum nõ secare sphæroidem. Igitur manifestum est, quod in uno solo puncto contingit. Quod autem planum per axem & contactum actum, sit erectum super plano contingente, similiter sicut in conoidali figura ostensum fuit, & in hoc demonstrabimus.

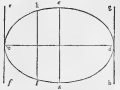
Si & sphæroidum figurarum utrauis plano scindatur, per axem ducto, & sectionem inde factam aliqua contingens linea recta ducatur, & per contingentem planum statuatur erectum super plano quod secet figuram, continget figuram secundum idem punctum, in quo linea eam contingit sectionem coni, non enim in alio puncto superficiei suæ eam cõtinget. Sin autem ducta perpendicularis à pũcto super planum scindens, incidet intra coni sectionem: nã super cõtingentem cadet, quoniam plana alternatim alterum super altero sunt erecta: quod esse non potest. nam ostensum est quod intra cadet.



18 SI aliquam sphæroidem figuram duo plana inter se æquedistantia contingant, linea recta quæ contactuum puncta coniunget, per centrum sphæroidis permeabit. Si plana fuerint super axem erecta, manifestum est quod dicitur. Cæterum esto non sint plana cõtingentia super axem erecta, planum ductum per axem, & alterum contactuum erectum erit super planum contingentis: quare & super æquedistans illi. necesse est igitur, planum per axem ductum, & per utrumq; contactum esse

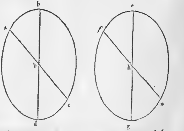
actum: si autem non, erunt duo plana super idem planum erecta, per eandem lineam ducta, quæ non sit super planum erecta. nam suppositum est, axem non esse erectum super plana æquedistantia. in eodem igitur erunt plano, axisq; & cõtactus ipsi, & secta erit sphæroides super axem: sectio igitur huiusmodi erit coni acutianguli sectio: sectiones autem planorum contingentium æquedistantes erunt, quæ contingent coni acutianguli sectiones in contactibus planorum. & si duæ rectæ lineæ inter se æquedistantes contingant coni acutianguli sectionem, centrum sectionis coni acutianguli, & puncta contactuum in eadem recta linea erunt sita.

19 SI quamcunq; figuram sphæroidem duo plana æquedistantia contingant, ducatur autem planum quoddam per centrum sphæroidis, æquedistans planis contingentibus lineæ rectæ, quæ ex facta sectione ducentur æquedistantes ei lineæ quæ ipsos contactus coniungat, extra sphæroidẽ cadẽt. Supponanť quæ dicta sunt, & notetur pũctum aliquod in sectione facta. Ex puncto igitur notato, & ex linea recta quę iungit cõtactus, ducatur planum. scindet autẽ hoc & sphæroidem, & plana æquedistantia. Esto igitur sphæroidis sectio a b c d, coni acutianguli sectio: sectiones autem planorum cõtingentium, sint e f, g h lineę rectæ. signum autem notatum a. ea uero quæ contactus cõiungit, sit b d. Ipsa igitur per centrũ transibit. sectio uero plani æquedistãtis contingentibus esto a c. ipsa quoq; in centrum cadet. nam et planum ipsum in quo ipsa est, per centrũ trãsit. Quoniã igitur a b c d, uel circulus est, uel coni acutianguli sectio, & ipsam contingunt duę rectæ e f g h, per centrum autem ducta est eis æquedistans a c: manifestũ est quod ductæ à punctis a c, æquedistantes ipsi b d, contingent sectionem, & extra sphæroidẽ cadent. Si aũt planum æquedistans punctis contingentib. non sit per centrum actũ, esto k l. manifestũ est, illæ quæ à recta ex sectione facta in eam partem efficientur, in qua portio minor existat, extra sphęroidem cadent: quę autem in alteram partem ducentur, intra sphæroidem cadere oportere probatum est.



20 QVælibet figura sphæroides plano per centrũ ducto secta in duo æqua, ipsa & eius superficies secatur à plano.

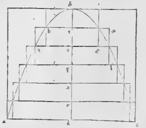
Secetur itaq; figura sphæroides à plano per centrum ducto, aut secundum axem, aut erecto, aut non erecto super axem plano secabitur. si secundum axem, uel plano super axẽ erecto fuerit secta, patet quod ipsa & eius superficies in duo æqua diuiditur, nam manifestum est, quod altera eius



eius pars alteri coaptaẽ, & alterius partis ſuperficies ſuperficiei alterius. Sed eſto non ſecundum axem, neq; plano ſuper axem erecto ſecetur: ſecta ipſa ſphæroide à plano ſuper primum planum ſecans erecto, ſit ſectio a b c d, coni acutianguli ſectio: eius diametros & axis ſphęroidis eſto b d, & centrũ h: plani aũt quod per centrũ ſphæroidẽ diuiſerit, eſto ſectio a c linea recta. Sumatur item altera ſphæroides huic ſimilis & ęqualis, & ſecta ipſa ſecundũ axem à plano, eſto eius ſectio e f g n, coni acutianguli ſectio: diametros uero eius & axis ſphæroidis eſto e g, centrum k. & per k ducatur f n, faciens angulum k æqualem angulo h: à linea uero f n, educatur planum erectum ſuper planum in quo eſt e f g n ſectio: erunt iam conorum acutianguli ſectiones a b c d, f g n, æquales & ſimiles. aptatur itaq; altera alteri, poſita e g ſuper b d, & f n ſuper a c. aptatur etiam planum quod eſt ſecundum n f, plano quod eſt ſecundum a c: quoniam ab eadem linea ſuper idem planũ conſiſtit utrumq;. aptabitur ergo & portio ſecta ex ſphæroide à plano ſecundum n f conſtituto, quæ eſt in parte ubi eſt e, alteri portioni ſectę ex altera ſphæroide à plano ſecundum a c ducto, quæ eſt in parte in qua eſt b: & reliqua ſectio reliquæ ſectioni, & ſuperficies portionum ſuperficiebus ſimiliter. Rurſus e g poſita ſuper b d, ſic ut e ſuper d ſitum ſit, & g ſuper b, linea media inter punctum f n, ſuper lineam inter puncta a c conſtituta: manifeſtum eſt, quod & conorum acutianguli ſectiones inuicẽ aptabunẽ altera ſuper alterã, & f cadet ſuper c, & n ſuper a. ſimiliter autem & planum quod eſt ſecundum n f, aptabitur plano ſecundum a c ducto: & portionum quæ à plano ſecundum n f ducto ſectæ ſunt, illa quidem quæ ad partem g, aptabitur portioni à plano ſecundũ a c acto ſectæ, quæ eſt in parte b. illa uero quæ eſt in parte e, aptabitur illi quæ eſt in parte d. quoniam igitur eadem portio utriq; portionum adæquabitur, manifeſtum eſt quod portiones erunt æquales, & eadem ratione earum erunt ſuperficies æquales.

DAta quacunq; conoidalis portione, quæ ſit abſciſa à plano ſuper axem erecto, data etiam quacunq; ſphæroidis portione ſimiliter abſciſa, quæ dimidia ſphæroide minime maior exiſtat, fieri poteſt ut portio ſolida una ei inſcribaẽ, altera circumſcribatur ex cylindris habentibus altitudinem æqualem confecta, ita ut figura circumſcripta addat ſuper figuram inſcriptam, quacunq; ſolida quantitate minus. Detur portio qualis eſt a b c: ſecta aũt ipſa plano ſecundum axẽ ducto, eſto portiõis ſectio a b c, coni ſectio: plani autẽ quod portionẽ ſecuit, ſit ſectio a c linea recta: & eſto portionis axis, & diametros ſectionis b d. quoniam igitur ſuppoſitum eſt, planum ſecãs eſſe erectum ſuper axem ſectio circulus erit. eius diametros ſit a c: & ab hoc circulo cylindrus extruatur, qui axem habeat b d: ſuperficies autem eius cadet extra portionem. quia eſt aut conoidale, aut ſphæroides, non maius dimidio ſphæroide. hoc cylindro aſſiduè in duo æqua ſecto, à plano ſuper axem erecto, fiet

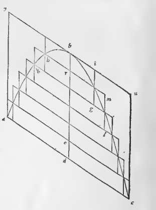
21



tandem ut reſiduum erit ſolida quantitate data minus. Eſto reliquum ab eo cylindrus, qui baſem habeat circulum circa diametrum a c conſtitutum, axem autẽ e d:

minorq́; sit data quantitate solida. diuidatur itaq; b d in partes æquales e d, punctis r o p x: & à diuisionibus ducantur lineæ rectæ æquedistantes ipsi a c ad coni sectionem. ab his autem ductis, educantur plana erecta super b d: erunt igitur quæ inde fient sectiones, circuli quorum centra erunt in b d linea. ab utroq; itaq; horum circulorum duo cylindri extruantur, quorũ uterq; habeat axem æqualem ipsi e d, alter quidem in parte cylindri uersus d, alter uero in parte uersus b, erit iã quædam in portione solida figura inscripta ex cylindris cõposita, qui in eam partem effecti sunt in qua est d: & altera item circumscripta, composita ex illis cylindris, qui in partem in qua est b, sunt ducti. Reliquũ est ut ostendamus, quod circumscripta addit super inscriptam, data solida quantitate minus. Vnusquisque ergo cylindrorum qui figuræ sunt inscripti, est ęqualis cylindro qui ab eodem circulo uersus partem b exeat, sicut h g ipsi h i, & k l ipsi k m, & reliqui tantundem, & omnes cylindri omnibus sunt æquales. manifestum est igitur, quod figura circumscripta inscriptam superat cylindro, qui basim habet circulum circa diametrũ a c constitutum, axem uero e d. hic autem minor est solida quantitate proposita.

22 PORtione conoidalis quacunq; data, quæ à plano super axem non erecto abscisa fuerit, & data item sphæroidis portione quacunq;, similiter abscisa, quæ dimidia sphæroide minime maior existat, fieri potest ut altera portioni inscribatur solida figura, altera uero circũscribatur ex cylindris, sectionibus, altitudinem altitudini sectionis æqualem habentibus compositam: hoc pacto, ut figura circũscripta addat super inscriptam minus quacunq; solida quantitate data. Detur portio qualis dicta est: ipsa uero figura secta alio plano secũdum axem ducto, & erecto super plano portionem secante, ipsius quidẽ figuræ sectio sit a b c d, coni sectio: ipsius aũt plani, quod portionẽ abscidit, esto sectio c a linea recta. quia igitur positum est, planum abscindens portionem non esse erectum super axem, sectio erit coni acutianguli sectio, eius autem diametros a d: sit u y contingens sectionem coni in puncto b, & secundum ipsam u y educatur planum æquedistãs plano secundum a c ducto: hoc continget figuram in puncto b: & siquidem fuerit portio conoidalis rectanguli, à pũcto b ducatur æquedistãs axi b d. Si uero fuerit conoidalis obtusianguli, à uertice coni comprehendentis conoidale, recta linea ducta ad b, extra ducatur b d: si autem sphæroidis linea recta ducta ad b, sit intercepta b d: manifestũ est quod b d diuidit a c in duo æqua, erit igitur b uertex portionis, & b d axis. Iam est coni acutianguli sectio circa diametrum a c, & linea b d à centro erecta in plano, erecto super planum in quo est coni acutianguli sectio, alio



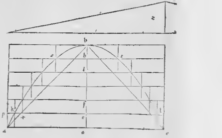
plano

plano ſecundum alterum diametrum conſtituto: poteſt igitur cylindrus conſtrui qui axem habeat b d, in cuius ſuperficie erit data coni acutianguli ſectio circa diametrum a c cõſtituta, eius autem ſuperficies cadet extra portionem, quoniam eſt aut conoidalis aut ſphæroidis portio, & non maior dimidia ſphæroide. Erit igitur quoddam cylindri fruſtum, quod baſim habet coni acutianguli ſectionem circa a c diametrum conſtitutam, axem uero d b, hoc autem fruſto in duo diuiſo planis æquediſtãtibus, plano ſecundum a c ducto, erit reſiduum minus ſolida quantitate propoſita. Eſto fruſtum, quod habeat baſim coni acutianguli ſectionem, diametrum a c, axem uero e d, minus ſolida quantitate propoſita: diuidatur a b in partes æquales e d, & à punctis diuiſionum ducantur lineæ rectæ, quæ æquediſtent a c, erunt erectæ ſuper coni ſectionem: ab his exeant plana æquediſtantia plano ſecundum a c ducto. ſecant itaq; hæc ſuperficiem portionis, & erunt huiuſmodi conorum acutianguli ſectiones ſimiles illi quæ eſt circa diametrum a c: quia plana æquediſtantia ſunt. In unaquaq; igitur coni acutianguli ſectione extruantur cylindri fruſta duo, hoc quidem in parte ſectionis coni acutianguli uerſus d, illud autem uerſus b, quæ axem habeat æqualem d e: erunt itaq; quædam figuræ ſolidæ, hæc quidem inſcripta portioni, illa uero circũſcripta eidem, quæ ex cylindri fruſtis componuntur. Reliquum autem eſt, ut oſtendamus quod figura circumſcripta ſuper figuram inſcriptam, minus addat ſolida quantitate propoſita. Oſtendetur autem hoc ſimiliter priori, quod figura circumſcripta excedit inſcriptam fruſto, quod baſim habet coni acutianguli ſectionem, quæ circa diametrum a c conſiſtit, axem uero e d. hoc autem minus exiſtit propoſita quantitate ſolida.

His itaq; hoc ordine præſtitutis, demonſtrabimus ea quæ de figuris propoſita fuerunt.

Omnis portio conoidalis rectanguli, quod ſectum fuerit plano ſuper axem erecto, ſeſquialtera eſſe probatur coni, qui baſim & axem eandem habeat cum portione. 23

Eſto itaq; portio conoidalis rectanguli abſciſa plano ſuper axẽ erecto, & ſecto ipſo conoidali ab altero plano ſecũdum axem ducto. eſto quidem ſuperficiei ſectio a b c, coni rectanguli ſectio. plani autem portionem abſcindentis ſit ſectio linea a c recta: axis uero portionis, b d. eſto item conus eandem baſim & eundem axem cum portione habẽs, cuius uertex ſit b. demonſtrãdũ eſt, quod portio conoidalis ſeſqaltera eſt huius coni. Exponatĩ itaq; conus z, q ſeſquialter ſit huius coni, cuius baſis circulus circa a c diametrum cõſtitutus: axis uero b d. Eſto autem cylindrus, qui baſim habeat circulum circa a c diametrum cõſtitutum, axem autem b d: erit igitur conus z dimidium huius cylindri, cum conus z ſit ſeſquialter eiuſdem coni. Dico igitur, portionem conoidalis æqualem eſſe cono z. nam ſi non eſt ęqualis, uel maior uel minor exiſtet.

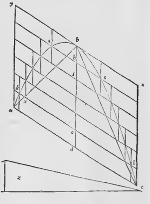


existet. Esto itaq; si fieri potest, maior: inscribatur aũt portioni quædam solida figura, & altera circumscribatur ex cylindris altitudinem æqualem habentibus, cõpositam hoc pacto, ut circumscripta super inscriptam minus addat eo, quo portio conoidalis excedit conum z: & sit maximus cylindrorum ex quibus figura circũscripta componitur, qui basim habeat circulum circa diametrum a c constitutum, axem uero e d. eorum autem minimus sit ille qui basim habeat circulum circa s t diametrum descriptum, axem uero b i. Cylindrorum uero ex quibus figura inscripta componitur, maximus sit ille, qui basim habeat circulum circa k l constitutum, axem uero d e. minimus autẽ, qui basim habeat circulum circa s t diametrũ, axem autem h i. Educantur autem plana omnium cylindrorum ad superficiem cylindri, qui basim habeat circulum circa a c diametrum descriptum, axem uero b d: erit iam totus cylindrus dissectus in cylindros, qui multitudine erunt æquales illis qui sunt in figura inscripta compræhensi, magnitudine uero æquales eorum maximo. & quoniam circumscripta figura portioni minus addit super inscriptam, quàm portio super conum, constat figuram inscriptam maiorem haberi cono z. Primus autem cylindrus eorum qui sunt in toto cylindro, qui axem habet d e, ad primum cylindrum eorum qui in figura portioni inscripta habentur, habentem axem d e, eãdem habet proportionem, quam d a habet ad k e potestate. Hæc autem eadem est illi quam habet b d ad b e, & quam habet d a ad e x. similiter ostenditur, secundus cylindrus eorum qui sunt in toto cylindro, qui axem habet e f, ad secundum cylindrũ eorum qui sunt in figura inscripta, eandem habere proportionem, quam p e, hoc est d a, ad q f. & unusquisq; cæterorũ qui sunt in toto cylindro, ad cylindrum in figura inscripta, qui basim habeant eandem, eãdem habebit proportionem, quam dimidia diametros basis suæ, habet ad eam sui partem quæ intermedia linearum rectarum a b, b d compræhenditur. & omnis cylindri, qui in cylindro compræhenduntur, cuius basis est circulus circa a c diametrum descriptus, axis uero d i linea recta, ad omnes cylindros in figura inscripta compræhensos, eandem habebunt proportionem, quam omnes rectæ lineæ ex centris circulorum eductę, qui sunt in basibus dictorum cylindrorum, ad omnes lineas rectas inter medium a b & b d interceptas. Dictæ uero lineæ rectæ sunt dictis, dempta a d, plusquam dupla. quare & cylindri simul omnes qui in toto sunt cylindro, cuius axis est d i, erunt plus quàm dupli figuræ inscriptæ: multo magis autem totus cylindrus, cuius axis est b d, existet plus quàm duplus figuræ inscriptæ. Idem uero erat coni z duplus. figura igitur inscripta minor erit cono z, quod est contra id quod positum fuerat. nam posita fuerat maior: non est igitur portio conoidalis maior cono z. Similiter autem neq; minor. Rursus enim inscribatur figura, & circumscribatur hoc pacto ut altera alteram excedat minus eo quo conus z excedit portionem conoidalis, & cætera ut suprà similiter disponantur. Quoniam igitur inscripta figura portione minor existit, & inscripta minus exceditur á circumscripta, quàm portio à cono, patet quod circumscripta minor est cono. Item primus cylindrus in toto cylindro existens, qui axem habet d e, ad primum cylindrum eorum qui in figura circumscripta existunt, eundem qui habet axem e d, eam habet proportionem, quam quadratum a d ad ipsum idem. Secundus autem cylindrus eorum qui sunt in toto cylindro, qui habet axem e f, ad secũdum cylindrum in figura circumscripta collocatum, qui basim habet e f, eandem habet proportionem quam d a ad k e potestate: hæc autem est eadem ei quam habet b d ad b e, & ei quam habet d a ad e x. & reliquorum cylindrorum unusquisque qui in toto cylindro sunt, qui habeant axem æqualem d e, ad unumquemque cylindrorum qui sunt in figura circumscripta, qui habent eandem axem, habebit eam proportionem quam dimidia basis eius ad eam sui partem, quæ inter a b, b d interducitur media: & omnis cylindri in toto cylindro existẽtes, quorũ axis est b d

lineæ

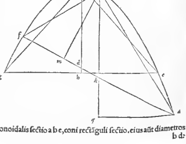
linea recta, ad omnis cylindros in figura circumscripta collocatos eam habebunt proportionem, quam omnes rectæ lineæ ad omnes lineas rectas: ipsæ autem omnes rectæ, quæ ex centris circulorum exeunt, qui bases sunt cylindrorum ad rectas lineas omnes quæ ab ipsis assumptę sunt, simul cum a d minores sunt, quàm duplæ. manifestum igitur, quod cylindri omnes qui in toto cylindro existunt, minores erũt quàm dupli ad cylindros in figura circumscripta existentes. cylindrus igitur, qui basim habet circulum circa diametrum a c constitutum, axem autem b d, minor existet quàm duplus circumscriptæ figuræ. non est autem sic, uerum maior quàm duplus eadem. nam coni z duplus existit. Et ostensum est figurã circumscriptam cono z esse minorem. non igitur conoidalis portio cono z minor. & ostensum est, quod neq; eo maior habetur. quare eam esse sesquialteram coni habentis basim, & axem cum portione eundem, necessariò conclusum est.

Si à conoidali rectangulo portio abscindatur plano super axem non erecto, similiter sesquialtera esse probatur portionis abscissæ à cono quæ basim & axẽ eundem habet, cum ipsa portione. 24 Esto portio conoidalis rectanguli abscissa uti proponitur, & ipso secto à plano secũdum axem ducto, erecto super planum quod abscindit portionem, figuræ quidem sectio esto a b c, coni rectanguli sectio: plani uero abscindentis portionem esto a c linea recta. ducatur autem u y æquedistans ipsi a c, et contingens coni rectanguli sectionem in puncto b. & ducatur b d æquedistans axi. Hæc autẽ iam in duo diuidit ipsam a c. planum autem ab u y educatur, æquedistãs plano quod est secundum a d. cõtinget autem hoc conoidalem in puncto b, & erit portionis uertex punctum b, axis autem b d. Quoniam igitur planũ quod est secundum a c, nõ erectum super axẽ, secat conoidalem, sectio huiusmodi erit coni acutianguli sectio. eius autem maior diametros a c. Cum itaque sit circa a c diametrum coni acutianguli sectio, & linea b d sit à centro sectionis coni acutianguli erecta, in plano erecto ex diametro super plano in quo ipsa est coni acutianguli sectio, cylindrus poterit effingi qui axem habeat in linea recta a b d, in cuius superficie existet ipsa coni acutianguli sectio: poterit etiã conus effici, qui uerticẽ habeat pũctum b, in cuius superficie existet ipsa coni acutianguli sectio, & frustũ cylindri quoddam quod basim habeat ipsam coni acutianguli sectionem circa a c diametrum collocatam, axem autẽ b d: & portio coni qui basim habeat eandem cũm frusto & portione, & axem eũdem. Est igitur ostendendum, conoidalis portionem huiusmodi abscisoris coni esse sesquialteram. Esto itaq; z conus sesquial-



ter huius abscisoris coni prædicti. erit igitur cylindri frustum, quod basim habeat eandem cum abscisore, & axem eundem, duplus coni z. hic namq; sesquialter exi stit abscisoris coni, basim habentis eandem cum portione, & axem eundem. abscisor autem coni dictus tertia pars existit frusti cylindri, basim & axem habentis eũdem cũ portione. Dico itaq; necesse esse portionẽ conoidalis cono z esse æqualẽ. nã si non ęqualis erit, maior aut minor eo existet. Esto primũ maior, si fieri potest: inscribatur itaq; portioni quædam solida figura, & altera circumscribatur ex frustis cylindrorũ composita, quæ basim habeant & altitudinem æqualem inter se, hoc pacto, ut figura circũscripta super inscriptam figuram addat minus eo, quo portio conoidalis excedit conum z: & plana frustorum erunt ad superficiem frusti basim habentis eandem cum portione, & axem eundem. Rursus itaq; primũ frustum eorum quæ in toto frusto quod habet axem d e, ad primum frustum eorum quæ sunt in figura inscripta, quod habet axem d e, eam habet proportionem quam quadratum a d, ad quadratum k e. nam si frusta æquam altitudinem habentia, eandem inuicem proportionem suis basibus habeant, bases autẽ eorum cum sint similes conorum acutianguli sectiones, eandem habent inter se proportionem, quam diametri eius rationis suæ potestate: sunt autem diametrorũ eiusdem rationis dimidiæ lineæ a d, k e. quam autem habet proportionem a d ad ipsam k e potestate, eam habet b d ad b e lõgitudine, cum b d diametro æquedistet. ipsæ uero a d, k e æquedistant ei quæ secundum a c, puncto b contingit: quam autem proportionem habet b d ad b e, hanc habet a d ad e x. Primum igitur frustum eorum qui sunt in toto frusto, ad primũ frustum in figura inscripta collocatum, eam habet proportionẽ, quam a d ad e x: & reliquorum eorum quæ sunt in toto frusto unumquodq;, quod habet axem æqualem ipsi d e, ad unumquodque frustorum quæ sunt in figura inscripta, quod habeat axem eundem, habet eãdem proportionẽ quam dimidia diametri basium eius ad eam quæ ab ipsa est media, intersecta inter a b, b d. Ostendetur autem similiter superioribus inscriptam figuram maiorem esse cono z, & cylindri frustum quod basim habeat & axem cũ portione eundem, maius esse quàm duplum figuræ inscriptæ: quare etiam coni z maius esse quàm duplum. Hoc autem non est uerum, sed duplum existit: non est igitur maior portio conoidalis cono z. Eadem ratione ostẽdetur, quod neq; minor. Vnde constat, esse æqualem. & ideo portio conoidalis coni basim eandem, & axẽ cum portione eundem habentis, sesquialtera esse probata est.

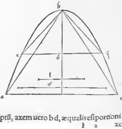
29 SI conoidalis rectanguli duæ portiones abscindantur, duob. planis, altero sup axẽ erecto, altero non super axẽ erecto, sintq; portionũ axes ęquales, ipsas quoq; portiones ęquales esse necesse est. Abscindantũ itaque à conoidali duę portiões, ut dictũ est: secto itaq; conoidali secũdũ axẽ plano ducto, & altero plano super axẽ erecto, esto conoidalis sectio a b e, coni rectãguli sectio. eius aũt diametros



b d:

b d: planorum uero sint sectiones a f, e c lineæ rectæ: eius quidem quod est super axem erectum sit e c, nõ erecti uero super axem sit a f. axes autem portionum sunto b h, k l inuicem æquales, uertices uero puncta b l: demonstrandum est, quod portio conoidalis cuius uertex est b, portioni conoidalis cuius uertex est l, existit æqualis. Quoniam igitur ab eadem coni rectanguli sectione coni duæ portiones sunt abscisæ, a l f, & e b c, & earum sunt diametri æquales k l, b h, triãgulus a l k æqualis est triangulo e h b. ostensum est enim, triangulum a l f triangulo e b c esse æqualem. ducatur iam a q perpendicularis super k l eductam: & quoniam b h, & k l sunt ęquales, sunt quoq; e b & a q æquales. Esto itaq; in portione cuius uertex est b conus inscriptus, eandem basim & axem eundem habens cum portione: in portione uero cuius uertex l, sit abscisor coni eandem basim & axem eundem cũ portione habens: ducatur autem perpendicularis ab l super a f, quæ sit l n: erit iã ipsa altitudo abscisoris coni, cuius uertex est l. abscisor autem coni cuius uertex l, & conus cuius uertex b, habent inter se proportionem compositam, ex basiũ proportione, & ex altitudinum proportione. habent itaq; proportionem compositam ex proportione, quam habet spacium contentum à sectione coni acutianguli circa diametrum a f constituta, ad circulum circa diametrum e c descriptum, & ex proportione quam habet n l ad b h. spacium autem ab coni acutianguli sectione contentum ad eundem circulum eam habet proportionem, quam id quod fit ex diametris altera in alteram ductis ad quadratum e c. & abscisor coni cuius uertex est l, ad conum cuius uertex est b, habet proportionem compositam ex proportione, quam habet k a ad e h, & ex proportione quam habet n l ad b h. at uero k a dimidia est diametri basis abscisoris coni, cuius uertex est l: ipsa uero e h, dimidia est diametri basis coni: ipsę autem l n, b h sunt eorum altitudines. habet autem l n ad b h eandem proportionem, quam habet ad k l, cum b h sit ipsi k l æqualis: habet etiam l n ad k l eam, quam q a ad a k: habet quoq; abscisor coni ad conũ proportionem compositam, ex ea quam habet a k ad a q. nam a q ęquatur ipsi e h, & ex ea quam habet l n ad h b. Composita autem ex dictis proportio, scilicet a k, ad a q, eadem est ei quam habet l n ad l k. abscisor ergo habet ad conum eam proportionem, quam l n ad l k, & quam habet l n ad b h. b h autem æquatur ipsi l k. manifestum est igitur, quod abscisor coni cuius uertex est l, æquatur cono cuius uertex est b. Ex quo constat portiones quoq; æquas esse, cum altera earum coni sesquialtera sit, altera item abscisoris coni sesquialtera, cũ hic & ille sint æquales.

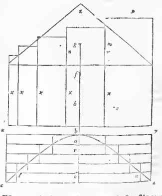
SI à conoidali rectangulo duæ portiones abscindantur planis utcunq; ductis, portiones habebunt eam inter se proportionem, quam quadrata axium inter se retinuerint. Abscindantur itaque duæ à conoidali rectãgulo portiones, utcunq; contigerit. Esto autem k æqualis axi alterius portionis: l uero axi alterius item æqualis. Demonstrandum est, quod portiones eam babent proportionem inter se, quam habent quadrata k & l. sectio itaq; conoidali à plano secundum axem ducto, portionis esto sectio a b c, coni rectanguli sectio: axis autem b d. & assumatur b d æqualis ipsi k, & secundum d planũ educatur super axem erectum: portio autem conoidalis, quæ basim habet circulum circa diametrum a c descriptũ, axem uero b d, æqualis est portioni a- 26



xem habenti æqualem ipsi k. Siquidem igitur ipsa k sit æqualis ipsi l, manifestũ est portiones quoq; inter se esse ęquales. nam utraq; ipsarum erit æqualis uni & eidẽ, & quadrata ipsarum l k æqualia. quare eandem habebunt proportionem portiones, quam habuerint quadrata axium. Si aũt l non sit æqualis ipsi k, esto æqualis ipsa l ipsi b h & per punctum b ducatur planum erectum super axem: portio autem, quæ basim habuerit circulum circa diametrum e f descriptum, axem autem b h, æquatur portioni habenti axem æqualem ipsi l. Describantur iam coni, qui bases habeãt circulos circa diametros a c, e f constitutos, uerticem uero b punctũ. Conus aũt habens axem b d, ad conũ habentẽ axem b h, proportionem habet cõpositam ex ea quam habet a d ad h e potestate, & ex ea quam haber d b ad b h longitudine. quam autem proportionem habet d a ad h e potestate, eam babet b d ad b h longitudine. conus igitur babẽs axem b d, ad conum habentem axem b b, habet proportionem compositam ex ea quam habet d b ad b h, & ex ea quam habet d b ad b h. hæc autem est eadem illi quam habet quadratum d b, ad quadratũ h b. quam proportionem autem babet conus axem habens b d, ad conum habentem axem h b, hanc habet eandem portio conoidalis habens axem b d, ad portionem habentem axem h b. utraq; enim utriq; est sesquialtera: & portioni axem habenti b d æquatur portio conoidalis axem habens æqualem ipsi k. portioni autem habenti axem ipsam h b, æquatur portio conoidalis axem habens æqualem ipsi l, & ipsi b d æquatur k, ipsi uero h b æquatur ipsa l. Clarum est ergo, quod portio conoidalis axem habens æqualem ipsi k, eandem babet proportionem ad portionem conoidalis habentem axem æqualem ipsi l, quam quadratum k ad quadratum l.

27 QVælibet portio conoidalis obtusianguli abscisa plano super axem erecto, habet ad conum, qui eandem basim & axem cum portione teneat eundem, eam proportionem, quã habet utraque simul linea quæ sit æqualis axi portionis, et ea quæ sit tripla lineę ad axem adiectæ, ad lineã his utrisque æqualem, axi portionis & lineæ duplæ, ad lineam axi adiectam.

Esto aliqua portio conoidalis cuiuspiam obtusianguli, abscisa plano super axẽ erecto, & ipso conoidali secto à plano secundum axem ducto. eius sectio sit a b c coni obtusianguli sectio: plani autem abscindẽtis portionem esto a c, & axis item portionis esto b d: linea uero axi adiecta sit b h, & ipsi b h sit æqualis f h & g f. Demonstrãdum est itaq; portionem ad conum eandem basim cum portione, & axem eundem habẽtem, eam babere proportionem, quam g d ad d f.



Esto itaq; cylindrus quidam, eandem basim, & axem cum

cum portione eundem habens: eius uero latera esto u a, c y. Esto item conus quis in quo z, & hic ad conum habentem eandem basim cum portione, & axem b d, eam habeat proportionem, quam haber g d ad d f. Dico tunc portionem conoidalis æqualem esse cono z. Quod si non fuerit ei æqualis, aut maiorem eo, aut minorem esse necesse est. Esto primum, ut sit ea maior si fieri potest: inscribatur autem in portione quædam figura solida, & altera circumscribatur ex cylindris æquam altitudinem habentibus composita, hoc pacto, ut figura circumscripta super inscriptam minus eo addat, quo conoidalis portio superat conum z. educantur iam plana omnium cylindrorum ad superficiem cylindri, qui habeat basim circulum circa diametrum a c constitutum, & axem b d: erit tunc hic cylindrus totus distributus in cylindros numero ęquales cylindris, qui in figura inscripta sunt extructi: magnitudine uero æquales maximo illorum. & quoniam circumscripta figura minus excedit inscriptam, quàm portio conum z, & figura circumscripta maior est portione, constat inscriptam quoque cono z esse maiorem. esto itaque b r pars tertia ipsius b d, erit ergo g d tripla ad h r. Et quoniam cylindrus qui basim habet circulum circa diametrum a c descriptum, axem uero b d, ad conum eandē basim & axem eundem habentem, habet eam proportionem quam g d ad h r: dictus autem conus habet ad z conum, eam quam f d ad g d: proportionibus non mensis similiter permutatis, babebit dictus cylindrus ad z conum eādem proportionem, quam f d ad h r. Sunto autem lineæ positæ, in quibus x numero æquales portionibus eis quæ sunt in b d linea recta, magnitudine uero unaquæque æqualis f b: & ad unamquamque ipsarum accedat spacium, superans alterum forma quadrata, & eorum maximum esto in quo f b d, minimum uero quod sub f r b continetur: latera autem excessuum sese æqualiter excedūt. nam illæ sunt istis æquales, quæ in b d linea recta sese pariter excedunt. Et esto maximi excessus latus, in quo m æquale b d, minoris uero æquale b i. Sunto item alia spacia in quibus 9 multitudine istis æqualia, magnitudine uero unumquodque æquale maximo quod cōtinetur sub f d b. at uero cylindrus qui basim habet circulum circa a c d ametrum constitutum, axem autem d e, ad cylindrum qui basim habet circulum circa k l diametrū descriptum, axem aūt d e, eam habet proportionem, quam d a ad k e potestate. Hæc autem eadem est ei quam habet spaciū contentum sub f d, b d, ad cōtentum sub f e, b e. in omni enim coni obtusianguli sectione hoc contingit nam dupla eius quæ adiecta est, hoc est eius quæ ex centro obliquū est formæ latus, & spacium x m, est æquale ei quod continetur sub f d, b d. ei uero quod sub f e, b e ęquale est spacium x n. est enim b d linea æqualis ipsi m. b e autem ipsi n æqualis. Cylindrus igitur qui basim habet circulum circa diametrum a c descriptū, axem autem d e, habet ad cylindrum qui basim habet circulum circa diametrum k l constitutum, axem uero d e, eam proportionē, quam spacium 9 ad x m. Similiter autem ostendetur & unusquisque aliorum cylindrorum qui in toto cylindro existūt, axem æqualem habens ipsi d e, babere ad cylindrum existentem in figura inscripta, habentem eundem axem, eam proportionem, quam habet spacium 9 ad sibi correspondens, eorum quæ ad ipsam n x accesserunt, cætera excedens quadrato. Sunt autem quędam magnitudines bi cylindri, qui in toto cylindro existūt, quorum unusquisque axem habet æqualem ipsi d e: & aliæ item magnitudines ea spacia, quæ sunt in quibus 9 numero, illis æquales quæ secundum binas & binas eandem habent proportionem, cum cylindri sint inter se æquales, & spacia similiter in quibus 9 inuicem æqualia. Referūtur autem cylindrorum quidam ad alios quosdam cylindros, qui in figura inscripta existunt: extremus autem nullo pacto refertur: & spacia in quibus 9 ad alia spacia, ea scilicet quæ ad m x accesserūt, excedentia forma quadrata, similia sunt in proportionibus: extremū autem nullo pacto refertur. manifestum est, quod omnis cylindri qui in toto cylindro exi-

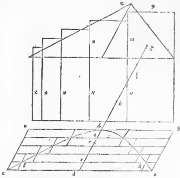
 stunt,

ſtunt, ad omnis cylindros in figura inſcripta conſtitutos eam habebũt proportionem, quã ſpacia in quibus 9 ad omnia exceſſa, dempto maximo. Oſtenſum eſt autem, quod omnia ſpacia in quibus 9, ad omnia acceſſa dempto maximo maiorem habent proportionem, quàm m x ad eam quæ ſit æqualis utriſq; ſimul iſtis, dimidiæ x & tertiæ parti ipſius m. quare & totus cylindrus ad figuram inſcriptam maiorem habet proportionem, quàm ſ d ad h r, quam totus cylindrus oſtenſus eſt habere ad conum z. totus ergo cylindrus maiorẽ habet proportionem ad figuram inſcriptam, quàm ad conum z. quare ſequitur, conum z maiorem eſſe figura inſcripta: quod quidẽ eſſe nõ poteſt. nam ſuprà oſtenſum fuit, figuram inſcriptã cono z eſſe maiorem: non eſt igitur portio conoidalis maior cono z. Neq; utiq; minor. Eſto enim, ſi eſſe poteſt. rurſus inſcribatur portioni figura ſolida, & altera circumſcribatur ex cylindris altitudinem æqualem habentibus compoſita, hoc pacto, ut circumſcripta figura addat ſuper inſcriptam minus eo quo conus portionem excedit, & cętera præparentur ut prius. Quoniam igitur figura inſcripta portione minor exiſtit, & circumſcripta inſcriptam minus excedit quàm conus z portionem, manifeſtum eſt, circumſcriptam figuram cono z eſſe minorem. Rurſus primus cylindrus eorum qui in toto cylindro exiſtunt, qui habet axem d e, ad primum cylindrum in figura circumſcripta conſtitutum, habentem axem d e, eam habet proportionem quam ſpacium 9 ad m x. nam utrumq; eſt æquale: & cæterum cylindrorum unuſquiſq;, eorum qui ſunt in toto cylindro, habens axem æqualem d e, ad cylindrum qui eſt in circumſcripta figura, in eandem partem exeuntem, & eundem axem habentem, eam habebit proportionem, quam ſpaciũ 9 ad ſpacium ſibi correſpondens, quod eſt adiectum ad m x ſimul cum exceſſu: propterea quod unumquodq; circumſcriptorum, dempto maximo, æquale eſt unicuiq; inſcriptorum ſimul cum maximo. Habebit igitur totus cylindrus ad figuram circumſcriptã eam proportionem, quã omnia ſpacia ad omnia adiecta, ſimul cũ exceſſibus. Oſtenſum eſt rurſus, omnia ſpacia 9 ad omnia alia minorem habere proportionẽ, quàm m x ad eam quæ ſit æqualis utriſq;, ſimul dimidiæ x & tertię parti m, quare & totus cylindrus ad circumſcriptam figuram minorem habebit proportionem, quàm f d ad h r. uerum ſicut ſ d ad h r, ſic totus cylindrus ad conum z. minorem igitur babebit proportionem ipſe cylindrus ad figuram circumſcriptam, quàm ad conum z. quare ſequitur, figuram circumſcriptam cono z eſse maiorem: quod quidem eſſe non poteſt. nam figura circumſcripta oſtenſa eſt eſſe minor cono z. non eſt igitur portio conoidalis cono z minor. Cum igitur neque maior, neq; minor eſſe poſſit, conſtat propoſitum eſſe demonſtratum.

28 SI portio conoidalis obtuſianguli abſcindatur plano etiam ſuper axem non erecto, eam proportionem habebit ad abſciſorem coni, baſim eãdem & axem eundem cum portione habentem, quam habent utræq; ſimul, linea æqualis axi portionis, & tripla ad adiectã axi, ad eam quæ ſit æqualis utriſq; ſimul, axi, & eius quæ dupla ſit ad axi adiectã. Eſto portio conoidalis obtuſianguli abſciſa plano ſuper axem non erecto: ipſa uero figura alio plano abſciſa ſecũdum axem ducto, erecto ſuper planum abſcindens portionem figuræ quidem: eſto ſectio a b c coni obtuſianguli ſectio, plani autem abſcindentis portionem eſto linea recta c a: uertex autem coni complectentis conoidale eſto punctum h, & ducatur u y per b æquediſtans ipſi a c, & contingens coni ſectionem in puncto b, & ducatur ab h ad b coniungens, & educatur in longum: diuidet propter eadem f æqualia ipſam a c, diuidet uerſus eam partem a c, & erit uertex portionis b punctum, axis autem b d. adiecta uero axi b h: ipſi autem b h æqualis eſto h f & f g, ab ipſa uero u y exear planum æquediſtans plano ſecundum a c educto. continget autem conoidale in puncto b, & erit planum ſecũdum a c eductum non ſuper axem erectum, & diuidet conoidale cuius ſectio erit coni acutianguli ſectio, diametros autem

eius

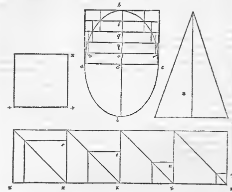
eius maior c a, cum sit alia coni acutianguli sectio circa diametrum a c, & recta linea b d à centro erecta in plano quod est à diametro erectum, super planũ in quo est coni acutianguli sectio. Potest igitur cylindrus effingi, qui axem habeat in linea recta b d, in cuius superficie sit coni acutianguli sectio circa diametrum a c cõstituta. hoc igitur effecto, erit quoddã cylindri frustũ, eandem habẽs cũ portiõe basim, & axem eundem: altera uero eius basis erit planũ, quod est secundum u y ductum. Item poterit etiam conus extrui, qui uerticem habeat pũctum b, in cuius superficie erit coni acutianguli sectio circa diametrum a c cõstructa, & axis idem. Hoc inuento, ostendendum est portionem conoidalis ad coni abscisorem dictum, eam habere proportionem, quam g d ad d f. sicut enim g d ad d f, ita sit conus z ad abscisorem coni. Dico portionem conoidalis esse æqualem cono z. Si igitur non est æqualis portio conoidalis cono z, si esse potest, sit maior. inscribatur autem figuræ conoidali figura solida, & altera circumscribatur ex frustis cylindri eandem altitudinem habentibus composita, hac ratione, ut circumscripta figura super inscriptam minus addat, quàm portio conoidalis super conum z. Cum igitur figura circumscripta sit maior portione, & minus excedat inscriptam figuram, quàm portio conum z: manifestum est sequi, inscriptam figuram cono z esse maiorem. educantur autem plana frustorum omnium, quæ in figura sunt inscripta, exibunt ad superficiem frusti basim babentis cum portione eandem, & axem eundem: & esto b r tertia pars ipsius b d, & cętera omnia similiter superioribus disponantur. Rursus itaq; primum frustum eorum quæ sunt in toto cylindri frusto, quod habet axem d e, ad primum frustum in figura inscripta constitutum, habens axem d e, eã proportionem habet, quam quadratum a d ad quadratum k e. nam frusta æqualem altitudinem habentia eam habent inter se proportionem, quam eorum bases habere contigerit: cum sint coni acutianguli sectiones similes, habebunt inuicem eam proportionem, quam earum diametri eiusdem rationis habuerint potestate: quam autem habet quadratum a d proportionem ad quadratum k e, eam habet id quod sub f d, d b continetur, ad id quod sub f e, e b: cum f d sit ducta per h, secundum eas quæ proxime concidunt & concurrunt: ipsæ uero a d, k e æquedistantes sunt eis, quæ secundum b contingunt. Est autem id quod sub f d, d b,



d b, continetur æquale ſpacio 9: quod autem ſub f e, e b, æquale x n. Habet igitur primum fruſtum in toto fruſto exiſtens, quod axem habet d e, ad primum fruſtũ in figura inſcripta conſtitutum, quod axem habet d e, eam proportionem, quam ſpacium 9 ad x n, & aliorum unumquodq; in fruſto toto exiſtentium, axem habẽtium æqualem ipſi d e, ad fruſtũ quod exiſtit in figura inſcripta, illi correſpondẽs, & axem habens æqualem ipſi d e, eam proportionem, quam 9 ſpacium ad ſibi correſpondens, eorum quæ acceſſerunt ad n x, quæ ſeſe excedunt forma quadrata. Similiter ſunt quædam magnitudines, quæ ſunt in toto fruſto: & aliæ rurſus magnitudines, ſpacia uidelicet, in quibus 9 numero quidem ęquales ipſis fruſtis, & binæ, eandem habent proportionem ipſis fruſtis. Dicuntur autem fruſta ad alia fruſta in figura inſcripta conſtituta, extremum autem fruſtum nullo pacto dicitur: ſpacia uero 9 ad alia ſpacia dicuntur, ad ea quæ ad m x acceſſerunt quadrata forma ſuperantia, ſimilia ſimilibus proportionibus. extremum aũt nullo pacto dicit̃. Conſtat igitur quod omnia fruſta ad omnia eandem habebunt proportionem, quã omnia ſpacia ad omnia adiecta, dẽpto maximo. Omnia uero ſpacia ad omnia adiecta, dempto maximo, maiorem habent proportionem, quàm n x ad eam quæ ſit utriſque ſimul æqualis, dimidiæ x & tertiæ parti m. quare & maiorẽ ea quam habet f d ad h r: maiorem ergo habet proportionem fruſtum totum ad figuram inſcriptam, quàm ad conum z. quod quidem eſſe non poteſt. Nam figura inſcripta fuit demonſtrata maior eſſe cono z. Non eſt igitur conoidalis portio cono z maior. Si autem ponatur conoidalis portio minor eſſe cono z, figura ſolida in portione deſcripta, & alia circumſcripta, ex cylindris altitudinem æqualem habentibus compoſita, ita ut circumſcripta inſcriptã eo minus excedat, quo conus z ponitur excedere portionem. Rurſus oſtendetur, ſimiliter circumſcriptã figuram cono z eſſe minorem, & fruſtũ cylindri quod baſim habeat cum portione eandem, & axem eundem, ad figuram circumſcriptam minorem habere proportionem, quàm ad conum z: quod eſſe non poteſt. Non eſt igitur portio conoidalis maior cono z, neq; minor eſſe poteſt. Neceſſe ergo eſt, æqualem eſſe. quare patet propoſitum.

29 CVIuslibet figuræ ſphæroidis plano per cẽtrum ducto, & erecto ſuper axem ſectæ, dimidium ſphæroidis duplum eſt coni qui baſim habet eandem cum portione, & axem eundem. Eſto ſphæroidis portio plano per centrum ducto, & erecto ſuper axem abſciſſa: ſecta uero ſphæroide alio plano ſecundum axem ducto, huius portionis ſectio ſit a b c d, coni acutianguli ſectio: eius autem diametros & axis ſphæroidis b d, centrum uero h, nihil autem intererit ſiue b d ſit maior diametros, ſiue minor ſectionis coni acutianguli: plani uero abſcindentis figuram ſectio ſit a c linea recta, & ipſa tranſibit per h, & rectos angulos faciet ad b d, cum planum ponatur per centrum duci, & ſuper axem eſſe erectum. Oſtendendum itaq; dimidiam ſphæroidis portionem, quæ baſim habet circulum circa diametrum a c deſcriptum, uerticem uero punctum b, duplam eſſe coni eius qui baſim habeat cum portione eandem, & axem eũdem. Eſto igitur conus quis, in quo z duplus coni baſim habentis cum portione eãdem, & axem eundem, ſcilicet h b. Dico dimidium ſphæroidis cono z eſſe æquale. Si enim dimidium dictum dicatur cono dicto minime æquale eſſe, eſto primũ ſi fieri poteſt maius eo, & iam inſcribatur portioni dimidiæ ſphæroidis figura ſolida, & altera circumſcribatur ex cylindris æqualem altitudinem habentibus compoſita, ita ut circumſcripta inſcriptam minus excedat eo quo dimidium ſphæroidis conum ſuperat. Cum igitur circumſcripta figura maior ſit dimidio ſphæroidis, & minus excedat figuram inſcriptam, quàm ſphæroidis dimidium excedat conum z, ſequitur figuram portioni inſcriptam cono z eſſe maiorem. Eſto iam cylindrus, qui baſim habeat circulũ circa diametrum a c conſtitutũ, axem uero b h. Quoniã igitur hic cylindrus triplus

plus habetur coni, qui basim habeat cum portione eandem, & axem eundem: conus uero z eiusdem coni duplus existit, constat cylindrum hunc cono z sesqui alterum haberi. Educantur itaq; plana omnia cylindrorum, ex quibus figura por



tioni inscripta conficitur, exibunt ad superficiem cylindri basim habentis cũ portione eandem, & axem eundem. erit iam totus cylindrus in cylindros distributus, qui multitudine sunt æquales in figura inscripta constitutis: magnitudine autem maximo illorum æquales. Sunto iam lineæ positæ, in quibus x multitudine æquales portionibus lineæ b h rectæ, magnitudine uero unaquæque æqualis b h: & ab unaquaq; quadratum constituatur, ab ultimo uero quadrato auferatur gnomon qui latitudinem habeat æqualem b i. erit autem hic æqualis ei quod continetur sub b i, i d: à quadrato autem ei proximo auferatur gnomon, latitudinem habens duplam ipsius b i: erit & hic ęqualis contento sub e q, q d. & perpetuò à quadrato sequente gnomon auferatur, latitudinem habens pręcedentis eum gnomonis, & ante eum ablati portionem maiorem: eritq; utiq; eorum unusquisq; æqualis ei quod sub portionibus b d continetur, quarum altera portio æqualis fuerit latitudini gnomonis. erit etiam à quadrato secundo reliquum quadratum, latus habens æquale h q. Cylindrus autem primus eorum qui in toto cylindro constant, axem habens b e, ad primum cylindrum eõrum qui in figura inscripta continentur, eundem axem h e habentem, eam habet proportionem, quam quadratũ a h ad quadratum k e: quare & quam contentum sub b d, d h, ad contentum sub b e, e d: habet igitur cylindrus ad cylindrum eam proportionem, quam quadratum primum habet ad gnomonem, à quadrato secundo ablatum. Similiter autem & aliorum cylindrorum unusquisq;, qui axem habeat æqualem ipsi h e, ad cylindrum in figura inscripta cõstitutum, axem cum eo eundem habentem, eam pro-

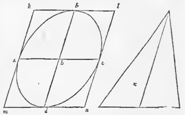
m portio-

portionem habet, quam quadratum sibi similiter ordinatũ, ad gnomonem à quadrato sibi proxime subsequenti ablatum: erunt iam quædam magnitudines, uidelicet cylindri qui sunt in toto cylindro, & item aliæ, scilicet quadrata linearum x x æquales multitudine cylindris: & binæ & binæ eandem habent proportionem. Dicuntur autem cylindri ad alias magnitudines, ad cylindros uidelicet in figura inscripta constitutos: extremus nullo pacto dicitur. & quadrata quoque ad alias magnitudines, ad gnomones à quadratis ablatos, similia similibus relata eisdem proportionibus: ultimũ autem quadratum nullo pacto dicitur. Omnis igitur cylindri in toto cylindro comprehensi, ad omnes cylindros alios eandem habebunt proportionem, quam quadrata omnia ad omnis gnomones ab eis ablatos. quare cylindrus qui basim habet eandem cum portione, & axem eũdem, ad figuram inscriptam eam habet proportionem, quam quadrata omnia ad gnomones omnis ab eis ablatos. quadrata uero omnibus gnomonibus, qui ab ipsis ablati fuerunt, sunt plusquam sesquialtera: sunt enim quædã lineæ positæ hæ x r, x s, x t, x y, x u, æquali sese excedentes, & minima earum æquatur excessui. Sunt autem & aliæ lineæ, in quibus x x multitudine quidẽ istis æquales, magnitudine uero unaquæque æqualis earum maximæ. quadrata igitur quæ ab illis efficiuntur, quarum unaquæque æqualis est maximæ, ad quadrata omnia quæ ab illis nascũtur, quæ sese æquali excessu superãt, minus quàm tripla esse probatum est: ad reliqua uero, dẽpto maximo, plusquam tripla existunt. hoc enim in his quæ circa elicas sunt exposita, demonstratum est. Quoniam autem omnia quadrata minus sunt quàm tripla, ad alia quadrara quæ ab ipsis ablata fuerunt, manifestum est quod residuorũ erunt plusquam sesquialtera: quare erunt omnium gnomonum plusquam sesquialtera. quare & cylindrus qui basim habet eandem cum pornone, & axem eũdem, est plusquã sesquialter figuræ inscriptæ: quod quidem esse nõ potest. Nam coni z sesquialter existit. figura uero inscripta ostensa est maior esse cono z. non est igitur dimidium sphæroidis cono z maius: neque profectò minus. Nam esto si fieri potest, minus. Rursus inscribatur dimidio sphæroidis figura solida, & altera circumscribatur ex cylindris æquam altitudinem habentibus composita, ita ut circumscripta super inscriptam minus addat quàm conus z super dimidium sphæroidis: & reliqua sint prioribus similiter disposita. Quoniam igitur figura inscripta portione minor existit, sequitur circumscriptam figuram cono z esse minorẽ. Rursus primus cylindrus eorum qui in toto cylindro existunt, qui habet axem h e, ad primum cylindrum eorum qui in figura circumscripta cõstructi sunt, qui habet axem e h, eam habet proportionem, quam quadratum primum ad ipsummet. Secundus autem cylindrus eorum qui in toto cylindro, habens axem e p, ad secundum cylindrum eorum qui in circumscripta figura existunt, habentem axem e p, eam habet proportionem, quam secundum quadratum ad gnomonẽ ab eo ablatum, & reliquorum cylindrorum, qui in toto cylindro continentur unusquisque qui axem habeat æqualem h e, ad cylindrum sibi coniunctum, eorum qui sunt in figura inscripta, eandem habet proportionem, quam habet quadratum sibi correspondens ad gnomonem ab eo ablatum. Omnis igitur cylindri in toto cylindro constituti, ad omnis cylindros in figura circumscripta comprehẽsos, eam habebunt proportionem, quam quadrata omnia ad id quod primo quadrato æquale est, & ad omnes gnomones à reliquis quadratis ablatos: & quadrata omnia sunt minus quàm sesquialtera eius quod primo quadrato æquale existit, & gnomonum à reliquis ablatorũ: propterea quod quadratis quæ à lineis sese æqualiter excedentibus sunt producta, dempto quadrato à maxima earũ producto, plusquam tripla existunt. Cylindrus igitur qui basim cum pornone habet eandem, & axem eũdem, est minor quàm sesquialter figura circumscripta: quod quidem esse non potest, nam cono z sesquialter habetur: circumscripta uero figu

ra

ra ostensa est cono z minor esse: non erit igitur dimidium sphæroidis cono z minus: uerum neq; maius, necesse est igitur esse æquale.

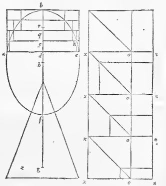
SI figura sphæroidis plano secetur per centrum ducto, super axem non erecto, dimidium sphæroidis similiter duplum existet absciſsoris coni, qui quidem absciſsor basim habeat cum portione eandem, & axem eundem. Secetur itaq; portio sphæroidis, secta ipsa spheroide alio plano secundũ axem ducto, & super planum secans erecto, ipsius figuræ sectio sit a b c d, coni acutiãguli sectio: cuius centrum sit h: plani autẽ abscindentis figurã esto a c linea recta: erit ipsa per h ducta, cum planum positum sit per centrum duci. erit igitur quædam coni acutianguli sectio circa diametrum a c constituta. nam planum abscindens positum est, non super axem erectum esse. Ducantur iam quædam k l, m n, æquedistantes ipsi a c, & contingentes sectionem coni acutianguli in punctis b, d: & ab ipsis k l, m n plana prodeant æquedistantia plano secundum a c ducto, quæ & ipsam sectionem sphæroidem contingent in punctis b, d: & quæ iungit b d linea transibit per h, & erunt portionum uertices puncta b, d: axes uero b h, h b. Potest itaq; cylindrus effingi, qui axem habeat b h, in cuius superficie sectio coni acutianguli continetur, quæ circa diametrum a c est constituta. eo autem effecto, erit quoddam cylindri frustum, quod eandem habeat cum dimidia sphæroide basim, & axem eundem. Rursus & conus effici potest, qui uerticem habeat punctum b, in cuius superficie sectio coni acutianguli existet à diametro a c. eo pacto erit absciſsor coni, qui eandem cum portione basim, & eũdem axem habebit. Dico iam, quòd sphæroidis dimidium huius coni duplum existet. Esto conus z duplus ad absciſsorem coni. si dimidium sphæroidis dicatur cono z non esse æquale, esto primum si fieri potest maius. inscribatur autem in dimidia sphæroide figura solida, & altera circũscribatur ex cylindricis frustis altitudinem æqualem habentibus composita, hoc pacto ut figura circumscripta excedat figuram inscriptã, minus eo quo dimidia spheroidis excedit conum z. Iam simili ratione qua superius factum est, ostendetur figuram inscriptam cono z maiorem existere, & frustum quod basim habeat cum portione eandem, & axem eundem cono z sesquialterum existens, figura inscripta dimidiæ sphæroidi maius quàm sesquialterum esse, quod esse non potest. non erit ergo dimidia sphæroidis cono z maior. Si uero minor illo ponatur esse, inscribatur dimidiæ sphæroidi figura solida, & altera circumscribatur ex frustis cylindri æqualem altitudinem habentibus composita, ita ut circumscripta excedat inscriptam minus eo quo conus z excedit dimidiam sphæroidem. Rursus similiter superioribus demonstrabitur, figuram circumscriptam minorem esse cono z, & frustum cylindri quod basim habeat cũ portione eandem, & axem eundem, cono z sesquialterum esse: circumscriptæ uero figuræ minus quàm sesquialterum haberi, quod esse non potest. Conus itaq;



z, neq; minor dimidia sphæroide poterit, neq; maior haberi. æqualis igitur esse illi necessariò relinquitur, quod demonstrare uolebamus.

31 CViuscunq; figuræ sphęroidis plano sectæ non per centrum ducto, sed super axem erecto, minor portio ad conum qui eandem habeat cum portione basem, & axem eundem, eam proportionem habere probatur, quam utraque simul dimidia axis sphæroidis, & axis maioris portionis, ad axem maioris portionis.

Esto itaq; portio sphæroidis abscissa, plano non per centrũ ducto, sed super axem erecto: ipsa uero sphæroides, secta plano alio secundum axem ducto, ipsius figurę sit sectio a b c, coni acutiãguli sectio: diametros autẽ sectionis, & axis sphæroidis sit b f, centrum autem h: plani autem abscindentis portionem esto sectio a c linea recta. faciet autem cum ipsa rectos angulos ad b f, cũ planum sit super axem erectum, ut ponitur. esto autem portio abscissa, cuius uertex sit punctum b minor dimidia sphæroide figura, & ipsi b h æqualis esto f g. Ostendendũ est, quod portio cuius uertex est



punctum b, ad conum qui basim habet cum portione eandem, & axem eundem, haber eam proportionem, quam d g ad d f. Esto itaq; cylindrus qui eandem habeat basim cum portione minori, & axem eundem: esto item conus, in quo z ad conum basim eandem habentem, eam habeat proportionem, quam d g ad d f. Dico iam conum z portioni esse æqualem illi, quæ uerticem habeat punctum b. nã si non est æqualis, esto primò si fieri potest, minor. Inscribatur iam portioni figura solida, & alia circumscribatur, ex cylindris altitudinem æqualem habentibus composita, hoc pacto, ut circumscripta inscriptam minus excedat, quàm sphæroidis portio conum z. Cum igitur circumscripta figura portione maior existat, & inscriptam minus excedat, quàm portio conum z, sequitur figuram inscriptam cono z maiorem haberi. Esto deinde b r tertia pars ipsius b d: cum igitur ipsius b h sit tripla b g, & d g ipsius h r tripla erit. cylindrus itaq; qui basim habeat cum portione eandem, & axem b d, ad conum habentem eandem basim, & axem eũdem, habebit eam proportionem, quam habet d g ad h r. Dictus autem conus ad conũ z eandem habet proportionem, quam d g ad d f. Habebit igitur cylindrus, qui basim habeat cum portione eandem, & axem eundem, proportionibus dissimiliter ordinatis, eam proportionem ad conum z, quam d f ad h r. Sunto itaq; lineæ positæ, in quibus x n multitudine quidem æquales portionibus ipsius b d, magnitudine uero unaquæq; ipsi d f. sit autem & unaquæq; x o ęqualis ipsi b d: erit igitur unaquæq;

naquæq;

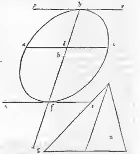
naquæque n o dupla ipsius h d. Accedat igitur ad unamquanque earum spacium quoddam, cuius latitudo sit æqualis ipsi b d, ita ut sint diametri quadratorum diametros habentium. auferatur autem à primo gnomon, qui latitudinem habeat æqualem ipsi b e: à secundo uero gnomon, latitudinem habens æquam ipsi b q: & ab unoquoque eodem modo sequente spacio gnomon auferatur, latitudinem habens una parte minorem latitudine præcedentis eum gnomonis ablati. Gnomon itaque à primo spacio ablatus, æqualis erit ei quod sub b e, e f continetur: & reliquum spacium accedens ad ipsam n o, superat forma quadrata latus excessus habens æquale ipsi d e: gnomon uero à secundo spacio ablatus, æquatur ei quod cõtinetur sub f q, q b: & reliquum spacium quod adiacet ipsi n o, excedens forma quadrata, & reliqua istis similiter. His sic se habentibus, plana omnium cylindrorum ex quibus inscripta figura componitur, ad superficiem cylindri basim habentis cum portione eandem, & axem eundem educantur. Iam totus cylindrus in cylindros distributus erit, multitudine æquales illis qui sunt in figura circumscripta constituti, magnitudine uero maximo illorũ æquales. Primus itaque cylindrus eorum qui sunt in toto cylindro, qui habet axem d e, ad primum cylindrum in figura inscripta constitutum, qui habeat d e axem, eam habet proportionem, quã quadratum d e, ad quadratum k e. Hæc autem est eadem ei quam habet contentum sub b d, d f, ad contentum sub b e, e f. Cylindrus igitur ad cylindrum habet eam proportionem, quam primum quadratum ad primum gnomonem, ablatũ ab eo. Similiter autem & aliorum cylindrorum, qui sunt in toto cylindro, unusquisque axem habens æqualem ipsi d e, ad cylindrum sibi coniunctum in figura inscripta constitutum, axem habentem eundem, habebit eam proportionem, quã spacium sibi correspondens, ad gnomonem ablatum ab eo. Erunt quædam magnitudines cylindri, qui sunt in toto cylindro: & aliæ item magnitudines, spacia ad n x adiecta, latitudinem habentia æqualem ipsi b d, multitudine cylindris æqualia, & bina & bina habent eandem proportionem. dicuntur autem cylindri ad alios cylindros in figura inscripta constitutos, ultimus autem nullo pacto dicitur: & spacia dicuntur ad alia spacia, ad gnomones ablatos ab eis quæque duo similis rationis in eadem proportione: ultimum uero spacium nullo pacto dicitur.
Constat igitur, cylindros omnes ad alios omnes eam habere proportionem, quã omnia spacia ad omnis gnomones. Cylindrus igitur, qui basim habeat cum portione eandem, & axem eundem, ad figuram portioni inscriptã, eam habebit proportionem, quã spacia omnia ad omnes gnomones. Et quoniam erant lineæ quedam positæ æquales, in quibus n o, & ad unamquanque accessit spacium superãs forma quadrata, latera uero excessuum inter se æqualiter sese excedentia, & erãt excessus eorum æquales illarum minimæ: & alia item erant spacia ad ipsam n x adiacentia, latitudinem ipsi b d æqualem habentia, multitudine æqualia spacijs prius dictis, magnitudine uero unumquodque maximo illorum æquale, manifestum est quod omnia simul spacia quorum unumquodque æquale est maximo, ad omnia alia spacia minorem habent proportionem, quàm n x ad lineam æqualem utrisque simul, dimidiæ n o, & terniæ parti x o. Constat igitur, eadem spacia ad omnis gnomones maiorem habere proportionem, quàm n x ad lineam æqualem utrisque simul, dimidiæ n o, & duabus tertijs ipsius x o. Cylindrus ergo qui basim habet cum portione eandem, & axem eundem, ad figuram portioni inscriptam, maiorem habet proportionem, quàm n x ad lineam æqualem utrisque simul, dimidiæ n o, & duabus tertijs x o. Est autem n x æqualis d f, dimidia uero n o æqualis ipsi d b: ipsis autem tertijs ipsius x o, æqualis est ipsa d r. totus ergo cylindrus ad figuram portioni inscriptã, maiorem habet proportionem, quàm d f ad h r: quam uero proportionem d f habet ad h r, eandem ostensũm est habere cylindrum ad conum z: maiorem ergo proportionem habebit cylindrus ad figuram portioni

 inscriptam,

inſcriptam, quàm ad conum z, quod eſſe non poteſt: nam oſtenſum eſt, figuram
inſcriptam cono z eſſe maiorem. Non eſt ergo portio ſphæroidis cono maior.
Verum ſi fieri poteſt, eſto minor eodem. Rurſus autem inſcribatur portioni figu
ra ſolida, & altera circumſcribatur ex cylindris æqualem altitudinem habentibus
compoſita hoc pacto, ut circumſcripta excedat inſcriptam minus eo quo conus
z excedit portionem, & cætera ſuperioribus eadem diſponantur. Cum itaque in-
ſcripta figura ſit portione minor, & circūſcripta minus excedit inſcriptam, quàm
conus z portionem: ſequetur ex hoc, figuram circumſcriptam cono z minorem
eſſe. Item primus cylindrus eorum qui ſunt in toto cylindro, axem habens d e, ad
primum cylindrum in figura circumſcripta conſtitutum, & axem eandem habē-
tem, eam habet proportionem, quam ultimum ſpacium eorum quæ ad x n adia-
cent, latitudinem habentiū æqualem ipſi b d ad ſe ipſum. utraq; enim ſunt æqua
lia. & ſecundus cylindrus eorum qui ſunt in cylindro toto, axem habens æqua-
lem ipſi d e, ad cylindrum ſibi coniunctum in figura circumſcripta conſtitutum,
eam habet proportionem, quam ſecundum ſpacium eorum quæ ipſi n x adiacēt,
latitudinem ipſi b d æqualem habentium, habet ad gnomonem ablatum ab eo,
& aliorum cylindrorum in toto cylindro conſtantium, qui axem habent ipſi d e
æqualem: unuſquiſq; ad cylindrum ſibi coniunctum in figura circumſcripta con
ſtitutum, eam habet proportionem, quam ſpacium ſibi correſpondens eorū quæ
ad n x adiacent, ad gnomonem ablatum ab eo ante ultimum dictum. Omnes igi
tur cylindri, qui in toto cylindro conſiſtunt, ad omnis cylindros in figura circum-
ſcripta conſtitutos eam habebunt proportionem, quam omnia ſpacia ad n x ad-
iacentia, ad ſpacium æquale ſpacio ultimo poſito, & gnomonibus ablatis ab alijs
eadem ratione, ut ſuprà factum eſt. Cum igitur oſtenſum ſit, ſpacia omnia ad n o
adiacentia, ad ſpacia omnia excedentia forma quadrata, dēpto maximo, maiorem
habere proportionem, quàm x n ad lineam æqualem utriſq; ſimul, dimidiæ n o,
& tertiæ parti x o, conſtat eadem ſpacia ad reliqua quæ ſunt æqualia ultimo ſpa-
cio poſito, & gnominibus qui à reliquis ſunt ablati, minorem proportionem ha-
bere, quam n x ad lineam æqualem utriſq; ſimul, dimidię n o, & duabus tertijs ip
ſius x o. Unde ſequitur, cylindrū quoq; qui baſim habeat cum portione eandē,
& axem eundem, ad figuram circumſcriptam minorem habere proportionem,
quàm f d ad h r. quam autem proportionem habet f d ad h r, eam habet dictus cy-
lindrus ad conum z. minorem igitur habebit dictus cylindrus ad circumſcriptam
figuram, quàm ad conum z: quod quidem eſſe non poteſt. nam oſtenſum eſt, fi-
guram circumſcriptam cono z eſſe minorem. Non eſt igitur portio ſphæroidis
minor cono z: neque, ut prius oſtendimus, maior: neceſſe eſt igitur, eidem eſſe
æqualem.

32 SI figura ſphęroidis plano ſecetur non ſuper axem erecto, neq; per centrum du
cto, eius portio minor ad abſciſſorem coni, qui baſim habeat cum portione
eandem, & axem eundem, eam habebit proportionem, quam utraq; ſimul linea
dimidia eius quæ iunget uertices portionum effectarum, & axis maioris portio-
nis ad axem portionis maioris. Diuidatur itaq; aliqua figura ſphæroides, ut dictū
eſt: & diuiſa ipſa alio plano per axem ducto, erecto ſuper planū ſecans, eſto figu
ræ ſectio a b c d coni acutianguli ſectio: plani autem ſecantis figuram ſit a c linea
recta, & ducantur p r, s t ęquediſtantes ipſi a c, & contingentes ſectionem coni in
punctis b, f: & ab eis exeant plana æquediſtantia plano ſecundum a c ducto. con
tingent quoq; ipſam ſphæroidem in punctis e, f. & erunt uertices portionum cō-
iuncti, ducta b f linea. ipſa uero tranſibit per centrum: & eſto centrum ſphęroidis
& ſectionis coni acutianguli h. Quoniam igitur poſitum eſt, figuram ſecari plano
ſuper axem non erecto, ſectio erit coni acutianguli ſectio, & eius diametros c d.
Sumatur cylindrus axem habens in directum h d, in cuius ſuperficie erit conta-
curian-

cutianguli ſectio circa diametrum a c conſtituta: & conus qui habeat uerticē punctum b, in cuius ſuperficie erit coni acutianguli ſectio circa diametrum a c conſtituta: erit iam quoddam cylindri fruſtum, quod baſim habet cum portione eandem, & axem eundem: & abſciſſor coni qui habeat eādem cum portione baſim, & axē eundē. Oſtendendum eſt igitur, quod portio ſphæroidis, cuius uertex eſt punctum b, ad abſciſſorem coni, qui baſim habeat cū portione eandem, & axem eūdem, eam habebit proportionem, quam d g ad d f. Eſto autem f g æqualis h f. Sumatur itaque conus quidam, in quo z, qui habeat ad abſciſſorem coni baſim habentis cum portione eandē, & axem eundem, eam proportionem, quam d g ad d f. Si dicatur, portionem ſphæroidis non eſſe æqualem cono z, eſto primum, ſi fieri poteſt, maior eo: & inſcribatur portioni figura ſolida, & altera circumſcribatur, ex cylindrorum fruſtis altitudinē æqualem habentibus compoſita, ita ut circumſcripta excedat inſcriptam minus eo quo portio ſphæroidis excedit conum z. Similiter iam præcedenti oſtendetur, inſcriptam figuram cono z eſſe maiorem, & fruſtum cylindri quod baſim habet cum portione eandem, & axem eundem, ad figuram inſcriptam maiorem habere proportionem, quàm ad conum z: quod eſſe non poteſt. Non erit ergo portio ſphæroidis cono z maior. Sed eſto item, ſi eſſe poteſt, minor: & rurſus inſcripta ſit portioni ſolida figura, & altera circumſcripta ex cylindricis fruſtis æqualem altitudinem habentibus compoſita, ita ut circumſcripta figura excedat inſcriptam minus eo, quo conus z excedit portionem. Rurſus eadem ratione oſtendetur, circumſcriptam figuram cono z eſſe minorem, & fruſtum cylindri quod baſim habeat eandem cum portione, & axem eundem, ad circumſcriptam figuram habere minorem proportionem, quàm ad conum z: quod eſſe non poteſt. neq; igitur ſphæroidis portio minor eſſe poteſt cono z. quare conſtat, id quod ſuſceperamus demōſtrandum.

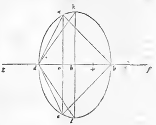


CVius libet ſphęroidis figuræ plano ſectæ ſuper axem erecto, nō aūt per centrū ducto, maior portio ad conum qui baſim habeat cum portione eandem, & axem eundem, eam habet proportionem, quam habet linea æqualis utriſq; ſimul, dimidio axi ſphęroidis, & axi minoris portionis ad axem minoris portionis. 33

Secetur itaq; ſphæroides, ut dictum eſt: ſecta uero ipſa figura plano alio ſecundum axem ducto, ſuper planum ſecans erecto, figuræ quidem eſto a b c coni acutianguli ſectio. eius autem diametros, & axis figurę b d: plani uero ſecantis ſectio ſit c a linea recta. erit autem ipſa angulis rectis ſuper b d. Eſto autem maior portionum, cuius uertex ſit b punctum, & centrum ſphæroidis ſit h. addatur autem d g ad e d, ipſi d h æqualis, & b f eidem ſit æqualis. Demonſtrandum eſt, portionem ſphæroidis cuius uertex b punctum, ad conum qui habeat baſim eandem cum portione, & axem eundem, eam habere proportionem, quam e g habet ad e d. Se

cetur

cetur iam sphæroides plano per centrum ducto, & super axem erecto: & à circulo inde facto conus exurgat, qui uerticem habeat punctum d. Est iam tota sphæroides dupla portionis habentis basim circulum circa diametrum k l constitutum, uerticem autem punctum d. Dicta uero portio dupla est coni, qui habeat basim cum portione eandem, & axem eundem. hæc enim ostensa sunt. Tota igitur sphæroides, dicti coni quadrupla existit. conus autem iste, ad conum habentem basim circulum circa diametrum a c descriptum, uerticem uero punctum d, habet proportionem compositam ex ea quam habet h d ad e d, & ex ea quam habet quadratum k h ad quadratum e a: quæ est eadem ei quam habet cõtentum sub b h, h d, ad id quod sub b e, e d continetur. quam uero proportionem habet h d

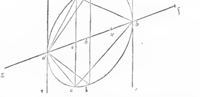


ad e d, hanc habeat x d ad h d. Habebit igitur contentum sub x d, b h, ad contentũ sub b h, h d, eam quam d h ad d e. Proportio autem composita ex ea quam habet contentum sub x d, h b, ad contentũ sub b h, h d: & ex ea quam habet contentum sub b h, h d, ad contentum sub b e, e d: eadem est ei quam habet contentum sub x d, b h, ad contentum sub b e, e d. Conus igitur qui basim habet circulum circa diametrum k l constitutum, uerticem uero punctum d, ad conum qui basim habeat circulum circa diametrum a c descriptum, uerticem uero punctum d, eam habet proportionem, quam contentum sub x d, b h, ad contentum sub b e, e d. Conus autem qui basim habet circulum circa diametrum a c, uerticem uero punctum d, ad portionem sphæroidis, quæ basim habeat eandem eidem, & axẽ eundem, eam habet proportionem, quam contentum sub b e, e d, ad contentum sub f e, d e: hoc est, b e ad e f. nam minus quàm dimidium ipsius sphæroidis, ad conum qui basim habeat cum portione eandem, & axem eundem, ostensum est, quod eam habet proportionem, quam linea quæ sit æqualis utrisq; simul, dimidio axi sphæroidis, & axi maioris portionis, ad axem maioris portionis. ea uero est illa quam habet f e ad b e. Conus igitur qui est in dimidia sphæroide, ad portionem sphæroidis dimidio illius minorem, eam habet proportionem, quam cõtentum sub x d, b h ad contentum sub f e, d e. quoniã autem tota sphæroides, ad conum in eius dimidio constitutum, eam habet proportionem, quam compræhensum sub f g, x d, ad compræhensum sub b h, x d nam utraq; quadrupla est: Conus autem in dimidio sphæroidis constitutus, ad portionem eo dimidio minorem, eam habet proportionem, quam cõtentum sub x d, b h, ad contentũ sub f e, e d sphæroides quoq; totum ad portionem eius minorem, eam habet proportionem, quam contentum sub f g, x d, ad contentum sub f e, e d. quare & maior sphęroidis portio, ad minorem, eam habet proportionem, quam excessus quo cõtentum sub f g, x d excedit contentum sub f e, e d. Contentum autem sub f g, x d, excedit contentum sub f e, d e, eo quod continetur sub x d, e g, & eo quod continetur sub f e, x e. Habet igitur maior portio ad minorem, eam proportionem, quam id quod est æquale utrisq; simul, contento sub x d, e g, & contento sub f e,

x e

x e ad contentum sub f e, e d: portio uero sphæroidis minor, ad conum basim habentem cum portione eandem, & axem eũdem, eam habet proportionem, quam contentum sub f e, e d ad contentum sub b e, e d: habet enim eam proportionem, quam f h ad b e. Conus autem in minori portione constitutus, ad conum qui est in portione maiori, eam habet proportionem, quam cõtentum sub b e, e d ad quadratum b e. nam cum coni habeant bases æquales altitudinum proportionem sequentur: habet itaq; & maior portio sphæroidis ad conum in ea inscriptum eam proportionem, quam babet id quod est ęquale utrisq; simul, contento sub x d, e g, & contento sub f e, x e, ad quadratum b e. Ea uero eadem est ei quam habet e g ad e d. nam contentum sub x d, e g, ad contentum sub x d, e d, eam habet proportionem, quam e g ad e d: & contentum sub f e, x e, ad contentum sub f e, h e eam habet proportionem, quã e g ad e d. Propterea quod linea x d, h d, d e, sunt inter se proportionales, & h d æqualis g d: igitur id quod æquatur utrisq; simul contento sub x d, e g, & contento sub f e, x e, ad id quod æquatur utrisq; simul, contento sub x d, e d, & contento sub f e, h e, eam habet proportionem, quam e g ad e d: quadratum uero ipsius b e, æquatur utrisq; simul, contento sub x d, e d, & contento sub f e, h e. nam quadratum ipsius b h, æquatur contento sub x d, e d. Excessus autem quo quadratum b e excedit quadratum b h, æquatur cõtento sub f e, h e. cum b h & b f sint æquales. Constat igitur, quod maior sphæroidis portio ad conum, qui basim habeat cũ portione eandem, & axem eundem, eam habeat proportionem, quam e g habet ad e d.

34 SI figura sphæroidis plano secetur, neq; super axem erecto, neq; per cẽtrum ducto: maior eius portio ad eum coni abscisorem qui basim habeat cum portione eandem, & axem eundem, habebit eam proportionẽ, quam linea quæ sit æqualis utrisq; simul, dimidiæ illius quæ portionum inde effectarum uertices iunxerit, & axi minoris portionis ad axem minoris portionis habuerit. Secetur itaque sphæroides, ut dictum est. ipso autẽ secto, per aliud planum secundum axem ductum, et erectum super planũ secans, figuræ quidem sectio esto a b c d coni acutianguli sectio: plani autẽ figuram secantis sit a c linea recta: ducãtur autem p r, s t æquedistantes ipsi a c, & contingentes in punctis b d coni acutianguli sectionem: & exeant ab eis plana æquedistantia plano secundum a c ducto. contingẽt quoq; ipsa sphæroidem in punctis b d, & erunt uertices portionum puncta b, d: ducatur iam b d linea recta coniungens uertices portionum effectarum: trãsibit autem ipsa per centrum, & esto h cẽtrum maior portio dimidio sphæroidis, sit illa cuius uertex est b: adijciatur ipsi d h æqualis d g, & b f eidem. Ostendendum est, maiorem sphæroidis portionem ad abscisorem coni, qui habeat basim cum portione eandem, & axem eundem, eam babere proportionem, quam e g ad e d. secetur enim ipsum sphæroides plano per centrum ducto, & æquedistanti ipsi plano



quod ſecundum a c ductum eſt: & inſcribatur dimidiæ portioni ſphæroidis abſciſor coni, qui uerticem habeat punctum d. & quam proportionem habet d h ad e d, eam habeto x d ad h d: ſimiliter iam ſuperioribus oſtendetur, abſciſorem coni dimidio ſphærodi inſcriptum, ad abſciſorem coni in minori inſcripto eam habere proportionem, quam contentum ſub x d, b h habet ad contentum ſub b e, e d: & abſciſor coni in minori portione cõſtitutus ad portionem cui eſt inſcriptus, eam habet proportionem, quam contentum ſub b e, e d ad contentum ſub f e, e d. habebit ergo abſciſor coni in dimidia ſphæroide inſcriptus, ad portionem minorem ſphæroidis eam proportionem, quam contentum ſub x d, b h ad contentum ſub f e, e d. Quare tota ſphæroides habebit ad abſciſorem coni in dimidia ſphæroide inſcripti eam proportionem, quam contentum ſub f g, x d ad contentum ſub b h, x d. nam utrumque eſt quadruplum utriuſq;. Abſciſor autẽ coni dictus ad minorem ſphæroidis portionem eam habet proportionem, quam contentum ſub x d, b h, ad contentum ſub f e, e d: habebit ergo tota ſphæroides ad eius minorem portionem eam proportionem, quam habet contentum ſub f g, x d ad contentum ſub f e, e d. ipſa uero maior portio ad minorem eam habet proportionẽ, quam habet exceſſus, quo contentum ſub f g, x d excedit cõtentum ſub f e, e d, ad contentum ſub f e, e d: minor autem portio ad abſciſorem coni in ea deſcripti, eã habet proportionem, quam contentum ſub f e, e d, ad contentum ſub b e, e d. nã oſtenſum eſt eam habere proportionem, quã f e ad b e. Abſciſor uero coni in maiori portione deſcriptus, eam habet proportionem ad abſciſorem coni deſcriptũ in minore, quam contentum ſub b e, e d ad quadratum b e. Abſciſores enim conorum dicti habent inter ſe proportionem ſuarum altitudinum: eorum uero altitudines eam habent inter ſe proportionem, quam d e ad e b: habet autem maior ſphæroidis portio ad abſciſorem coni in ea deſcriptũ eam proportionem, quã exceſſus quo contentum ſub f g, x d excedit contentum ſub f e, e d ad quadratum b e habet. Hæc autem eadem proportio, eadem ratione, ut ſuprà factum eſt, demonſtratur eſſe eadem, quam habet e g ad e d.

FINIVNT ARCHIMEDIS INVENTA DE CONOIDALIBUS & ſphæroidibus figuris.

ARCHIMEDIS DE LINEIS SPIRALIBVS.

ARCHIMEDES DOSITHEO SALUTEM.

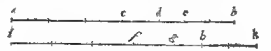
EORVM quæ ad Cononem miſſa fuerant theorematum, quorum aſsiduè à me flagitas ut demonſtrationes conſcribam, complurium quidem confectas habes in illis quæ ab Hercule allata ſunt, quaſdam uero in hoc libro collegi, quas ad te mitto. Verũ ne mirere, ſi in huiuſmodi demonſtrationũ expoſitionem plurimum temporis conſumpſimus. Hoc enim nobis accidit, propter id quod antequam de his ſcriberemus, eos percontari & perquirere ſtatueramus, qui circa doctrinas uerſati ſunt, quiq; ſibi iſthæc inueſtiganda propoſuerant. Nam certa quædam ſunt in Geometria theoremata, quæ non breuiter tradi poſſe

posse principio uideantur, eorum inuestigationem tempore intercipiẽte. Conon quidem non temporis satis ad hęc excogitanda sortitus, uitam permutauit, & ipsa reliquit inexplicata, cum illa inuenisset, & alia quàm plurima perquisisset, ac multum adeò geometricas facultates ampliasset. Nouimus enim quantum ingenij, quàm admirabile in eo uiro iudicium uigebat, quàm non uulgaris circa doctrinas & assidua opera, quàm excellens studium. Multis autem annis post Cononis mortem neminem accepimus inuentum fuisse, qui ne unum quidem problema tractare tentarit. Equidem statuo eorum unumquodque perlustrare. nam duo quædam ex his quæ habentur in Conone, sunt quæ minime depræhensa fuere. Tandem uero accedemus, ut hi qui cuncta se gloriantur inuenisse, nullam autem proferunt eorum quæ profantur demonstrationem, reprehendantur. nam ex his quæ à se inuenta uolunt, falsa quædam, & à naturæ sunt potestate penitus aliena. Quorundam uero iam tenes demonstrationes ad te missas, quorundam in hoc libro contulimus, dignum existimantes esse ut ea tibi explicaremus. Primum itaque problematum erat, Sphæra data spacium inuenire quod superficiei illius esset æquale. quod quidem quamprimũ fuit declaratũ ex libro quem de Sphæra confecimus. Nam cum ibi demõstratum esset, superficiem sphæræ maximo in ea circulo quadruplam haberi, illico patuit spaciũ inueniri posse superficiei sphęræ æquale. Secũdum autem, Cono seu cylindro dato sphæram ipsi cono uel cylindro æqualem inuenire. Tertiũ, Datam sphæram sic secare, ut eius portiones inter se propositam proportionem retineant. Quartũ, Datam sphæram sic secare plano, ut portiones superficiei sphæræ seruent inter se datam proportionem. Quintum, Datã sphæræ portionem alteri sphæræ portioni datæ similem reddere. Sextum, Duabus portionibus siue eiusdem siue nõ eiusdem sphęræ datis, tertiam sphęræ portionem inuenire, quæ alteri portionũ datarum sit similis, superficiem uero superficiei alterius portionis habeat æqualem. Septimum, A' data sphæra portionem ea ratione abscindere, ut abscisa inde portio ad conum qui eadem base & eadem constat altitudine, cum portione quamcunque datam proportionem habeat, quæ quidem proportio ea quam tria ad duo habent, proportione minime maior existat. Horum igitur inuentorum omnium Hercules attulit demonstrationes. Id autem quod post hæc erat separatum, falsum existit. Est autem huiusmodi: Si sphęra plano secetur in partes inæquales, maior portio habebit ad minorem eam proportionem duplicatam, quam maioris portionis superficies ad minoris habet superficiem. Cõstat autem ex his quæ ad te missa sunt, hoc falsum esse. Erat & itẽ hoc separatum in illis. Si sphęra in partes inæquales secetur, plano erecto super una quacunque ex his quæ sunt in sphæra diametro, maior portio ad minorem eam proportionem habebit, quam maior diametri portio ad minorem. Nam maior sphæræ portio ad minorem habet proportionem minorem, quàm sit ea quæ est superficiei maioris ad superficiem minoris duplicata proportio: maiorem uero, quàm sesquialtera illius. Erat autem & ultimum problema separatum, falsum: Quod si sphæra alicuius diametro in partes inæquales scindatur, ita ut quadratum maioris partis quadrato minoris existat triplum, & per punctum huius diuisionis agatur planum erectum super diametrum ipsam, figura tali specie constans qualis est uidelicet sphæræ portio, maxima est aliarũ portionum omnium quæ habeant superficiem sibi æqualem. Quod autem hoc falsum sit, ex his theorematibus manifestum est, quæ ad te prius missa sunt. Nam demonstratum est, dimidiam sphæram esse omnium sphæræ portionum maximam, quæ æquali inter se superficie sphærica contineantur. Post hæc circa conum quoque hæc problemata habentur: Si coni rectanguli sectio diametro quiescente circumferatur, ita ut diametros sit axis, figura quæ à coni rectanguli sectione complectitur, conoidale uocetur. Quod si figuram conoidalem planum contigerit, & alterum planum ducatur plano cõtin-

genti æquediſtatis, quod aliquam conoidalem portionem abſcindat, huius portionis abſciſæ baſis appelletur planum abſcindens, uertex uero punctum illud in quo alterum planũ conoidale cõtingit. Quod ſi dicta figura plano ſecetur erecto ſuper axem, eius ſectionem conſtat, circulũ fore. Quod aũt portio abſciſa ſeſquialtera erit coni baſim habentis cum portione eandem, & axem eundem, hoc nos demonſtrare oportet. Item ſi conoidalis duæ portiones abſcindãtur planis utcunque ductis, quod ſectiones inde prouenientes ſint coni acutianguli ſectiones cõſtat, ſi plana abſcindentia ſuper axem non fuerit erecta. Quod autem portiones habeãt inter ſe proportionẽ eam quam habent inter ſe poteſtate lineæ ductę à uerticibus earum æquediſtantes axi uſque ad plana abſcindentia, hoc reſtat demõſtrare. Horum enim ad te nondum ſunt miſſæ demonſtrationes. Poſt hæc uero circa ſpirales lineas hæc fuerãt propoſita. Eſt autem hoc ueluti aliud problematum genus, nihil cum prædictis communicans, de quibus tibi in hoc libro conſcripſimus demonſtrationes. Sunt autem huiuſmodi. Si recta linea in plano altero eius termino quieſcẽte circumferatur, donec ad locum redierit unde primo cœpit moueri, & ſimul cum hac circumducta linea punctum feratur, & ipſum ſibi ipſi æquali ſemper uelocitate moueatur ſecundum ipſam lineam motam, incipiatque à termino lineæ quieſcente uerſus alterum ferri pũctum huiuſmodi ſpiralem lineam in plano deſcribet. Dico itaque ſpacium à linea ſpirali, & à linea recta quæ circumducta fuit comprenſum, tertiam partem eſſe circuli eius qui centrum habeat punctum quieſcens, interuallum uero ſecundum eam lineæ motæ partem, quæ à puncto moto fuerit in una circumuolutione permeata. Et ſi lineam ſpiralem linea recta contigerit in puncto quod fuit in ſpirali ultimo productum, alia item linea recta à puncto circumductæ quieſcente ducatur ad ipſam circumductam, & in locum unde moueri ceperat regreſſa ſecundum angulos rectos quouſque cum contingente concurrat: dico hanc lineam productam circumferentiæ circuli in prima circumuolutione producti eſſe æqualem. Item ſi linea circumducta, & punctum latum ſecundum illam pluribus circumuolutionibus circumferantur, & in locum unde moueri ceperãt multotietis reſtituantur: dico ſpacij illius quod in ſecunda circumuolutione fuerit à ſpirali linea compręhenſum, duplum illud exiſtet quod in tertia compræhendetur. Quod uero in quarta triplum, quod in quinta quadruplum, & ſic deinceps ſemper ſpacia in poſterioribus circumuolutionibus concluſa, ſecundum conſequens augmentum numerorum multiplicia erunt ad ſpacium in ſecunda reuolutione concluſum. Spacium uero in prima reuolutione contentum, ſexta pars exiſtet ſpacij in ſecunda reuolutione comprenſi. Item ſi in ſpirali linea duo puncta notentur, & ab eis iungantur lineæ rectæ ad terminum lineæ circumductæ quieſcentem, & duo circuli circumſcribantur centro quod ſit punctum quieſcens ſecundum interualla duarum linearum rectarum, quæ ad quieſcentem lineæ ſpiralis terminum ductæ fuerunt, & earum linearum minor extrà ducatur: dico ſpacium comprenſum à circumferentiæ maioris circuli parte illa quæ in eandem partem cum linea ſpirali fertur, mediaque inter lineam ſpiralem & rectam lineam habeatur, & à linea recta extra ducta, & à linea ſpirali ad ſpacium compræhenſum ſub minoris circuli ea circumferentiæ parte quæ inter eandem lineam ſpiralem & lineam rectam media exiſtit, & ſub linea quæ earũ terminos iungit, & ſub eadem linea ſpirali eam proportionem habet, quam linea ſemidiametros maioris circuli cum duabus tertijs illius exceſſus, quo ſemidiametrum minoris excedit, habet ad eam ſemidiametrum maioris cum una dicti exceſſus tertia parte. Iſtorum itaque & aliorum circa ſpirales lineas ſunt à me in hoc demonſtrationes collatæ. Præmittuntur uerò ueluti in cæteris quæ geometrica diſciplina ſunt tractata, quædam, quæ ad illorum demonſtrationem ſunt pernecesſaria. Sumo autem in his quoque ea quæ in alijs quos prius edidi libris ſumpta fuerunt,

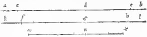
runt, uidelicet linearum inæqualium & spaciorum inæqualium excessus, quo ma ius excedit minus, illi adiectus fieri potest ut uincat omnem propositam quorumcunque inter se relatorum proportionem.

SI secundum quampiam lineam punctum feratur, ipsum sibi ipsi æque uelociter, & in latione illa duas lineas permeet, lineæ illæ eandē inter se proportionē habebunt, quam tempora habent quibus punctum lineas permeauit. Feratur itaque quoddā pūctum secundū lineam a b, æque uelociter sibi ipsi. Et sumantū in ea duæ lineæ c d, d e. Esto autem tēpus, in quo punctū permeauit lineā c d, esto f g. in quo uero permeauit d e, esto g h.



Ostendendum est igitur, quod c d linea ad lineam d e eam habet proportionem, quam tempus f g ad tempus g h. Ex lineis itaque c d, d e componātur lineæ a d, d b, secundum quamcunque compositionem, ita ut a d excedat d b. & quotiēs c d linea sumitur in a d, totiens tempus f g sumatur in tempore l g: quotiens autem d e linea sumitur in d b, totiens tempus g h sumatur in g k. Quoniam itaque supponitur pūctum æque uelociter latum esse per lineam a b, manifestum est in quo tempore lineam c d permeauerit, in tanto quamcunque ipsi c d æqualem permeaturum esse. quare palàm est, quod lineam a d compositam in tanto tempore permeabit, quantum est totum l g tempus, cum totiens sumatur c d linea in linea a d, quotiens tempus f g in tempore l g, & eadem ratione in tanto tempore punctum permeabit lineam d b, quātum est g k tempus. Cum igitur a d linea sit maior b d, manifestum est, quod in maiori tempore punctum permeabit lineam a d, quàm lineam b d. quare colligitur, tempus l g maius esse tempore g k. Similiter autem ostendetur, si ex temporib. f g, g h componantur tempora, secūdum quamcūque cōpositionem, eo pacto ut alterum excedat reliquum, quod compositæ ex c d, & d e lineæ secundum eandem compositionem altera alteram superabit, eodem ordine sumptæ cū temporibus. Constat igitur c d eādem ad d e habere proportionem, quam habet tempus f g ad ipsum tempus g h.

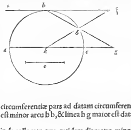
SI duo puncta in duabus lineis ferantur, unumquodque sibi ipsi æque uelociter, sumantur que in utraque linea duæ lineæ, primæ duæ in temporibus æqualibus a punctis permeatæ, & secundæ duæ in altera linea, sumptæ lineę eandem inter se proportionem habebunt. Esto per lineam a b punctum feratur, ipsum sibi ipsi æque uelociter: & alterum item punctum per lineam k l. Sumantur aūt in a b duæ lineæ c d, d e et in linea k l sumanť f g, g h. in quo autem tempore punctum per a b latum lineam c d permeauerit, in tanto alterū pūctum per k l latum permeet f g. Similiter in tanto tempore punctum permeet lineam d e, in quanto alterum g h. Ostendendum est, c d eādem habere ad d e proportionem, quam f g ad g h. Esto itaque tempus, in quo punctum lineam c d permeauit, m n. in hoc itaque eodem tempore alterum punctum permeauit f g. Et item esto tempus n x, in quo punctum permeauit lineam d e, & in hoc eodem alterum punctum permeauit lineam g h. Eandem itaque proportionem habebit c d ad d e, quam tempus m n ad n x: & f g ad g h eam habet, quam tempus m n ad n x. Constat igitur, c d eādem habere ad d e proportionem, quam habet f g ad g h.



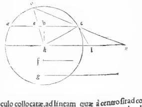
3 CIrculis quacunque multitudine datis inueniri quædam linea recta potest, quæ omnibus simul datorum circumferentijs maior existat. Si enim unicuique circulorum figura multorum angulorum circumscribatur, manifestum est, quod linea recta ex omnibus earum lateribus composita, omnibus simul circulorum circumferentijs maior existat.

4 DVabus lineis inæqualibus datis, altera recta, altera circulari potest inueniri quædam recta linea, quæ maiore datarum linearum minor, & minore maior habeat. Si enim excessus quo recta superat circularē, totiens sibijpsi coaceruetur, donec maiorē rectā recta data cōficiat, deinde recta data in tot partes æquales diuidatur, quotiens excessus sibijpsi fuerit coaceruatus, una ex partibus illis ipso excessu minor existet. Quod si circularis sit maior recta, si ipsi rectæ una pars quàm minima adijciatur, constat hanc rectam sic confectam, maiore linearū minorem, & minore maiorem haberi. nam quæ utrinque adijcitur pars, aut detrahitur, excessu minor existit.

5 CIrculo dato, & linea recta ipsum contingente, potest à cētro circuli linea quædam recta ad rectam contingentem hoc pacto duci, ut ea ipsius ductæ pars quæ inter cōtingentem & circuli circumferentiam intercipitur, ad semidiametrū circuli habeat minorem proportionem, quàm ea circumferentiæ pars quæ inter contactum & lineam ductam media existit ad quamcunque datam circumferentiæ partem. Esto circulus datus a b c, cuius centrum sit k, & recta linea d f cōtingat circulum in puncto b. detur etiā pars circumferentiæ, quæcunque fuerit. Potest autem ea circumferentię parte data sumi linea recta maior, sitque ea sumpta e. Ducatur autem a centro k h linea a g æquedistans ipsi d f, & ponatur h g æqualis ipsi e, & tendens ad b à centro k ducta ad h educatur, donec concurrat cum contingente in puncto f. Eandem igitur habet proportionē h f ad h k, quàm b h ad h g. igitur f h ad h k minorem habet proportionem, quàm b h circumferentiæ pars ad datam circumferentiæ partem, quoniam b h linea recta est minor arcu b b, & linea h g maior est data circumferentiæ parte.

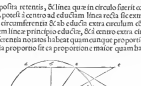


6 CIrculo dato, linea recta in eo deinde collocata, quæ quidem diametro minor existat, potest à circuli centro linea recta ad circumferentiam duci, quę à linea in circulo collocata eo pacto secet, ut pars ipsius lineę ductæ, quę inter circumferentiam et lineā collocatā media deprehendit, ad lineā quæ iungit lineæ collocatæ & ductæ terminos in circumferentia cōstitutos, habeat quamcunque proportionē datam, dum tamē proportio illa minor existat proportione, quam habet dimidia lineæ in circulo collocatæ, ad lineam quæ à centro sit ad collocal-



locatam perpendiculariter educta. Esto datus circulus a b c, cuius centrum k, & in ipso linea collocata recta a c minor diametro, & habeat f ad g minorem proportionem, quàm c h ad h k, quæ sit à cẽtro k ad lineam a c perpendiculariter educta, Ducatur autem à centro linea æquedistans ipsi a c, quę sit k n: & educatur à puncto c secundũ angulos rectos linea c l usque ad lineam k n. trianguli itaq; c h k, & c k l sunt similes. quare erit sicut c h ad h k, ita c k ad c l. Igitur f ad g minorẽ proportionem habet, quàm c k ad c l. Quam itaq; proportionẽ habet f ad g, eam habeat c k ad maiorem ipsa c l, quæ sit b n. Ponatur autem b n inter circumferentiam, & lineam collocatam per punctum c. Hoc enim sic potest diuidi, ut pars intra circulum collocetur, pars extrà per punctum c adhæreat ipsi k n in puncto n, cum ipsa sit maior c l. Esto itaq; sic diuisa & collocata. demum ducatur k b linea secans lineam a c, primo collocatam in puncto e. Quoniam igitur k c ad b n eam proportionem habet, quam f ad g, habebit quoque e b ad b c, sicut k c ad b n. igitur & sicut f ad g. quare constat propositum.

7 EIsdem quæ in præmissa sunt posita retentis, & linea quæ in circulo fuerit collocata, extra circulum educta, potest à centro ad eductam linea recta sic extra circulum educi, ut pars eius quæ à circumferentia & ab educta extra circulum cõpræhendatur, ad lineam iungentem lineæ principio eductæ, & à centro extra circulum ductæ terminos in circumferentia notatos habeat quamcunque proportionem propositam, dum tamen dicta proportio sit ea proportione maior quam habet dimidia linea in circulo collocata, ad lineam quæ à centro ad ipsam collocatam sit perpendiculariter educta. Retineantur itaque ea quæ in præmissa posita sunt, & linea in circulo collocata extra ducatur, & sit proportio data, quam habet f ad g maior proportione, quam habet c h ad h k: erit quoq; maior ea quam habet k c, ad c l. Quam itaq; proportionem habet f ad g, eam habet k c ad minorem c l, quæ sit i n tendẽs in c. Potest autem sic diuidi, & c a

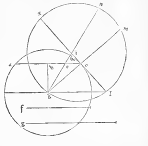


det intra lineam c l, cũ sit minor ipsa c l. Cũ igitur eandem habeat proportionem k c ad i n, quam f ad g, & ipsa e i ad i c eãdem habebit proportionẽ, quam f ad g.

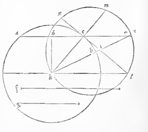
3 CIrculo dato, et in circulo linea quæ diametro minor sit, altera item linea quæ circulum contingat in termino lineæ in circulo datæ: potest à centro circuli linea recta ad lineã rectam educi, & ita in directum per lineæ in circulo datę sectionem ad circumferentiam protrahi, ita ut pars ipsius inter lineam rectam & circũferentiam deprehensa, ad partem illam lineæ contingentis quæ intra lineam ipsam à centro ductam, & punctũ contactus concludetur, habeat quamcunq; proportionem datam, dũ tamen dicta proportio minor fuerit ea proportione, quam dimidia lineæ in circulo datæ habet ad lineam quæ à centro sit ad ipsam in circulo datam perpendiculariter educta. Esto circulus datus a b c d, eius centrum k, & linea recta sit in circulo data a c minor diametro, & x l contingat circulum in puncto c. & proportio quam habet f ad g, sit minor ea quam habet c b ad h k. Erit quoq; minor ea quam habet c k ad c l, si k l sit æquedistanter ducta ipsi b c. habeat itaq; k c ad c x, eam quam habet f ad g proportionem. quare c x erit maior c l. Describatur circulus circa puncta k x l. Quoniam igitur x c maior est ipsa c l, & sunt ambæ ad angulos rectos lineæ k c m, potest duci linea i n æqualis lineę c m,

quæ

quæ tendat ad k. Igitur id quod continetur sub x i, i l ad contentum sub k e, i l, eã habet proportionem, quam x i ad k e. & contentum sub k i, i n ad contentum sub k i, c l, sicut i n ad c l, & sicut x i ad k e, & sicut c m ad c l, & x c ad k c, & ad k b. Et sicut x i ad k e, et sicut residua i c ad residuam b e eandem habebit proportionẽ, quã x c ad k c, & quam g ad f. Incidit autem k n in contingẽtem, & pars eius quæ inter circumferentiam & rectam a c capitur, uidelicet b e, ad partem cõtingentis inter k n, & cõtactum, deprensam eam habet proportionem, quam f ad g.

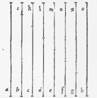


9 Eisdẽ quæ supra posita sunt retentis, & linea quæ in circulo datur extra circulum ducta, potest à cẽtro circuli ad ipsam extra ductã lineã quædã recta sic duci, ut pars ipsius quæ inter circumferentiam & lineam extra ductam comprǽhenditur, ad partem lineæ contingentis quæ inter contactum & ipsam à centro ductam intercipitur, habeat quãcunq; datam proportionem: dum tamen proportio sit ea proportione maior, quã habet dimidia lineæ in circulo datæ, ad lineam quæ à centro sit ad ipsam perpendiculariter ducta. Esto datus circulus a b c d, & recta in circulo data minor diametro sit a c, quæ extra circulum ducatur per punctum c. & altera linea x c contingat circulum in puncto c: & proportio f ad g sit maior proportione c h ad h k. erit quoque maior proportione k c ad c l. Habeat igitur k c ad c x eã quam habet f ad g: ergo c x minor est ipsa c l. Rursus describatur circulus trãsiens per puncta x k l. cum igitur x c sit minor ipsa c l, & ambæ altera alteri ad angulos rectos insistũt, x c, & k m: potest in poni æqualis ipsi c m, quæ tendat in punctum k. Cum itaque cõtentum sub x i, i l æquale est contento sub k i, i n: contentum uero sub l i, k e est æquale contento sub k i, c l, propterea quod est sicut k e ad i k, ita l e ad l i. Sicut ergo x i ad k e, sic contentũ sub k i, i n, ad contentũ sub k i, c l. hoc est sicut n i ad c l, hoc idẽ est sicut c m ad c l. Est aũt sicut c m ad c l, ita x c ad k c, hoc est ad k b. Est igiẽ sicut x i ad k e, ita x c ad k b, & residua i c ad residuã b e, sicut x c ad k c. Quam aũt proportionem habet x c ad k c, eam habet g ad f. incidit igitur k e in lineam extra circulũ ductã, & b e inter extra ductam & circũferentiã cõprensa ad c i, inter cõtactũ & ipsam k e interceptã eam habet, quã f ad g proportionem.



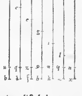
Si

SI lineæ quotcunq; numero consequenter disponantur, quæ sese æqualiter excedant, sitq; excessus breuissimæ illarum ęqualis: item aliæ sumantur lineæ numero prædictis æquales, magnitudine uero unaquæq; æqualis longissimæ: illarũ quadrata omnium quæ sunt æquales lõgissimæ, & quadratum longissimæ, & cõtentum sub breuissima & linea æquali, omnibus simul æqualiter sese excedentibus: hęc omnia simul sumpta tripla erunt, ad quadrata linearum sese æqualiter excedentium simul sumpta. Sunto itaq; quotuisq; lineæ continenter positæ, quæ sese æqualiter excedant, a b c d e f g h. Sit aũt h æqualis excessui: adijciatur uero ipsi b, linea i, æqualis ipsi h. ipsi quoq; c addatur k, æqualis ipsi g. ipsi d addatur l, æqualis f. ipsi e apponatur m, æqualis ipsi e. ipsi f addatur n, æqualis d. ipsi g addatur x, æqualis c. ipsi demum h addatur o, æqualis b. Hæ igitur quæ confectæ sunt, erunt inter se æquales, & longissimæ prædictarum. Est igitur ostendẽdum, quod quadrata istarum omnium simul cum quadrato ipsius a, & eo quod continetur sub h, & sub æquali omnibus simul a b c d e f g h, tripla sunt ad quadrata simul omnium a b c d e f g h. Est itaq; quadratum b i æquale duobus quadratis b, & i, & duobus his quæ fiunt ex b in i. Quadratum uero k c est ęquale quadratis k & c, & duobus his quæ continentur sub c k. Similiter quadrata reliquarum quæ sunt æquales ipsi a, erũt æqualia quadratis partium suarum, & duobus his quæ sub earum partibus continentur. Quadrata igitur a b c d e f g h, & quadrata i k l m n x o, simul cũ quadrato a, dupla sunt ad quadrata a b c d e f g h. Reliquum ostendemus, quod dupla eorum quæ sub partibus uniuscuiusq; lineę æqualis a continentur, simul sumpta cum contento sub h, & linea æquali omnib. simul a b c d e f g h, sunt æqualia quadratis a b c d e f g h. Quoniam itaq; duo quæ sub i & b continentur, æquantur duobus cõtentis sub h & b: duo autem quæ sub k & c, æquantur contento sub h, et quadrupla c, quia k est dupla ipsius h. Duo uero contenta sub l d, æquantur contento sub h, & sexcuplo ipsius d, quia l est tripla ipsius h. Similiter & alia dupla eorum, quæ sub partibus continentur, æquantur contento sub h & multiplici cuiuscunq; secundum numeros pares continenter lineæ sequenti multiplices. Omnia igitur simul sumpta cum eo quod continetur sub h, & sub æquali omnibus a b c d e f g h, ęquabuntur cõtento sub h, & sub æquali omnibus: ipsi a, & triplo ipsius b, quincuplo c, & semper impari secũdum numeros impares continenter multiplices lineæ sequentis. Quadrata quoq; ipsarum a b c d e f g h, æqualia sunt ei quod continetur sub eisdem lineis. nam quadratum ipsius a est æquale contento sub h, & sub æquali reliquis illis quarũ unaquæque æquatur ipsi a. æquè multipliciter enim h mensurat ipsam a, sicut a mensurat omnis sibi æquales simul sumptas. quare quadratum ipsius a, est æquale contento sub b, & omnibus simul æqualib. ipsi a, & duplo ipsarum b c d f g h. nam illæ quæ sunt ęquales ipsi a, omnes excepta a, duplæ sunt ad b c d e f g h. Similiter quadratum b æquaĩ cõtento sub b, & sub linea æquali ipsi b, & dupla ipsis c d e f g b. Et item quadratum c æquatur contento sub b, & sub æquali ipsi c, & dupla ipsarũ d e f g h. Similiter aliarum quadrata æquabunrur contentis sub b, & sub æquali unicuique, & dupla reliquarum. quare constat quadrata omnium æqualia esse ei quod continetur sub h, & sub æquali omnibus, & ipsi a, & tripla b, & quincupla c, & secundum numeros continenter impares multiplici sequentis lineæ. Ex hoc



igitur manifestum est, quadrata simul omnia linearum ęqualium, longissimę quadratis simul omnibus linearum sese æqualiter excedentium minus quàm tripla esse, cum assumptis quibusdam tripla efficiantur illis. Reliquis uero, dempto longissimæ quadrato, plus quàm tripla inueniũtur, cum assumpta sint minus quàm tripla ad quadratum longissimæ. Et si simili forma describãtur ab omnibus, & ab his quæ sese æqualiter excedunt, & ab his quæ sunt æquales longissimę earũ quidem quæ sunt ab his quæ sese æqualiter excedunt formarum, minus quàm tripla existent. Reliquarum uero, dempta ea quæ à longissima fit, plus quam tripla. nã similia specie eandem habebunt inter se proportionem, quàm quadrata habent.

11 SI lineæ quotcunq; numero consequenter disponãtur, quæ sese æqualiter excedant, & aliæ item lineæ sumãtur, quæ quidem dictis lineis sint multitudine una linea pauciores, magnitudine uero unaquæq; æqualis lõgissimæ: harũ æqualium quadrata simul omnia, ad quadrata linearũ sese æqualiter excedentiũ, dempta illarum breuissima, maiorem habẽt proportionem quàm quadratum longissimæ ad id quod est æquale utrisq; simul, ei quod sub longissima breuissimaq; cõtinetur, & tertiæ parti quadrati lineæ illius qua longissima excedit breuissimã. ad quadrata uero linearũ sese æqualiter excedentiũ, dempto lõgissimæ quadrato, habent maiorẽ proportionẽ, quàm sit superius dicta proportio. Esto itaq; quotcunq; numero lineæ sese æqualiter excedẽtes deinceps positæ a b, excedẽs c d, & c d, e f, & e f, g h, & g h, i k, et i k, l m, & l m, n x. Addatũ uero ipsi c d quedã c o ęqualis uni excessui, & ipsi e f æqualis duob. e p, ipsi uero g h æqualis tribus g r, & alijs eodem modo erũt. itaq; quæ inde sunt effectæ inter se æquales, & etiam ipsi lõgissimæ unaquęq; ęqualis. Ostendendũ itaq; est, quadrata simul harum omnia, ad quadrata simul omnia earũ quæ sese ęqualiter excedunt, dempto quadrato n x, minorem habẽt proportionem, quàm quadratum a b ad id quod ęquatur utrisq; simul, ei quod continetur sub a b, n x, & tertiæ parti quadrati n y. ad quadrata uero earũdem dempto quadrato ipsius a b, maiorẽ proportione dicta habent proportionem.



Adimatur unicuiq; earum, quæ sese æqualiter excedunt, æqualis excessus. quam itaq; proportionem habet quadratum a b ad utraq; simul, ad cõtentũ sub a b, u b, & ad tertiã partem quadrati a u, hanc habet quadratum o d ad contentum sub o d, d q, & tertiam partem quadrati o q. & quadratum p f ad contentum sub p f, z f, & tertiam partem quadrati p z, & quadrata reliquarum ad spacia similiter sumpta. Et omnia harum omnium o d, p f, r h, s k, t m, y x: ad omnia contenta sub n x, & æquali omnibus simul dictis lineis, & tertias partes quadratorum o q, p z, r 9, s π, t s, y n. eandem habebunt proportionem, quam quadratum a b ad utraq; simul, ad contentum sub a b, u b, & tertiam partem quadtati a u. Si igitur ostendatur contentum sub n x, & sub æquali omnibus simul his o d, p f, r h, s k, t m, y x, et tertias partes quadratorum o q, p z, r 9, s π, t s, y n, quadratis a b, c d, e f, g h, i k, l m esse minora: quadratis uero c d, e f, g h, i k, l m, n x maiora esse: propositum ostensum erit. Illud igitur quod sub n x, et sub ęquali omnibus simul o d, p f, r h, s k, t m, y x, & tertiæ partes quadratorum o q, p z, r 9, s π, t s, y n æquantur quadratis barũ q d, z f, 9 h, π k, s m, n x, & contento sub n x, & sub ęquali omnibus simul o q, p z, r 9, s π, t s, y n, & tertijs partibus quadratorum prædictorum. Quadrata uero a b, c d, e f, g h, i k, l m, æquantur quadratis harum b u, q d, z f, 9 h, π k, s m, & contento sub b u: & dupla istarum simul a u, c q, e z, g 9, i π, l s, cum quadratis prædictarum

li.

linearum. Communia itaq; sunt utrinq; quadrata lineæ æqualis ipsi n x. Contentum autem sub n x, & sub æquali simul istis o q, p z, r 9, f π, t s, y n minus est contento sub b u, & dupla istarum simul a u, c q, e z, g 9, i π, l s. quia lineæ nuper dictę sunt æquales istis c o, e p, g r, i f, l t, n y. reliduis uero sunt maiores. Et quadrata istarum a u, c q, e z, g 9, i π, l s, maiora sunt tertia parte quadratorum linearũ o q, p z, r 9, f π, t s, y n. hoc enim ostensum fuit suprà. Spacia igitur prædicta minora erunt quadratis istarum a b, c d, e f, g, i k, l m. Reliquum igitur ostendemus, quod sunt maiora quadratis c d, e f, g h, i k, l m, n y. Rursus itaque quadrata istarum c d, e f, g h, i k, l m, n x, æquantur quadratis q c, e z, g 9, i π, l s, & quadratis d q, f z, h 9, k π, m s, n x, & contento sub n x, & sub dupla harum simul omnium c q, e z, g 9, i π, l s, & sunt cõmunia quadrata q d, z f, 9 h, π k, s m, t x. Maius aũt est contentũ sub n x, & sub æquali omnibus simul istis o q, p z, r 9, f π, t s, y n, contento sub n x, & sub dupla istarum simul omnium c q, e z, g 9, i π, l s. Sunt autem quadrata q o, z p, 9 r, π f, t s, y n, quadratis c q, e z, g 9, i π, l s, plus quàm tripla. Ostensum enim est istud. Sunt igitur dicta spacia maiora quadratis c d, e f, g h, i k, l m, n x. Quare constat propositum.

Si spacia quoque forma similia describantur ab omnibus, & ab his quæ sese æqualiter excedunt, & ab his quæ sunt æquales longissimæ: illarum formæ omnium, quæ ab his quæ sunt æquales longissimæ producentur, minorem proportionem habebunt ad formas simul omnis, quæ producentur à lineis sese æqualiter excedentibus, dempta breuissimæ forma, quàm quadratum lõgissimæ ad utraque simul, & contentum sub longissima & breuissima, & ad tertiam partem quadrati lineæ illius qua longissima breuissimã excedit. ad formas autem easdem, dēpta longissimæ forma, proportionem habebunt dicta proportione maiorem. Similes enim spaciorum formæ eandem habebunt, quam quadrata habuerunt, proportionem.

Corollariũ præmissæ.

Si linea recta in plano sit ducta, & quiescente altero eius termino æquali uelocitate circumferatur, donec restituatur in eum locum unde moueri cœperat: & simul cum linea circumlata pũctum feratur æquali uelocitate ipsum sibiipsi, & per se secundum dictam lineam latum, incipiens à termino quiescente: punctum hoc describit in plano lineã spiralem. Terminus itaq; lineæ sic motę quiescēs, uocetur initiũ lineæ spiralis. Positio autem lineæ, à qua linea recta incipit circumferri, initium circulationis. Linea uero recta quam punctum latum in prima reuolutione permeauerit, prima uocetur: & ea quam dictum punctum in secunda reuolutione permeauerit, secunda: & reliquæ similiter pari ordine cum reuolutionibus nominentur. Spacium autem comprahensum à linea spirali in prima reuolutione descripta, & à linea recta quæ prima existit, primum uocetur. Comprahensum uero à linea spirali in secunda reuolutione descripta, & à linea secũda, uocetur secundum: & reliqua deinceps hoc ordine nominentur. Item si à puncto quod est initium lineæ spiralis, ducatur linea recta, huius lineæ ea pars quæ existit, ubi circumuolutio producitur, pręcedens uocetur. quæ uero in alterã partem, sequens. Circulus quoq; descriptus circa punctũ, quod est initium lineæ spiralis secũdum interuallum lineæ quæ prima uocatur, primus & ipse dicatur. Descriptus uero circa idem centrum, secundum interuallum lineæ duplæ priori, secundus dicatur: & reliqui deinceps eodem modo.

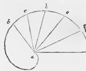
Diffinitiones.

Non dicit propter cõstitutionem, sed differentiam positionis.

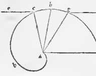
12

SI ad spiralem lineam in una circumuolutione descriptam, quæcunq; fuerit illa circũuolutio, ab initio spiralis lineæ ducantur quotcunq; lineæ rectæ, quæ inter se angulos æquales efficiãt, ipsæ sese æqualiter excedent. Esto spiralis linea, ad quam a b, a c, a d, a e, a f lineæ rectæ sint ductæ, quæ angulos inter se æquales faciant. Ostendendum est, quod a b æqualiter exceditur ab a c, & a c ab a d, & reliquę similiter. In quo enim tempore linea circumuoluta ex a b processit ad a c, in

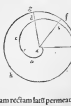
eodem punctum secundū lineam rectam latum excessum permeauit, quo c a excedit a b, in quo uero ex a c in a d, in eadem permeauit excessum quo a d superat ipsam a c. in tempore uero æquali linea circumuoluta ex a b in a c procedit, & ex a c in a d, cū anguli sint æquales. In tempore igitur æquali punctum secundū lineam rectam latum permeat excessum, quo a c excedit a b, & excessū quo a d excedit a c. æquali ergo excessu a c superat ipsam a b, & a d ipsam a c. & reliquæ similiter istis ostendentur.



13 SI linea recta contingat lineam spiralem, in uno solum puncto eam continget. Esto spiralis linea, in qua a b c d: esto eius initium a punctum: initium uero circumductionis, sit a d linea recta. Et cōtingat lineam spiralem linea e f. Dico quod in uno solo pūcto eam contingit. quod si fieri potest, contingat eam in duobus punctis g c, & iungantur a c, a g, & angulus contentus sub c a, a g in duo ęqua diuidatur. punctum autem in quo linea diuidens dictum angulum incidit in lineam spiralem, sit h. Aequaliter itaque a g excedit a h, & a h ipsam a c, cum æquales angulos inter se cōtineāt. quare a g, a c sunt simul ad a h duplæ. Sed eius lineæ quæ diuidit angulum c a g, in duo æqua, sunt lineæ a c, a g plus quàm duplæ. Manifestum igitur, quod punctum in quo a h incidit in lineam c g, est inter punctum a, & pūctum h in linea a h. Igitur e f secabit lineam spiralem, cū aliquod punctum in c g linea collocatum sit intra lineam spiralem. Suppositum uero fuerat, quod eam contingeret. In uno igitur puncto e f continget lineam spiralem.



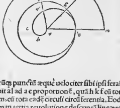
14 SI ad lineam spiralem in prima reuolutione descriptam incidant duæ lineæ rectæ, à puncto quod est linee spiralis initium actæ: deinde extra producantur, usque ad circuli primi circumferentiam, eandem habebunt proportionem inter se illæ quæ in lineam spiralem inciderunt, quam partes circumferētiæ circuli, quæ inter terminum lineæ spiralis, & extrema linearum quæ ad circumferentiam productæ fuerunt, sumendo partes circumferentiæ ab termino lineæ spiralis secundum circumuolutionem. Esto linea spiralis a b c d e h in prima reuolutione descripta, initium eius esto punctum a: et initium reuolutionis esto linea a h recta. & circulus h k g, esto primus. incidant itaq; à puncto a duæ rectæ a e, a d lineæ, ad lineam spiralem: & producantur ad circumferentiam circuli, quam attingant in punctis f g. Ostendendum est, quod a e habet ad ipsam a d eam proportionem, quam h k f circumferentiæ pars, ad h k g partem. In circumductu enim lineæ a h manifestum est, pūctum h permeasse circumferentiā h k g æqua uelocitate, qua punctū a per lineam rectam latū permeauit lineā a d: & item punctum b per circumferentiam latum æquo tempore permeauit b k f



cir-

circumferentiam, quo punctum a lineam a c rectam. Manifestum est igitur, quod a e eandem ad ipsam a d habebit proportionem, quam b k f circũferentia ad h k g circumferentiã. Hoc aũt superius est ostensum. Similiter uero demonstrabitur, si altera incidẽtiũ linearũ in terminũ lineæ spiralis inciderit. nam idem continget.

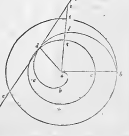
15 SI in lineã spiralem in secũda reuolutione descriptã, incidãt rectæ ab initio spiralis lineæ eductæ, eandem habebunt inter se lineæ rectę proportionẽ, quã dictæ circumferentiæ simul cũ tota circũferentia circuli sumptæ. Esto linea spiralis, in qua a b c d h, quę sit in prima reuolutione descripta. itẽ h l m, in secũda. & incidant in eam duæ rectæ a e, a l. Ostendendũ est quod eandem habet a l ad a e proportionẽ, quã h k f circũferẽtia simul cũ tota circuli circũferentia ad h k g, cũ tota circuli circumferẽtia. In quãto enim tẽpore pũctum a per lineã rectã latũ permeat a l lineã, et h punctũ in eodẽ per circũferẽtiam latũ totã circuli circũferẽtiam permeat, et insuper h k f. Et item dum a punctũ permeat a e, et h punctũ permeat



totã circũferẽtiam, & insuper h k g, cũ utrũq; punctũ æquè uelociter sibi ipsi feraẽ. Manifestũ est igitur, quod eãdem habebit a l ad a e proportionẽ, quã h k f cũ tota circuli circũferentia, ad h k g circũferẽtiam, cũ tota eadẽ circuli circũferentia. Eodẽ aũt modo ostendeẽ, & si in lineã spiralem in tertia reuolutione descriptã lineæ rectæ inciderint, eãdem habebũt inter se proportionem, quã dictæ circũferẽtiæ cũ tota circuli circũferentia bis sumpta utriſq;. Similiter aũt & quæ in alias lineas spirales inciderint, ostendenẽ quod eandẽ habeant proportionẽ, quã dictæ circũferentiæ cum tota circumferẽtia circuli, secundũ numerũ uno minorẽ, q̃ sint reuolutiones. et utraq; linea incidẽs in terminos ipsius lineę spiralis inciderit, idẽ eueniet.

16 SI lineam spiralem in prima reuolutione descriptam recta linea contingat, & à puncto contactus ducatur linea recta ad punctum quod est principium lineę spiralis: anguli, quos contingens cum ducta facit, erũt inæquales: & ille quidem qui fuerit in præcedentiũ parte, obtusus existet: qui uero in parte sequentium, erit acutus.

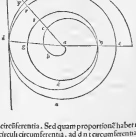
Esto linea spiralis, in qua a b c d h in prima reuolutione descripta. & esto a punctum, principium lineæ spiralis. Linea uero recta a h sit initiũ reuolutionis. Sit primus circulus h g k. Contingat autem aliqua recta linea spiralem lineam, quæ sit e d f, in puncto d, & ab ipso d ducatur ad a linea d a. Ostendẽdum est, quod d f cum d a obtusum angulum facit. Describatur d t n circulus, posito a cẽtro secundum interuallum ipsius d a. Necesse est itaq; eam huius



circuli circumferentiam, quæ est in parte præcedentium, infra lineam spiralem cadere.

dere. quæ uero in parte, ſequentium extra. Quia linea recta ab a ad lineam ſpiralem in parte præcedentium ducta, eſt maior a d linea. quæ uero ab ipſo a in parte ſequentium ducta fuerit, ipſa a d minor exiſtet. Quod autem angulus contentus ſub a d f, non ſit acutus, patet, cum ſit maior angulo ſemicirculi. Quod autẽ non ſit rectus, eſt ſic oſtendẽdum. Eſto ſi fieri poteſt, ſit rectus. Igitur e d f contingit circulum d t n. Iam poteſt ab a puncto duci linea recta ad cõtingentem, ut eius pars quæ inter circumferentiam & contingentem deprehenditur, ad ſemidiametrum minorem habeat proportionem, quàm habeat circumferentia inter contactum & lineam ductam deprehenſa, ad circumferẽtiam datam. Ducatur itaq;, ut dictũ eſt, a t. Secat autem ipſa lineam ſpiralem, eſto in puncto l, & circumferentia circuli d t n in puncto r. & linea a r i recta, ad lineam a r minorem habeat proportionẽ, quàm d r ad d t n circumferentiam. Tota igitur a i ad a r minorem habet proportionem, quàm r d n t circumferentia, ad d n t circumferentiam: hoc eſt quàm habet ſ g k h circumferentia ad g k h circumferentiam. Quam uero habet ſ g k h circumferentia, ad ipſam g k h circumferentiam, hãc habet a l recta ad a d rectã. hoc etiam iam oſtenſum fuit. Minorem igitur proportionem habet a i ad a r, quàm l a ad ipſam a d. Quod quidem eſſe non poteſt. nam r a eſt æqualis ipſi a d. Non eſt igitur angulus a d f rectus. Et oſtenſum eſt, eum non eſſe acutum. Quare obtuſus exiſtet. reliquus igitur eſt acutus. Similiter oſtendetur, ſi contingens contigerit in termino lineæ ſpiralis. nam idem eueniet.

17 SI lineam ſpiralem in ſecunda reuolutione deſcriptam, linea recta continget, illud idem eueniet. Contingat itaq; linea recta e f, lineã ſpiralem in ſecũda reuolutione deſcriptam, in puncto d: et cetera ſimiliter ſuperiorib. diſponãtur. Similiter circumferentiæ r n d circuli pars illa, quæ erit in parte præcedentium cadet intra lineam ſpiralem: quæ uero in parte ſequentium, cadet extrà. Angulus igitur a d f non eſt acutus, neq; rectus, ſed obtuſus: quod ſic demonſtratur. Eſto enim ſi fieri poteſt, ſit rectus. linea igitur e f continget circulum r n d. Eſto in puncto d. Ducatur item a i ad contingentem, & ſecet lineam quidem ſpiralem in puncto q, circumferentiam uero circuli r n d in puncto r. Habeat autem r i ad a r minorem proportionem, quàm d r circumferentia ad totã circuli r n d circumferentiam, et ad d n t circumferentiam. Oſtenſum enim eſt, hoc eſſe poſſe. & iam tota i a ad a r minorem habet proportionẽ, quàm r d n t circumferẽtia cum tota circuli circumferẽtia, ad d n t



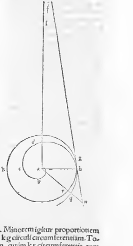
circumferentiã, cum tota d n t circũferentia. Sed quam proportionẽ habet r d n t circumferẽtia, cum tota d n t r circuli circumferentia, ad d n t circumferentiam cũ tota d n t circuli circumferentia: hanc habet ſ g k h circumferentia, cum tota circuli circumferentia h ſ g k, ad g k h circumferentiam, cum tota circuli h ſ g k circumferentia. Quam autem proportionem habent circumferentiæ poſtremò dictæ, eam habet q a linea recta, ad ipſam a d rectã. Hoc enim oſtenſum fuit. Minorem

igitur

igitur proportionem habet i a ad a r, quàm a q ad ipsam a d: quod quidem esse nõ potest. nam r a est æqualis ipsi a d. maior uero est i a, quàm a q. quare constat, angulum a d f obtusum esse, reliquum uero acutum Hæc eadem euenient, si contingens in termino lineæ spiralis ipsam contingere ponatur: & eadem ratione demõstrabitur, ubi lineam spiralem quacunq; reuolutione descriptam, linea recta contigerit, etiam in termino ipsius lineæ spiralis angulos inæquales fieri, cum linea ducta à puncto quod est initium lineæ spiralis ad punctum contactus: & eum qui in parte præcedentium fuerit, obtusum esse: qui uero in parte sequentium, acutum.

18 Si lineam spiralem in prima reuolutione descriptã linea recta contigerit in termino lineæ spiralis, à puncto autem quod est initium lineæ spiralis, ducatur linea quædam recta stans angulis rectis super lineam, quæ initium fuit reuolutionis: illa ducta coincidet lineæ contingenti, & eius pars quæ intra contingentem, & initium spiralis lineæ deprehenditur, æqualis erit circumferentiæ primi circuli.

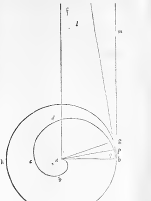
Esto linea spiralis a b c d h, esto autem pũctum a initium eius, linea uero a b initium reuolutionis, & sit h g k circulus primus. Contingat autem quædam spiralem lineam in puncto h, quæ sit h f, & à puncto a ducatur ad angulos rectos super lineam h a, linea a f, quæ coincidet cum h f, cum f h, h a contineant angulum acutum, coincidat itaq; in puncto f. Est itaq; demõstrandum, lineam rectam f a circumferentiæ circuli h k g esse æqualem. Si enim non est, aut erit ea maior, aut minor. Esto primũ, si esse potest, maior. Sumatur autem quædam recta, quæ sit minor linea a f, & maior circumferentia h k g. est iam h k g circulus quidam, & in circulo linea recta minor diametro, quę est g h: & proportio linea h a ad a l maior est proportione ea quam habet dimidia h g ad lineam ab ipso a ad ipsam h g perpendiculariter ductam, quoniam & eam babet quam h a ad a f. Potest igitur à puncto a educi ad eductam a n, ita ut n r, quæ media intercipit̃ inter h n eductam, & circumferentiã ad ipsam h r rectam, eam habeat proportionem, quã h a ad a l. Habebit igitur n r ad r a, eam quã habet h r recta ad a l. ipsa uero h r ad a l minorem proportionem babet, quàm h r circumferentia ad k h g circuli circumferentiã. nam h r recta minor est circumferentia h r,



& linea a l recta maior est circumferentia circuli. Minorem igitur proportionem habebit n r ad r a, quàm h r circumferentia ad h k g circuli circumferentiam. Tota igitur n a ad a r haber minorem proportionem, quàm k r circumferentia cum tota circuli circumferentia ad h k g circuli circumferentiam. Quam autem proportionem baber h r circumferentia cum tota circuli h g k circumferentia, ad h k g circuli circumferentiam, hanc babet q a ad b a. Hoc enim ostensum est. Minorem igitur proportionem habebit n a ad a r, quàm q a ad h a. quod quidem esse non potest. Nam n a maior est ipsa q a, & a r est æqualis h a. non est igitur a f circumferentia circuli h k g maior. Esto uero, si fieri potest, minor f a circũferentia

circuli

circuli h k g. Sumatur item quædam linea a l recta, quæ sit maior a f, & minor circumferentia circuli h k g. Et ducatur à puncto h recta h m, æquedistans ipsi a f. Rursus est circulus h k g, & in ipso linea recta h g minor diametro, & itẽ alia quæ contingit circulũ in pũcto h. et proportio quam habet h a ad a l, est minor ea quã habet dimidia g a ad lineã ab a ad se ductam perpendiculariter. Quoniã uero & minor est ea quã habet h a ad a f, potest ab a duci a p ad cõtingentem, ita ut r n linea inter rectam in circulo datam & circumferentiam comprehensa, ad lineam h p comprehensam inter ductam & cõtactum eam habeat proportionẽ, quam h a ad a l. Secet autem a p circulũ in puncto r, lineam uero spiralem in puncto q. Tunc habebit permutatim, eandem proportionem n r ad r a, quam h p ad a l. Linea uero h p ad a l maiorem habet proportionẽ, quàm h r circumferentia, ad b g k circuli circumferentiam. nam h p recta, maior est h r circũferentia:

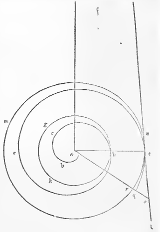


& a l minor est h g k circuli circumferentia. maiorem ergo habet proportionem n r ad a r, quàm h r ad g h k circuli circumferentiam. quare & r a ad a n maiorem habet proportionem, quàm h g k circuli circumferentia, ad h k r circumferentiã. Quam autem proportionem h g k circuli circumferentia ad h k r circumferentiã, eam habet h a recta ad a q. nam hoc est ostensum. Maiorem ergo proportionem habet r a ad a n, quàm h a ad a q. quod quidem esse non potest. Non est igitur minor, neque maior a f recta, h g k circuli circumferentia. igitur est eidem æqualis.

20 SI lineam spiralem in secunda reuolutione descriptam aliqua linea recta in illius termino contingat, & ab initio lineæ spiralis ducatur aliqua recta super lineam quæ est initium reuolutionis constituta ad angulos rectos: illa coincidet cũ contingente, & linea recta quæ media erit inter contingentem, & initium lineæ spiralis, dupla esse probatur circumferentiæ circuli secundi. Esto itaq; a b c h linea spiralis in prima reuolutione descripta, et h e t in secũda, & h k g circulus primus, & t m n secundus. Sit autem t f quædam linea contingens lineam spiralem in pũcto t, & f a ducta ad angulos rectos super t a. Coincidet autem ipsa lineæ t f, cum sit ostensum angulum a t f esse acutum. Ostendẽdum itaq; est, a f rectam duplam esse circumferenntiæ circuli t m n. Nam si non est ei dupla, aut plus aut minus erit, quam dupla eiusdem. Esto prius si potest esse, plus quàm dupla, & sumatur a l recta minor a f recta, & maior quàm dupla circumferentiæ circuli t m n. Est iam circulus quidam t m n, & in circulo linea data t n minor diametro: & quam habet t a ad a l maior est proportione quam habet dimidia t n, ad perpendicularem a b a

centro

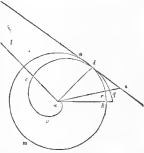
centro ad ipsam ductam. Poteſt igitur ab a educi a ſ ad t n extra actam, ita ut media inter t n extra actam, & circumferentiam quæ ſit r s, habeat ad t r eam proportionem, quam t a ad a l. Secet autem a ſ circulum in puncto r. Et lineam ſpiralem in puncto q. Et permutatim, eãdem habebit proportionẽ r s ad t a, quam t r ad a l. Sed ipſa t r ad a l minorem proportiõem habet, quàm t r circũferentia ad duplam circumferentiæ circuli t m n. nam t r linea recta, minor eſt t r circũferẽtia. Recta uero a l maior eſt, quàm dupla circũferentiæ circuli t m n. Minorẽ ergo habet proportionem r s ad a r. quàm t r circũferẽtia ad duplã circumferẽtiæ circuli t m n. Tota igitur s a ad a r minorem habet proportionem, quàm t r circumferentia, cum circumferentia circuli t m n bis ſumpta, ad circumferentiam circuli t m n bis ſumptã. Quam autem proportionem habent dictæ circũferentiæ, eam habet q a ad a t. hoc enim oſtenſum eſt. Minorem ergo proportionem habebit a ſ ad a r, quàm q a ad t a. quod eſſe non poteſt. nõ eſt igitur a f plus quàm dupla circumferentiæ circuli t m n. Similiter autem oſtendetur, quod neque minor, quàm dupla illius eſſe poteſt. Quare conſtat duplam eſſe. Oſtendendum quoque, ſi lineam ſpiralem in quacunque reuolutione deſcriptã, recta quædam contigerit in termino illius, & ab initio lineæ ſpiralis ducatur ſuper lineam quæ eſt reuolutionis initium, linea recta ad angulos rectos, ipſa coincidet contingenti, & multiplex eſt circumferentiæ circuli ſecundum reuolutionem numeri nominati eodem numero, & ipſa multiplex nominata.



SI lineam ſpiralem in prima reuolutione deſcriptam linea recta contingat, non in termino ipſius, & à puncto cõtactus ad initium lineę ſpiralis recta ducatur, & initio lineæ ſpiralis poſito centro deſcribatur circulus ſecundum interuallum lineæ ductæ, ab initio autem lineæ ſpiralis quædam recta ducatur ſuper lineam reuolutionis initium ad angulos rectos conſtituta, ipſa cum contingente concurret. Et linea inter huiuſmodi concurſum & initium lineæ ſpiralis media, æqualis eſt circumferentiæ circuli deſcripti, quæ inter punctum contactus & ſectionis pũctum compræhenditur, in quo puncto circulus deſcriptus ſecat lineam initium reuolutionis, cum in præcedentium parte circumferentia ſumatur à pũcto quod ſitum eſt in reuolutionis initio. 21 Eſto linea ſpiralis, in qua a b c d in prima reuo-

p lutionẽ

lutione descripta, & contingat eam aliqua recta e d f, in puncto d. ab ipso uero d ad initium lineæ spiralis ducatur linea d a, & super centro a describatur circulus secundum interuallum a d, qui sit d m n. Secet autem hic initium reuolutionis in puncto k. Ducatur autem f a ad a d secũdum angulos rectos. Quod autem ipsa cõcurret cũ cõtingẽte, manifestũ est. Quod uero f a recta sit æqualis k m n d circũferẽtiæ, est demõstrandũ. Nã si nõ, uel maior, uel ea minor existet. Esto primũ maior, si esse potest. Sumat᷑ aũt quædã recta l a, minor recta f a, & maior circumferẽtia k m n d. Rursus circulus est k m n, & in circulo recta d n minor diametro data, & proportio quã habet d a ad a l, maior est ea quam habet dimidia d n, ad perpendicularem à cẽtro super ipsam d n ductam. Potest igitur à puncto a educi a e ad ipsam n d

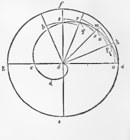


extra ductã, ita ut e r ad d r eã habeat proportionẽ, quam d a ad a l. nã hoc fieri posse ostẽsum est. Habebit igitur e r ad a r eam proportionẽ, quam d r ad a l. & d r ad a l minorem habet proportionem, quàm d r circumferentia ad k m d circumferẽtiam, cum d r recta minor sit d r circumferentia, ipsa uero a l sit maior k m d circũferentia. Minorem ergo proportionem habet e r recta ad r a, quàm d r circumferẽtia ad k m d circumferentiam. quare & a e ad a r minorem habebit proportionem, quàm k m r circumferentia, ad k m d circumferentiam. Quam aũt proportionem habet k m r circũferẽtia ad k m d circumferentiã, eã habet q a ad ipsam a d. quare minorem proportionẽ habebit e a ad a r, quàm q a ad ipsam d a, quod esse non potest. Non erit igitur f a maior circumferentia k m d. Similiter autem eis quæ antea dicta sunt ostendetur, quod neq; minor est illa, quare æqualem illi esse necesse est. Eodem autem modo ostendetur, & si lineam spiralem in secunda reuolutione descriptam recta contingat, non in termino illius, & cætera ut prius disponantur, quod linea recta media inter contingentem, & initium lineæ spiralis, æqualis est toti circuli descripti circumferentiæ, & insuper circumferentiæ inter dicta puncta depræhensæ, ipsa iã dicta circũferentia similiter sumpta. Item si lineam spiralem in quacunq; reuolutione descriptam aliqua recta contigerit, non in termino ipsius, & cętera disponantur, ut suprà, quod recta intermedia inter dicta puncta multiplex existit circumferentiæ circuli descripti secundum numerum uno minorem, eo secundum quẽ reuolutio facta fuerit, & dicta insuper media inter dicta pũcta æqualis est dictæ circumferentiæ similiter sumptæ.

22 SI spacium à linea spirali in prima reuolutione descripta, & à linea recta initio reuolutionis primæ compræhensum sumatur, potest figura quædam plana circa ipsum describi, & altera intra, quæ figurę ex frustis similibus sint compositę, & ita ut id quo circumscripta inscriptam excesserit, quocunq; dato spacio minus existat. Esto linea spiralis in prima reuolutione descripta a b c d. Esto initium lineæ spiralis punctum b, & initium reuolutionis b a. Primus autem circulus

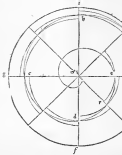
f g i a,

f g i a, & a g, ſi diametri ipſius inter ſe altera alteri perpendicularis. Diuiſo itaq; angulo recto per æqualia, & fruſto ſpacij angulum rectum continentis, & hac diuiſione in reliquis retēta, deueniemus tandem ad reſiduū quoddā, quod minus erit dato ſpacio. & ſit illud fruſtum reſiduum factum a h k, minus dato ſpacio. Diuiſi ſunt itaque anguli quatuor recti in angulos æquales illi angulo qui continetur ſub a h, h k. & rectę partientes angulos uerſus lineam ſpiralē ductæ, ſecant eam. Eſto itaq; pūctum l, in quo h k ſecat ſpiram, & centro h deſcribatur circulus ſecundum interuallū h l. Eius itaq; pars quæ in præcedētium partem fertur, intra ſpiralem lineam cadet. Quę uero in partem ſequētium, extrà. Deſcribatur itaq; eius circumferentia, ut incidat in a h in pūcto o, & ſit ipſa o m. Et item linea, quæ poſt h k ad ſpirā ducta, ſecat illam, eſto in pūcto n. & dicta circumferentia incidat in illam in puncto m. Et item centro h interuallo h n poſito, deſcribatur circulus. Huius quoq; circūferentia incidet in lineam ſequentem h m, quæ à centro ducta incidit in ſpiram. Et ſimiliter in alijs omnibus quæ ſecant lineam ſpiralem, & faciunt angulos ſecūdum unamquanq;, deſcribantur circuli in centro h, eorum circumferentiæ ſecūdum unamquamq; incidetit & in præcedentem & in ſequentem. Et circūferentiæ in præcedentium parte intra cadent, & in parte ſequentium extra lineam ſpiralem. Iam igitur circa ſpacium ſumptum, eſt circumſcripta quædam figura: & alia inſcripta eidem, quæ ſunt ex fruſtis ſimilibus compoſitæ, & circumſcripta addit ſuper inſcriptam dato ſpacio minus. Quod oſtendetur. nam fruſtum h l o eſt æquale fruſto h l m, & h n p æquatur h n r, & h q s ipſi h q t. Eſt etiam unumquodq; eorum fruſtorum, quæ in figura inſcripta continentur, æquale illi fruſto in figura circumſcripta contento, quod commune latus cum illo habuerit. Conſtat igitur, omnia fruſta omnibus fruſtis æqualia eſſe. Figura igitur ſumpto ſpacio inſcripta, eſt æqualis figuræ circumſcriptæ eidem, dempto a h k fruſto. nam hoc ſolum eorum quæ in figura circumſcripta exiſtunt, relictum eſt. Cōſtat igitur, circumſcriptam figuram inſcripta maiorem eſſe fruſto h k a: quod quidem eſt propoſito ſpacio minus. Ex hoc itaq; manifeſtum eſt, quod circa dictum ſpacium poteſt circumſcribi figura qualis dicta eſt, & altera inſcribi dicto ſpacio, ita quod circumſcripta dicto ſpacio ſuperaddat minus quocunq; ſpacio dato, & inſcripra diminuat ab eodem quocunq; dato ſpacio minus. Et ipſum ſpacium figuram inſcriptam excedat, ſimiliter quocunq; ſpacio dato minus.



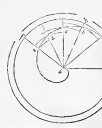
SI ſumatur ſpacium compræhenſum à linea ſpirali in ſecunda reuolutione deſcripta, & à recta quæ eſt ſecūda in reuolutionis initio: poteſt ipſi ſpacio quædam plana figura circumſcribi, & alia inſcribi, quæ ex fruſtis ſimilibus ſint cōpoſitæ, ita ut id quo circumſcripta excedit inſcriptam, quocunq; dato ſpacio minus ſit. Eſto linea ſpiralis, in qua a h c d e in ſecunda reuolutione deſcripta: & eſto pūctum h initium lineæ ſpiralis, & a h initium reuolutionis, & e a ſit recta ſecunda in reuolutionis initio, & a f g eſto circulus ſecundus, a g, f i diametri ipſius quæ 25

ſeſe ad angulos rectos ſecent. Et item diuiſis per æqualia angulis rectis, & fruſtis quæ continent angulos rectos ſimiliter, & pariter diuiſis, & hac diuiſione perducta, tandem deueniemus ad aliquod reſiduum, quod erit minus quocunq; ſpacio dato. Et ſit illud fruſtum h k a minus dato ſpacio. Diuiſis angulis rectis in æquales angulos ei angulo, qui continetur ſub k h a, & cæteris diſpoſitis ut ſupra, erit id quo figura circumſcripta excedet inſcriptam minus ſpacio dato, nam exceſſus quo fruſtũ h k a excedit fruſtũ h e r, minor eſt fruſto h k a. Quare conſtat, circumſcriptã figuram addere ſuper inſcriptam minus dato ſpacio, et eam ſuper ſpacium in ſpira ſumptum addere poſſe minus quocũque ſpacio dato. Et ipſum ſpaciũ ſumptum addere ſuper inſcriptam minus quocunque ſpacio dato, & hæc fieri poſſe.



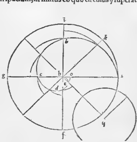
Eodem autem modo conſtat fieri poſſe, ut ſumpto ſpacio à linea ſpirali in quacunque reuolutione deſcripta compræhenſo, & à recta reuolutionis initio ſecundum reuolutionis numerũ dicta circa ipſum ſpacium quædam figura plana circumſcribatur, & altera inſcribatur eidem, ut dictum eſt, ita ut id quo circumſcripta ſumptum ſpacium excedat, minus ſit quocunq; ſpacio dato. Et item id quo ſpacium ſumptum excedat inſcriptam ſibi figuram, ſit minus quocunq; ſpacio dato.

24 SI ſumatur ſpacium compræhenſum à ſpirali linea, quæ ſit minor ea quæ in una reuolutione deſcribitur, quæ'que non habeat terminum lineæ ſpiralis initium, & compræhenſum à rectis ductis ab initio lineę ſpiralis ad terminos dictæ ſpiralis ſpacium compræhendentis. Poteſt ipſi ſpacio plana quædam figura circũſcribi, ex fruſtis ſimilib. compoſita: & alia inſcribi eidem, ita ut circumſcripta excedat inſcriptam minus, quàm ſit quodcunq; ſpacium datum. Eſto linea ſpiralis a b c d e, eius termini a e: ſit lineæ ſpiralis initium h, & iũgantur a h, e f. deſcribatur quoque circulus cẽtro h, interuallo h a, & incidat in h e in puncto f. Angulo itaq; ad h poſito, & fruſto a h f ſimul in æqua diuiſo, et diuiſione tali producta donec reſiduum mi-



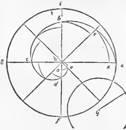
minus existat dato spacio, est ut frustum h a k minus sit spacio proposito. Similiter iam his quæ suprà sunt demonstrata, descripti sint circuli per puncta lineã spiralem secanna transeuntes, secundum lineas rectas, quæ faciunt ad h angulos æquales. & ductæ ita sint, ut & in parte sequentium, & in parte præcedentium incurrant in circumferentias circulorum, quæq; suo loco. Erit iam ipsi spacio quod à linea spirali a b c d e, & à rectis h a, h e continetur, figura quædam circumscripta plana, ex frustis similibus composita: & alia eidem inscripta, & excessus quo figura circumscripta superat inscriptam, minor est spacio proposito. nam frustũ h a k est minus dato spacio. Ex hoc manifestum est, quod circa dictum spacium potest circumscribi figura plana, qualis dicta est, ita ut circumscripta figura dictum spacium minori spacio superet, quàm sit spacium quodcunque propositum. Et spacium ipsum figuram sibi inscriptam minori spacio similiter superet, quàm sit spacium quodcunq; datum.

Spacium à linea spirali in prima reuolutione descripta, & à recta in reuolutionis inmo prima comprehensum, est tertia pars circuli primi. Esto linea spiralis in qua a b c d e h in prima reuolutione descripta, & h punctum initiũ lineæ spiralis, & h a recta prima in reuolutionis initio. & a f g i sit circulus primus, cuius tertia pars sit circulus q. Ostendendũ est, quod prædictum spacium æquale est circulo q. nam si non, uel maius erit, uel minus eo. Esto primum, si esse potest, minus eo. Circa spacium itaq; contentum sub a b c d e h linea spirali, & sub recta h a describi potest figura quædam plana ex frustis similibus composita, ita ut id quo circumscripta figura superat ipsum spacium, sit minus eo quo circulus q superat spacium dictum. Circumscribatur itaq;, & esto frustorũ ex quibus componitur dicta maximum h a k, minimum uero h e o. Manifestum igitur, quod figura circumscripta minor est circulo q. Eductæ autem sunt lineæ rectæ ab h facientes angulos æquales, & incidẽtes in circumferentiam circuli. Quædam uero intra cadunt, in lineam spiralem incidentes, quæ sese æquali excessu superant: quarũ maior quidem est h a, minor uero h e, & minima æqualis excessui. Sunt autẽ & aliæ lineæ ab h ad circũ



ferentiam circuli procedentes, multitudine quidem prædictis æquales, magnitudine uero unaquæq; æqualis maximæ prædictarum, & ab omnibus similia frusta comprahensa sunt, & ab his quæ sese æquali excessu superant, & ab his quæ sunt inter se & maximę illarum æquales. Frusta igitur quæ cõtinẽtur, ab his quæ inter se sunt & maximæ illarum æquales, sunt minus quàm tripla frustorum quæ continentur ab illis quæ sese æqualiter excedunt. Ostensum namq; hoc fuit. Sunt autem frusta ab his compræhẽsa, quæ inter se sunt & maximæ aliarum æquales, circulo a f g i æqualia. Frusta uero contenta ab illis quæ sese æqualiter excedunt, æqualia sunt figuræ circumscriptæ. circulus ergo a f g i minor est q̃ triplus figuræ circũscriptæ. Ip se uero est triplus circuli q. Circulus ergo q minor existet figura cir

cumscripta: quod quidem uerum non est, sed maior existit illa. Non est igitur spacium compræhensum à linea spirali a b c d e h, & linea recta h a, minor circulo ɣ. Neq; utiq; maior. Esto itaq; maior, si esse potest. Item spacio compræhenso à linea spirali a b c d e h, & recta h a potest inscribi figura, ita ut dictũ spacium minus addat super figuram inscriptã, quàm sit id quodcunque spacium dictum addit super circulum ɣ. Inscribatur itaq;. Et esto frustorum ex quibus inscripta componitur, maximũ h t x. minimum uero, o h e. Constat iam, figuram inscriptam circulo ɣ esse maiorem. lineę quæ angulos ad h faciebant æquales eductæ, in circuli circumferentiam inciderunt. Rursus quædam rectæ sunt sese æqualiter excedentes, ab h ad spiram procedentes, quarum maxima est h a, minima uero h e, & minima æquatur excessui. Sunt



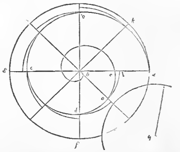
item aliæ lineæ ab h puncto ad circuli circumferentiam eductæ, multitudine quidem æquales prædictis, magnitudine uero unaquæq; æqualis maximæ illarum: & ab omnibus describuntur frusta similia, & ab illis quæ inter se & maximæ aliarum sunt æquales, & ab illis quæ sese æqualiter excedũt. Frusta igitur ab illis quæ sunt maximæ aliarum æquales, descripta existunt plus quàm tripla frustorũ quæ à lineis sese æqualiter excedentibus continentur, dempto illo quod à maxima contentum est. Hoc enim demonstratum fuit. Frusta uero à lineis maximæ æqualib. contenta, circulo a f g i æqualia sunt. quæ uero à lineis æqualiter sese excedentib. compræhenduntur, dempto eo quod à maxima æquantur, figuræ inscriptæ. Circulus igitur a f g i est plus quàm triplus inscriptæ figuræ. idem uero triplus est circuli ɣ. Quare circulus ɣ maior est inscripta figura. Sed fuerat positus minor. Spacium igitur comprensum à spira a b c d e h, & à recta a h, neq; minus circulo ɣ, neque maius existit. Igitur necesse est esse eidem æquale, quod erat demonstrandũ.

26 SPacium quod à spirali linea in secunda reuolutione descripta, & à secunda linea recta reuolutionis initio producta cõtinetur, habet ad circulum secundũ eam proportionem, quam septem ad duodecim, quæ eadem est ei quam habent utraq; simul, contentum sub semidiametro circuli secundi, & semidiametro circuli primi, & tertia pars quadran lineæ illius qua semidiametros secundi circuli excedit semidiametrum primi circuli, ad quadratum semidiametri circuli secundi. Esto linea spiralis, in qua a b c d e, in secũda teuolutione descripta. Esto h pũctum lineæ spiralis inicium, recta uero h e in reuolutionis initio prima. recta autem a e, in reuolutionis initio secunda: circulus a f g i secundus. sint autem a g, f i diametri eius, altera alteri sit perpendicularis. Ostendendum est itaq;, spacium contentum à linea spirali a b c d e, & à recta a e ad circulum a f g i, habere eam proportionem, quam septem habent ad duodecim. Esto circulus quidam ɣ, cuius semidiametrus potestate sit æqualis ei quod continetur sub a h, h e, & tertiæ parti quadrati lineæ a e. habebit iam circulus ɣ ad circulum a f g i, sicut septem ad duodecim. Quoniam semidiametrus eius ad semidiametrum a f g i circuli eam habet proportionem potestate. Sed circulus ɣ ostendetur æqualis esse spacio contento à linea spirali, & à recta a e, nam si non sit, uel itaq; maior erit, uel minor eo. Esto itaq; primum maior,

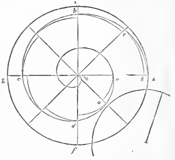
ior, si esse potest. Circa spacium itaque describi potest quædam plana figura, ex frustis similibus composita, ita ut figura circumscripta super spacium addat minus, quàm sit spacium quo ς circulus excedit dictum spacium. Esto circumscripta, & sit h a k frustum maximum eorũ ex quibus figura circumscripta componitur, minimũ uero h o d.

Constat igitur, circumscriptam figuram circulo ς esse minorẽ. Educantur lineæ rectæ quæ faciunt angulos æquales ad h uersus circumferentiam circuli secũdi, in eam incidẽtes. Erunt iam quædam lineæ rectæ, sese æqualiter excedentes, quæ uidelicet à puncto h, in spiram incidunt, quarum maxima est h a, minima uero h e. Erũt etiam aliæ lineæ à puncto h, ad circumferentiã circuli a f g i eductæ, multitudine quidẽ una pauciores illis: magnitudine uero & inter se, & maximæ illarum æquales, & confecta sunt frusta similia, & ab eis quæ sunt inter se & maximæ illatum æquales, & ab eis quæ sese æqualiter excedunt: à minima autem non est confectum aliquod. Frusta igitur, ab eis quæ sunt æquales maximæ illarum confecta, habent ad frusta confecta à lineis sese æqualiter excedentibus, dempto eo quod à minima, minorem proportionem, quàm quadratum h a maximæ ad utraque simul hæc, ad contentũ sub h a, h e, & tertiam partem quadrati a e. Hoc enim ostensum est. Circulus autem a f g i æquatur frustis, quæ à lineis inter se & maximæ illarum æqualibus confecta sunt. Frustis autem confectis à lineis sese æqualiter excedennibus, æquatur figura circumscripta. Minorem igitur proportionem habet circulus a f g i, ad figuram circumscriptam, quàm quadratum ad hæc utraque simul, ad contentum sub a h, h e, & tertiam partem quadrati a e. Quam autem proportionem habet quadratum a h, ad cõtentum sub a h, h e, & tertiam partem quadrati a e: hanc habet circulus a f g i, ad circulum ς. Minorem ergo proportionem habet a f g i circulus ad figuram circumscriptam, quàm ad circulum ς. Quare colligitur, circulum ς minorem esse figura circumscripta. quod est cõtrarium ei quod positum fuerat. Circulus igitur ς spacio à linea spirali a b c d e, & recta a e contento, maior esse non potest. Verum neque minor. Esto namque, si esse potest. Rursus in spacio à linea spirali a b c d e, & recta a e contento, potest quædam figura plana inscribi, ex frustis similibus composita, ita ut spacium à linea spirali a b c d e, & recta a e contentum, addat supra figuram inscriptam minus eo quo idem spacium excedit circulum ς. Esto igitur inscripta, & sit h k r frustum maximum eorum ex quibus componitur inscripta figura. Minimum uero, sit h e o. Constat igitur figuram inscriptam circulo ς esse maiorẽ. Educãtur lineæ rectæ, quæ faciunt angulos æquales ad b, uersus circumferentiã

cir-

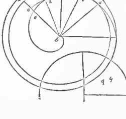


circuli a f g i, in quam incidant. Rursus erunt lineæ quædam æqualiter sese excedentes, quæ à puncto h in spiralem incidunt, quarum maxima h a, minima uero h e. Erunt item aliæ lineæ à puncto h ductæ in circumferentiam circuli incidẽtes, multitudine quidẽ una pauciores illis, magnitudine uero & inter se & maximæ illarũ æquales. Et à lineis sese ęqualiter excedentibus confecta sunt frusta similia, & à lineis maximæ illarum æqualibus. Frusta igitur ab æqualibus maximæ illarum confecta, ad frusta à lineis sese æqualiter excedentibus confecta, dempto eo quod à maxima maiorẽ proportionem habebit, q̃ quadratum h a ad hæc utraq; simul, ad cõtentum sub a h, h e, & tertiam partem quadrati a e. Frustis autem quę à lineis sese æqualiter excedentib. sunt confecta, dempto eo quod à maxima æquatur figura inscripta spacio: frustis uero alijs circulus æquatur. Quare sequitur circulum a f g i maiorem habere proportionem ad figuram inscriptam, quàm quadratum h a ad hæc utraq; simul, ad contentum sub a h, h e, & tertiam partem quadrati a e, hoc est circulus a f g i ad circulum ς. Vnde colligitur, circulum ς figura inscripta esse maiorem. Quod positioni contrariũ est. Neq; igitur circulus ς spacio à linea spirali a b c d e, & recta a h contento minor esse potest. igitur illi æqualem esse necesse est. Eodem autem modo ostendetur spaciũ à linea spirali in quacunq; reuolutione descripta, & à recta contentum, quæ secundum numerum reuolutioni eundem, nominetur ad circulum ab eodem numero denominatum, eã habere proportionem quam utraq; simul ista, cõtentum sub semidiametro circuli à numero reuolutionis dicti, et sub semidiametro circuli dicti à numero qui sit unitate minor numero reuolutionis, et tertia pars quadrati ab ea linea producti, qua semidiametros maioris circuli ex prædictis excedit semidiametrum minoris circuli prædictorum, ad quadratum semidiametri maioris circuli prædictorum.



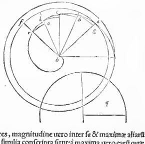
27 SPacium quod continetur à linea spirali, quę sit minor ea quam una reuolutio describit, quæq; non habeat terminum initiũ lineæ spiralis, sed lineas rectas a terminis suis ad lineæ spiralis initium ductas, habet ad frustum quod eam quæ ex centro habeat æqualem maiori earum quæ à terminis ad lineæ spiralis initium ductæ sint: circumferentiam uero eam quæ inter dictas lineas media intercipitur in parte lineæ spiralis, eam proportionem quam hæc utraq; simul, cõtentum sub lineis quæ à terminis ad lineæ spiralis initium ductæ sunt, & tertia pars quadrati eius lineæ qua maior dictarum linearum minorem excedit, ad quadratum maioris earum quæ à terminis ad lineæ spiralis initium iunctæ fuerunt. Esto linea spiralis in qua a b c d e, minor ea quam una reuolutio describeret: eius sint termini a e. Esto autem lineæ spiralis initium pũctum h, et centro h, interuallo autem h a, cir-

circulus deſcribatur, & concurrat eius circumferentia h e in puncto f Oſtendendum eſt, quod ſpacium ab a b c d e linea ſpirali, & ab a h, h e contentum ad fruſtū a h f, eam habet proportionem, quam utraq; ſimul iſta, contentum ſub a h, h e, & tertia pars quadrati e f línee ad quadratum líneæ h a.

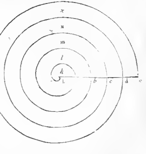


Eſto itaque circulus in quo 4 q. cuius ſemidiametros ſit in potētia æqualis contento ſub a h, h e, & tertiæ parti quadrati e f. Et ſit angulus ad centrum eius æqualís angulo ad h conſtituto. Fruſtum itaque 4 q, ad fruſtum h a f eandem habet proportionem, quam contentum ſub a h, h e, et tertia pars quadrati e f, habet ad quadratum h a. nam iſtorū ſemidiametri hanc proportionem potentia inter ſe habent. Oſtendendum iam eſt, fruſtum 4 q, æquale eſſe ſpacio contento ſub a b c d e linea ſpirali, & ſub a h, h e rectis. nam ſi non, uel maius erit, uel minus. Sit itaque primò maius, ſi eſſe poteſt. Spacio igitur poteſt figura quędam plana circūſcribi ex fruſtis ſimilibus cōpoſita, ita ut ipſa addat ſuper ſpacium minus eo quo 4 q fruſtum excedit ipſum ſpacium dictum. eſto circumſcripta, & ſit fruſtorum ex quibus componitur dicta figura maius quidem h a r, minus uero h o d. Manifeſtū eſt, his poſitis figuram circūſcriptam minorem haberi fruſto 4 q. Iam actæ ſunt lineæ quæ faciunt angulos æquales ad h, uerſus circumferentiam fruſti h a f, in quam incidunt. Erunt iam quædam lineæ rectæ ſeſe æqualiter excedentes, quæ ab h in ſpiralem incurrunt, quarum maxima quidem h a, minima uero h e. erunt item aliæ lineæ rectæ numero quidem una pauciores illis, magnitudine autem inter ſe & maximæ illarum æquales, quæ á pūcto h ad fruſti a h f circumferentiam ipſi occurrunt, dempta h f & ab omnibus confecta ſunt fruſta ſimilia, & ab his quæ ſeſe æqualiter excedunt, & ab his quæ inter ſe & maximæ illarum ſunt æquales. & earum quæ ſeſe æqualiter excedunt, ab h e, nil confectum eſt. Fruſta igitur quæ à lineis inter ſeſe æqualibus & maximæ illarum confecta ſunt, ad fruſta confecta à lineis ſeſe æqualiter excedentibus, dempto quod a minima fruſto, minorem habent proportionem, quàm quadratum h a ad hæc utraq; ſimul, ad contentum ſub h a, h e, & tertiam partem quadrati e f. Fruſtis autem quæ à lineis inter ſe, et maximæ aliarum æqualibus conſtant, æquatur fruſtum h a f. Illis uero quæ à lineis ſeſe æqualiter excedentibus ſunt, circūſcripta figura eſt æqualis. Minorem ergo proportionem habet h a f fruſtum ad figuram circumſcriptam, quàm quadratum h a ad utraq; ſimul, ad contentum ſub h a, h e, & tertiam partem quadrati e f. Quam autem proportionem habet ad dicta quadratum lineæ h a, eam habet fruſtum h a f ad fruſtum 4 q Quare fruſtum 4 q, minus eſſe concluditur figura circumſcripta. Verum poſitum fuerat maius eſſe, & demonſtratum ex poſitione. Non eſt igitur 4 q fruſtum maius ſpacio cōtento ſub a b c d e linea ſpirali, & h a, h e. Neq; unque minus eſſe poteſt. ponatur nāque minus, ſi eſſe poteſt, & reliqua eadem diſponantur. Rurſus ſpacio poteſt figura quædam plana inſcribi, ex ſimilibus fruſtis compoſita, ita ut dictū ſpaciū ſu

pra figurã inscriptã minus addat, eo quo ipsum spacium excedit ç q frustum, inscribatur itaque: & frustorum ex quibus inscripta figura constituitur, esto maius h b c, minus uero o h e. Constat igitur, inscriptam figuram frusto ç q esse maiorem. Rursus erunt quædam lineæ sese æqualiter excedentes à puncto h, ad lineam spiralem accedentes: quarum maxima quidem h a, minima uero h e. Sunt quoque aliæ inter se, & maximæ illarum æquales à puncto h, ad circumferentiam frusti h a f productæ, excepta h a, quæ numero quidẽ illis sunt una pauciores, magnitudine uero inter se & maximæ aliarũ æquales. & ab unaquaque frusta similia conscripta sunt: à maxima uero earũ quæ sese æqualiter excedunt, nullum conscriptum est. Frusta igitur à lineis æqualibus inter se, & maximę aliarum confecta, ad frusta à lineis sese ęqualiter excedentibus contenta, dempto eo quod à maxima, maiorem habent proportionem, quàm quadratum h a, ad contentum sub h a, h e, & tertiam partem quadran e f. Quare & frustum h a f ad figuram inscriptam, maiorem habebit proportionem, quàm ad ç q frustum. Vnde sequitur ç q frustum maius esse figura inscripta. At uero positũ fuerat, minus esse. Non potest igitur frustum ç q minus esse spacio à spirali linea, & rectis h a, h e comprehenso. quare eidem æquale esse necesse est.



28 EOrum quæ continentur à lineis spiralibus, & rectis quæ in reuolutionibus reputãtur spaciorum, id quidem quod tertium datur, est duplum secundi, quartum est eius triplum, quintum est quadruplum: & sic deinceps secundum numeros crescentes, semper sequens spaciũ est multiplex secũdi, primũ autem spacium sexta pars secundi esse demonstratur. Esto linea spiralis proposita, & in prima, & in secunda, & in cæteris deinceps descripta reuolutionibus quotcunque. Esto pũctum h lineæ spiralis initium, & recta h e initium reuolutionis. Primum uero spacium

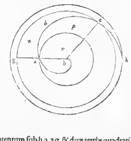


sit k, secundum l, tertium m, quartum n. Ostendendum est itaque spacium k, sextam

tam partem eſſe ſpacij ſe ſequentis, & ſpacium m duplum eſſe ipſius l, ipſum n triplum ipſius l. Et eorum quæ ſequuntur, ſemper id quod deinceps ſumitur multiplex ipſius l ſecundum numeros ſe ſequentes. Quod autem k ſit ſexta pars ipſius l, ſic oſtēditur: quoniam l ſpacium eā habet proportionem ad circulum, ſecūdum quam habent ſeptem ad duodecim. Secundus uero circulus ad primū, ſicut 12 ad 3. conſtat enim. Circulus uero primus ad ſpacium k, ſicut tria ad unum. k igitur ſexta pars eſt ipſius l. Rurſus k l m ſpacium ad circulum tertium, eam oſtenſum eſt habere proportionem, quam utraq; ſimul, cōtentum ſub c h, h b, et tertia pars quadrati c b ad quadratum ipſius c b. Tertius uero circulus habet ſe ad ſecūdum circulum, ſicut quadratū h b. Circulus item ſecundus habet ad k l ſpacium, ſicut quadratū h b ad utraq; ſimul, ad cōtentum ſub h b, h a, & tertiam partem quadrati a b. Hæc autem eam habent inter ſe, quam decem & nouem ad ſeptem. Spaciū uero k l ad ſpacium l, ſicut ſeptem ad ſex. Cōſtat igitur ſpacium m, ipſius l eſſe duplum. Quod autem ea quæ deinde ſequuntur, ſecundum numeros deinde ſequētes habeant proportionē, deinceps oſtendetur. Nam k l m n x, ad circulum cuius ea quæ ex centro eſt h e, eam habet proportionē quam utraq; ſimul, contentū ſub h e, h d, & tertia pars quadrati d e, ad quadratum h e. Circulus uero, cuius quæ ex centro eſt h e, ad circulum cuius quæ ex cētro eſt h d, eam habet proportionē, quā quadratum h e, ad quadratum h d. Circulus autem cuius quæ ex centro eſt h d, ad ſpacium k l m n, eam habet proportionem, quam quadratum h d, ad utraque ſimul iſta, ad id quod continetur ſub h d, h c, & tertiam partem quadrati d c. Spaciū igitur k l m n x, ad ſpacium k l m n, eam habet quam contentum ſub h e, h d, & tertia pars quadrati d e, ad contentum ſub h d, h c, & tertiam partem quadrati c d. Diuidendo, & ſpacium x ad ſpacium k l m n, eam habet quam exceſſus contenti ſub e h, h d, cum tertia parte quadrati e d, ad contentum ſub d h, h c, & tertiam partem quadrati e d, ad contentum ſub d h, h c: & tertiam partem quadrati d c. utraq; uero illa ſimul excedunt iſta ſimul utraq;, eo quo contentum ſub e h, h d, excedit contentum ſub d h, h c. Excedunt autem eo quod ſub d h, e c. Spacium igitur x ad ſpacium k l m n, eam habet quam contentum ſub h d, c e, ad contentū ſub d h, h c, & tertiā partē quadrati c d Per hæc aūt eadem oſtēdetur, quod ſpaciū n ad ſpaciū k l m, eam habet, quā cōtentum ſub b c, b d, ad utraq; ſimul iſta, ad contentū ſub c h, h b, & tertiam partem quadrati c b. Spacium ergo n, ad ſpacium k l m n, eam habet quam contentum ſub h c, b d. itemq; quod ſub b h, h c, & tertia pars quadrati c b, ad contentum ſub h c, b d. Conſtat enim diuidendo, & conuerſim. Hæc autem æquantur cōtento ſub d h, h c, & tertiæ parti quadrati c d. Quoniam igitur ſpacium x, ad ſpacium k l m n, eam habet quam contentum ſub h d, c e ad utraq; ſimul iſta, ad contentum ſub h d, h c, & tertiam partem quadrati c d. Spacium uero k l m n, ad ſpacium n, eam quam utraq; ſimul iſta contentum ſub d h, h c & tertia pars quadrati c d, ad contentum ſub h c, d b. Habet igitur ſpacium x, ad ſpacium n, eam quam contentum ſub h d, c e, ad contentum ſub h c, d b. Contentum autem ſub h d, c e, ad cōtentum ſub h c, d b, eam habet quam h d ad h c, cum c e ſit ipſi b d ęqualis. Conſtat itaq; quod ſpacium x ad ſpacium n, eam habet quā h d ad h c. Similiter oſtendetur, ſpacium n ad ſpacium m, eam habere proportionem quam habet h c ad h b, & m ad l, ſicut b h ad h a. Lineæ uero e b, d h, c b, b b, a h, habent proportionem, quam numeri deinceps continenter ſumpti.

SI in linea ſpirali quacūq; reuolutione deſcripta, duo pūcta ſumanẽ, quæ non ſint eius termini, & ab iſtis ducanẽ lineæ rectæ ad initiū lineæ ſpiralis, & cētro ſpiræ initio, interuallis uero ipſis lineis quæ ad initiū ſpiræ à pūctis ductæ ſint, circuli deſcribantur: ſpacium compræhenſum, ab ea maioris circuli circumferentia quæ media inter lineas rectas, & ſpiram inter eaſdem lineas compræhenſam, & à linea extrà ducta capitur, eā habet proportionē ad ſpaciū compræhēſum à circū 29

ferentia minoris circuli, & ab eadem spira & à linea recta, quæ earũ terminos iungit, quãq; ex centro circuli maioris cum tertijs duab. excessus eius quo ea quæ ex centro maioris circuli excedit eam quæ ex centro minoris ad eam quæ ex centro maioris, cum una eiusdem excessus tertia parte. Esto linea spiralis, in qua a b c d in una reuolutione descripta. & sumantur in ea duo puncta a c. Esto punctũ h initium spiræ. & ab a & c ducãtur ad h lineę. & cẽtro h, interuallis h a, b c, circuli describantur.



Ostendendum quod spacium x ad spacium p, eam habet proportionem, quam utraq; simul a h, et duæ tertiæ g a, ad utramq; simul, ad a h, & unam tertiã ipsius g a. nam spaciũ n p, ad frustũ g c h, ostẽsum est eam habere proportionem, quam habet contentum sub g h, h a, & tertia pars quadrati a g, ad quadratum h g. ipsum ergo x, ad n p eam habet, quam contentum sub h a, a g, & duæ tertiæ quadrati a g ad utraq; simul, ad contentum sub a h, h g, & tertiam partem quadrati g a. Et quoniam spacium n p, ad frustum n p x, eam habet quam utraq; simul, contentũ sub h a, b g, & tertia pars quadrati g a, ad quadratum h g. Frustum aũt n p x, ad frustum n, eam habet quã quadratũ h g ad quadratũ h a. Spacium quoq; n p, ad ipsum n, eam habebit quam utraq; simul, contentum sub h a, h g, & tertia pars quadrati g a, ad quadratum h a. Igitur n p ad p, eam habet quam utraq; simul, contentum sub g h, h a, & tertia pars quadrati g a, ad utraq; simul, ad contentum sub g a, h a, & tertiam partem quadrati g a. Quoniam spacium x ad n p eam habet, quam utraque simul, contentum sub h a, a g, & duæ tertiæ quadran g a, ad utraque simul, ad contentum sub g h, h a, & tertiam partem quadrati g a. Spacium autem n p ad p, eam babet quam utraq; simul, contentum sub g h, h a, & tertia pars quadrati g a, ad utraq; simul, ad contentum sub g a, a h, & tertiam partem quadrati g a. Habebit quoq; x ad p, eam quam habent utraque simul, cõtentum sub h a, g a, & duæ tertiæ quadrati g a, ad utraq; simul, ad contentum sub h a, g a, & tertiã partem quadrati g a. Ista uero utraq; simul, contentum sub h a, g a, & duæ tertiæ quadrati g a, ad utraq; simul, ad contentum sub h a, g a, & tertiam partem quadrati g a, eam habent quam utraque simul, ipsa h a, & duæ tertiæ ipsius g a, ad utraq; simul, ad ipsam h a, & tertiam partem ipsius g a. Constat igitur, spacium x ad spacium n, eam habere proportionẽ, quam utraq; simul, ipsa h a, & duæ tertiæ ipsius g a, ad ipsam h a, & tertiam ipsius g a, utraq; simul sumpta.

FINIT ARCHIMEDIS TRACTATVS
de Lineis spiralibus.

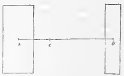
ARCHIMEDIS PLANORVM AEQVEPONDERANTIVM INVENTA, VEL CENtra grauitatis planorum.

PETIMVS grauia æqualia, æquali distantia posita, inter se æqualiter ponderare. Grauia item æqualia, distantia inæquali suspensa, non æqualiter ponderare: sed id quod in longiori distantia pendet, ad graue deferri. Item, si grauibus secundum quandam distantiam æqueponderantibus, alteri eorum adijciatur aliquod graue, tunc ea non æqualiter ponderare, sed illud ad graue deferri, cui quod graue fuerit adiectum. Similiter etiam si ab altero eorum auferatur graue, tunc non æqualiter ponderare, sed id à quo nil sit ablatum, ad graue deferri. Figuris planis similibus & æqualibus inter se coaptatis, centra quoque grauitatis earum erunt inter se coaptata. Si uero figuræ similes fuerint, non autem æquales, centra grauitatis earum erunt similiter posita. Dicimus puncta similiter posita esse ad similes figuras, à quibus lineæ rectæ, secundum angulos æquales ductæ, ad latera inuicem correspondentia æquales angulos efficiant. Item si magnitudines quædam in quibusdam distantijs positæ æqualiter ponderent, & quæcunque eis æquales in eisdem distantijs positæ æqualiter ponderabunt. Cuiuscunque figuræ cuius circum limbus fuerit, in eandem partem connexus, centrum grauitatis intra figuram esse oportet. Suppositis his, sequitur:

GRauia, quæ in distantijs æqualibus posita æqualiter ponderent, æqualia esse. Si enim essent inæqualia, auferreturque à maiori excessus, reliqua non æqualiter ponderarent: cum ab altero æqueponderantium aliquid fuerit ablatum. Quare grauia in distantijs æqualibus æqueponderantia, æqualia esse necesse est. 1

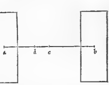
GRauia in distantijs æqualib. posita, si fuerint inæqualia, non æqueponderabunt, sed maius eorum inclinabitur. Ablato enim excessu, æqueponderabunt: cum æqualia in distantijs posita æqualibus æqueponderent. Eo autem quod ablatum fuerit adiecto, iam in maius inclinabitur, cum alteri æqueponderantium sit aliquid adiectum. 2

SI grauia inæqualia in distantijs inæqualibus suspensa, æqualiter ponderent: maius in minori, minus in maiori distantia suspendetur. Esto grauia inæqualia a b, & sit a maius, b minus: & æqueponderent ab a c, c b distantijs. Ostendendum est, quod a c minor est c b. nam si non, ablato excessu quo a excedit b, cum iam ab altero æqueponderantium sit ablatum aliquid, inclinabitur ad b: quod non uerum est. nam a c si esset æqualis b c, æqueponderarent. nam æqualia in distantijs æqualibus. Si autem a c maior esset b c, inclinaretur ad a. nam æqualia in distantijs inæqualib. non æqueponderant. Sed quod in maiori distantia est, inclinatur. ac iam propter hæc a c minorem esse b c necesse est. Manifestum autem, quod grauia quæ in di- 3



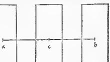
ſtantijs inæqualibus æquepondetẽt, inæqualia ſunt. & eorũ maius eſt illud quod in minori diſtantia pendet.

4 SI duæ magnitudines æquales non idem centrum grauitatis habuerint, magnitudinis ex utraque compoſitæ cẽtrum grauitatis eſt medium lineæ rectæ, quæ dictarum magnitudinum centra grauitatis coniungit. Eſto itaq; ipſius a centrũ grauitatis ipſum a, et ipſius b ipſum b. Et ſit ducta linea a b, quæ diuidatur in duo æqualia in puncto c. Dico quod utrarumq; compoſitarum cẽtrum grauitatis eſt ipſum c. nam ſi non, eſto utrarumq; a b magnitudinum compoſitarum centrum grauitatis d, ſi eſſe poteſt. Quod autem eſt in linea a b, præ demonſtratum eſt. Quoniam igitur d eſt centrum grauitatis magnitudinis, compoſitæ ex a & b, apprehenſo d pũcto æqueponderabũt magnitudines

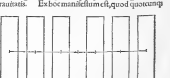


Igitur a b æqueponderabunt in a d, d b diſtantijs, quod eſſe non poteſt. nã æqualia in diſtantijs inæqualibus non æqueponderant. quare manifeſtum eſt, ipſum c centrum grauitatis eſſe magnitudinis ex ipſo a & ipſo b compoſitæ.

5 SI autem trium magnitudinum centra grauitatis in una linea fuerint poſita, & magnitudines æqualem inter ſe grauitatem habuerint, & lineæ rectæ inter cẽtra ductæ æquales extiterint: magnitudinis ex dictis magnitudinibus compoſitæ centrum grauitatis punctum illud erit, quod idem eſt mediæ magnitudinis centrum grauitatis. Eſto tres magnitudines a b c, centra uero grauitatis earum ſint a b c, pũcta in una recta linea poſita. Sint quoq; a b c ęquales: & lineæ a c, c b rectæ æquales. Dico centrum grauitatis magnitudinis illius, quæ ex omnibus illis magnitudinib. compoſita fuerit, eſt punctum c. Quoniam itaq; a b, magnitudines æqualẽ habent grauitatem, centrum grauitatis earum erit punctum c. Quoniam a c, c b, rectæ æquales ſunt: eſt etiam

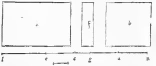


ipſius c centrum grauitatis c punctum. Conſtat quod magnitudinis quoq; ex omnibus illis compoſitæ centrum erit grauitatis punctum, quod eſt magnitudinis mediæ inter illas centrum grauitatis. Ex hoc manifeſtum eſt, quod quotcunq; magnitudinum numero imparium, ſi centra grauitatis, in eadem linea ſint conſtituta, & ſi magnitudines ceteræ ab ea quæ earum media exiſtit, hincinde æqualiter queque duæ correſpondentes deſtiterint, habuerintq; grauitatem inter ſe æqualem, & lineæ rectæ inter earum cẽtra mediæ fuerint inter ſe æquales, eius magnitudinis quę ex illis omnibus compoſita



posita fuerit, centrum grauitatis erit punctum, quod magnitudinis mediæ centrũ grauitatis existit. Quod si pares numero fuerint magnitudines, & centra earum grauitatis in eadem linea recta posita fuerint, & earum mediæ grauitate æquali inter se constiterint, & lineæ rectæ inter earum centra mediæ inter se æquales fuerint, eius quæ ex illis omnibus componetur magnitudinis centrum grauitatis erit medium lineæ rectæ punctum, eius uidelicet quæ centra grauitatis magnitudinum coniungit, uti in figura subscripta patet.

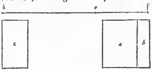
6 MAgnitudines quæ fuerint in grauitate commensurabiles, æqueponderabunt, si in distantijs quæ secundum grauitatum proportionem fuerint cõstitutæ, permutatim suspendantur. Esto magnitudines in grauitate commensurabiles a b. Esto e d item quædam distantia, & sicut a ad b, ita d c ad c e. Ostendendum itaq;, quod magnitudinis ex utrisq; a & b compositę centrum grauitatis est c punctum. Quoniam itaq; est sicut a ad b, ita d c ad c e. ipsum uero a est ipsi b commẽsurabile. ipsa ergo d c est ipsi c e commensurabilis, recta scilicet rectæ quare e c, c d erit quædam communis mensura quæ sit n, & ponatur ipsi e c æqualis utraq; istarum d g, d k. Ipsi aũt d c esto e l æqualis. Et quoniã d g æquatur c e, & d c æquatur e g. quare & l e æquatur ipsi e g. Igit̃ l g dupla est ipsius d c, & ipsa g k ipsius c e. Quare n utrãq; l g, g k mensurabit, cum earum medietates metiatur. Et quoniam est sicut a ad b, ita d c ad c e. Sicut autem d c ad c e, sic l g ad g k. nam utraq; utriusque dupla existit. Igitur sicut a ad b, sic l g ad g k. Quotuplex autem est l g ipsius n, eo sit numero multiplex ipsa a ipsius f. Erit ergo sicut l g ad n, sic a ad f. Est autem sicut k g ad l g, ita b ad a. ab æqua igitur est, sicut k g ad n, sic b ad f. æque multiplex est igitur k g ipsius n, sicut b ipsius f. Ostensum uero est, & ipsum a quoq; ipsius f multiplex esse. quare ipsũ f, erit ipsorum a & b communis mensura. Diuisa igitur l g in partes æquales ipsi ñ. & a in partes æquales ipsi f: partes ipsius l g, quæ ipsi n in magnitudine æquantur, tot erunt numero, quot sunt partes ipsius a, ipsi f in magnitudine æquales. Quare si unicuiq; partium l g apponatur, magnitudo æqualis ipsi f cẽtrum grauitatis habens in medio portionis, & omnis magnitudines æquantur ipsi a, & magnitudinis ex omnibus compositæ centrum grauitatis erit ipsum e. nam omnes numero pares sunt propterea, quod ipsa l e æquatur ipsi e g. Similiter autem ostendetur, & si unicuiq; portionum k g apponatur magnitudo æqualis ipsi f, centrum grauitatis habens in medio portionis, & omnis magnitudines æquales erunt ipsi b, & magnitudinis ex omnibus illis compositę centrum grauitatis erit ipsum d. Est igitur a quidem impositum ad ipsum e, & ipsum b ad ipsum d. Sunt itaque iam magnitudines inter se æquales in lineam rectam positę, quarum centra grauitatis æqualiter inter se distant compositę, & numero pares. Constat igitur, quod compositę ex omnibus magnitudinibus centrum grauitatis est diuisio in duo ęqua lineę rectæ, in qua centra magnitudinum mediarum sunt posita. Cũ igitur l e sit æqualis c d, & ipsa e c ipsi d k: tota igitur l c æquatur ipsi c k. Quare magnitudinis ex omnibus compositæ centrũ grauitatis est c punctum. Posito igitur ipso a ad ipsum e, & ipso b ad ipsum d, ęqueponderabũt secundum c punctum.



7 SI magnitudines incommensurabiles fuerint, similiter ęqueponderabunt, si in distantijs suspendantur, quę proportionem inter se magnitudinum mutuam

ha-

habuerint. Sunto a b c magnitudines incommensurabiles, distantię uero d e, e f. Habeat autem a b ad ipsum c eam proportionem, quam distantia e d ad e f. Dico quod magnitudinis compositæ ex a b c, centrum grauitatis est punctum e. nam si non, ęqueponderabit a b positum ad f, ipsi c posito ad ipsum d, uel maius est a b ipso c, ita ut ęqueponderet ipsi c, uel non. Esto maius, & auferatur ab ipso a b, minus excessu quo a b excedit c, ita ut æqueponderent: & residuum sit commensurabile ipsi c, quod sit a. Quoniam igitur magnitudines a c sunt commensurabiles, & minorem habet proportionem a ad c quàm d e ad e f, non ęqueponderabunt a & c in distantijs d e, e f, posito ipso a in f, & c in ipso d. Per hęc eadem neque sic maius existit, quàm ut ęqueponderet ipsi a.

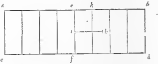


8 SI ab aliqua magnitudine magnitudo aliqua auferatur, quæ non habeat idem centrum cum tota, residuæ magnitudinis centrum grauitatis existit in linea recta, quæ centra grauitatis totius magnitudinis & ablatæ coniungat, & in ea illius parte in qua linea ipsa à centro totius magnitudinis educitur extra, atque in eo puncto quo ipsa sic terminatur, ut ipsa iam educta ad eam quæ iungit centra prędicta eam habeat proportionem, quam magnitudinis ablatæ grauitas ad grauitatem residuæ. Esto magnitudinis alicuius centrum grauitatis c, ipsa uero sit a b. & auferatur ab ipsa a b magnitudo a d, cuius centrum grauitatis sit e. ducta uero e c, & extra ducta intercipiatur c f, quæ eam proportionē habeat ad e c, quam habet grauitas magnitudinis a d ad grauitatem magnitudinis d g. Ostēdendum quod magnitudinis d g centrum grauitatis est f punctum. Nam si non, esto si fieri potest, h punctum. Quoniam igitur a d magnitudinis centrum grauitatis est e, ipsius uero d g est punctum h, magnitudinis ex utraque compositæ centrum grauitatis erit in linea e h, ita diuisa ut partes mutuam inter se magnitudinum proportionē habeant. Quare non erit c punctum secundum proportionalem sectionem, ei quæ dicta est. quare c non est centrum grauitatis eius magnitudinis, quæ ex a d, d g cōposita est: hoc est ipsius a b. positum uero fuerat, ipsum c esse dictum centrum. nō erit igitur h punctum centrum grauitatis d g magnitudinis.

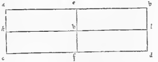


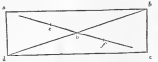
9 CVIuslibet figuræ æquedistantiū laterum cētrum grauitatis est in linea recta, quæ coniungit latera opposita ipsius figuræ æquedistantium laterum, diuisæ in duo æqua, quæ latera in diuisione figuræ secta fuerint. Esto figura æquedistantium laterum a b c d, in diuisione uero in duo æqua ipsius a b c d, esto e f. Dico a b c d centrum grauitatis esse in linea e f. nam si non, esto si esse potest punctum h, & ducatur h i æquedistans ipsi a b. Linea uero e b continuæ in duo æqua diuisa erit, tandem quædam intercepta minor h i. Et diuidatur utraque e b, e a in lineas æquales e k, & à punctis diuisionum æquedistantes ipsi e f. Diuidetur itaque tota figura in figuras æquedistantium laterum æquales, & similes ipsi k f. Figuris itaque æquedistantium laterum similibus, & æqualibus ipsi k f, inuicem coaptatis,

tis, & centra quoque grauitatis earum erunt inuicem coaptata. Erunt iam magnitudines quædam æquedistantiū laterū æquales ipsi k f, numero pares, & centrū grauitatis earū in eadem linea posita, & media æqualia, & omnia quæ utrinque ipsis medijs assistunt, & ipsa æqualia sunt. & lineæ inter centra mediæ sunt equales. Magnitudinis ergo ex omnibus compositæ centrū grauitatis est in linea recta, quæ iungit centra grauitatis spaciorum eorū quæ in medio sunt. nō est autem, nam h est extra figuras medias. Constat ergo, centrum grauitatis figuræ a b c d æquedistantium laterum esse, in e f linea recta.



CVIuslibet figuræ equedistantium laterum centrum grauitatis est punctum, in quo diametri coincidunt. Esto figura æquedistantium laterum a b c d, & in ipsa sit linea e f, diuidens in duo æqua a b c d lineas. & item k, l diuidens a c, b d. Est iam figuræ a b c d æquedistantium laterum centrum grauitatis in linea e f. Ostensum namque est hoc, et eadem ratione est in linea k l. Igitur punctum h est centrum grauitatis. in puncto autem h diametri figuræ æquedistantium laterum cōcurrent, ut prius demonstratum fuit. Contingit autem & aliter hocidem demonstrare. Esto figura æquedistantium laterum a b c d. eius diametros d b. trianguli ergo a b d, b d c erūt inter se similes & æquales. quare ipsis coaptatis, & eorum centra grauitatis inter se coincident. Esto iam trianguli a b d, centrum grauitatis e punctum, & † ducatur e h, & protrahatur donec assumatur h f æqualis e h. Coaptato itaque a b d triāgulo ad triangulum b d c, & latere a b ad latus d c. accommodato uero latere a d ad latus b c, coaptabitur quoque e h linea recta ad h f rectam, & e punctum in f cadet, sed et in centrum grauitatis trianguli b d c. Quoniam igitur trianguli a b d centrum grauitatis est e punctum, trianguli uero b d c est f, manifestum est, quod magnitudinis ex utrisque compositæ centrum grauitatis est punctum medium lineæ e f rectæ, quod quidem est h punctum. 10



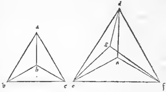


† Intellige diametrum b d diuisam esse per medium in h puncto.

SI duo trianguli fuerint inter se similes, & duo in ipsis puncta similiter ad triangulos se habentia in positione, & punctū unum eius in quo est, triāguli sit centrum grauitatis: reliquum quoque punctum eius in quo est, trianguli centrum grauitatis existet. Puncta uero dicimus similiter se habere in positione ad similes figuras, à quib. lineæ rectæ ab angulis equalibus eductæ, ad latera inter se correspondentia angulos æquales efficiant. Esto duo trianguli a b c, d e f, & esto sicut a c ad 11

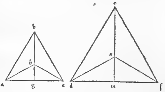
 d f,

d f, sic a b ad d e, & b c ad e f, & sint in dictis triangulis puncta similiter posita, quæ sint h, n, similitet se in positione habentia ad triangulos a b c, d e f. & sit b centrum grauitatis a b c trianguli. Dico quod n est centrum grauitatis d e f trianguli. nam si non, esto si esse potest g punctum grauitatis trianguli d e f, & iūgantur b a, h b, b c. item n d, n e, n f. Quoniam igitur triangulus a b c est similis triangulo d e f, & centra grauitatis sunt h g puncta: similium uero figurarum centra grauitatis similiter



posita sunt, ita ut æquales angulos efficiant ad latera eiusdem rationis unūquodque ad unumquodque. Angulus igitur g d e, erit æqualis angulo b a b. Sed angulus h a b est æqualis angulo e d n: quia puncta h n, similiter posita sunt. Angulus igitur e d g erit æqualis angulo e d n, maior scilicet minori: quod esse non potest. Non est igitur g punctus centrum grauitatis trianguli d e f. quare punctum n erit centrum dictum.

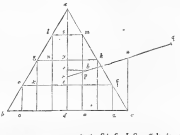
12 SI duo trianguli fuerint similes, & centrum grauitatis alterius eorum fuerit in linea recta, quæ ab uno angulo eius ad mediam basem ducatur: alterius quoque trianguli erit centrum grauitatis in linea similiter in eo ducta. Sunto trianguli duo a b c, d e f & esto sicut a c ad d f, ita a b ad d e, & b c ad f e. et a c diuisa in duo ęqua in puncto g, iungatur b g. Et esto centrum grauitatis triãguli a b c, in linea b g, quod sit h. Dico quod centrum grauitatis d e f trianguli erit in linea recta, similiter in eo ducta. Diuidatur d f in duo æqua in puncto m. & iungatur e m, &



fiat sicut b g ad b h, sic m e ad e n: & iunganť a h, h c, d n, n f. Cum igitur ipsius c a dimidia est a g, & ipsius d f dimidia est d m: est sicut b a ad e d, ita a g ad d m. & latera circa æquales angulos existentia, sunt proportionalia. Angulus igitur a g b est æqualis angulo d m e. & est sicut a g ad d m, sic b g ad e m. Est autē & sicut b g ad b h, sic m e ad e n: & per æquam ergo, sicut a b ad d e, sic b b ad e n. Et circa angulos æquales latera proportionalia consistunt. Erit igitur angulus b a h, æqualis angulo e d n. Quare angulus h a c reliquus erit ęqualis angulo e f n. et angulus h c g, æqualis angulo n f m. Ostensum est autem, quod angulus a b h est æqualis angulo d e m. quare & angulus h b c reliquus, erit æqualis angulo n e f. Et omnino eadem ratione puncta h n, ad latera proportionalia similiter posita sunt, & angulos æquales faciunt. Cum igitur h n puncta similiter posita sint, & h est centrum grauitatis trianguli a b c, erit n quoque centrum grauitatis trianguli d e f.

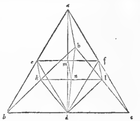
Cuius-

CVIuscunq; trianguli centrum grauitatis existit in linea recta, quæ ab angu- 13
lo ad dimidiam basem ducta fuerit. Esto triangulus a b c, & in ipso a d du-
cta ad dimidiam basem. Est itaq; ostendendum, quod in linea a d centrum graui-
tatis triãguli a b c existit. Nam si non, esto si esse potest pũctũ h, & per ipsum ducatur h i, æquedistans ipsi b c. Continuè igitur diuisa d c in duo æqua, tandem relinquetur linea minor h i. Diuidatur utraq; b d, d c in duo ęqua: et à pũctis sectionum ducantur æquedistantes ipsi a d, et iũgantur e f, g k, l m. Erũt iam ipsæ æquedistãtes ipsi b c. Iam figu-

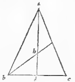


ræ æquedistantium laterum m n, centrum grauitatis est in s y. Ipsius aũt k x in y t, & ipsius f o, in t d. Magnitudinis ergo ex omnibus compositæ centrum grauitatis est in linea s d recta, quod sit r. Et iungatur h r, & educatur & protrahatur, & ducatur c u æquedistans ipsi a d. triangulus autem a d c, ad omnis triangulos a m, m k, k f, f c, lineis descriptos similes ipsi a d c, eam habet proportionẽ, quam habet c a ad a m. Quia a m, m k, k f, f c æquales sunt. Quoniam autem & triãgulus a d b, ad omnis triangulos à lineis a l, l g, g e, e b descriptos, similes sibi, eã habet proportionem, quã b a ad a l. Triangulus igitur a b c, ad omnis dictos triangulos, eam habet, quã c a ad a m. Sed c a ad a m maiorem proportionem habet, quàm u r ad r h. nam proportio c a ad a m eadem est ei quam habet tota u r ad r p. quia trianguli similes existunt. & triangulus quoq; a b c, ad dictos triangulos maiorem habet proportionem, quàm u r ad r h. Fiat igitur, ut sicut figuræ æquedistantium laterum se habent ad triangulos, sic q h ad h r. Quoniam igitur aliqua magnitudo existit a b c, cuius centrum grauitatis est h: & aufertur ab ea magnitudo cõposita ex m n, k x, f o figuris æquedistantium laterum: & ablatæ magnitudinis centrum grauitatis est r punctum. reliquæ igitur magnitudinis, quæ ex triangulis circumrelictis cõponitur, cẽtrum grauitatis in linea r h habetur, quæ educta & protracta est ad h r: eamq; habet proportionem ad illam, quam magnitudo ablata ad reliquam. Punctum ergo q centrum est grauitatis magnitudinis compositæ ex omnibus circum relictis, quod esse non potest. nam linea recta à puncto q æquedistãter ipsi a d ducta in plano, in eadem ipsius parte: hoc est in altera ipsius parte, centra omnia habentur. Manifestum est igitur propositum. Aliter idem. Esto triangulus a b c, & ducatur a d linea ad dimidiam basem. Dico itaq;, quod in linea a d centrũ grauitatis trianguli a b c habetur. Nam si non, esto h, si esse potest: & iungantur h a, h b, h c, & e d, d f, f e, ad medias b a, a c. Ducantur ipsi a h æquedistantes e k, f l: & iungantur k l, l d, d k. item m n æquedistans ipsi a h. Quoniam itaq; triangulus a b c similis est triangulo d f c, cum b a sit æquedistans ipsi f d, & trianguli a b c cẽtrum grauitatis est punctum: & f d c trianguli quoq; centrum grauitatis est punctum l. nam h l puncta sunt similiter posita in utroq; triangulo, cum ad latera eiusdem rationis æquos angulos efficiant. constat enim istud. Eadem autem ratione

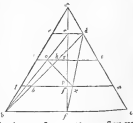
& trianguli e b d centrum grauitatis est k punctum. quare magnitudinis ex ambabus b e d, d f c triãgulis compositæ centrum grauitatis habetur in medio lineæ k l. cum triãguli e b d, f d c, sint æquales. Et ipsius k l, medium est n: cum sit sicut b e ad e a, ita b k ad h k. Sicut autem c f ad f a, sic c l ad l h. Si autẽ hoc sic se habet, erit b c ipsi k l æquedistans. Et iuncta est d h. erit igitur sicut b d ad d c, sic k n ad n l. Quare magnitudinis ex utrisq; dictis triangulis compositæ centrum grauitatis est n. est quoq; figuræ æquedistantium laterum a e d f, centrum grauitatis pũctum m. Quare magnitudinis ex omnibus compositæ centrum grauitatis habetur in lineam m n. Est autem trianguli a b c centrum grauitatis h punctum. Igitur m n protracta per punctum h transibit, quod esse non potest. Centrum igitur grauitatis trianguli a b c, non extra lineam a d usquam habetur. in ea igitur necesse est ipsum haberi. Quare constat propositum.



14 CVIuscunque trianguli cẽtrum grauitatis est punctum, in quo lineæ rectæ ab angulis ad dimidias bases ductę concurrũt. Esto triangulus a b c, & ducatur a d linea ad mediam b c, & linea b e ad mediã a c. Si iam centrum grauitatis trianguli a b c habetur in utraq; a d b e, sicut demonstratum fuit, erit utique punctum h centrum grauitatis trianguli a b c.



15 CVIuscunq; mensalis figuræ, quæ duo latera habeat æquedistantia inter se, centrum grauitatis habetur in linea recta, quæ iungit laterum æquedistantium sectorum in duo æqua puncta diuisionis, atq; in eo ipsius dictæ lineæ loco, ubi ipsa sic diuisa sit, ut pars eius terminata ad minus laterum ęquedistantium in duo æqua sectorum ad reliquam partem eam habeat proportionẽ, quam habet utraque simul, duplũ maioris æquedistantium cum minore, ad duplum minoris cum maiore. Esto mensalis figura a b c d, quæ habeat a d, b c æquedistantes. & e f iungat puncta diuisionis ipsarũ a d, b c, quæ in duo æqua diuisæ sunt. Quod itaq; in linea e f, sit centrum grauitatis mensæ, manifestum est. nam si protrahantur c d g, f e g, b a g, constat eas in idem punctum concurrere:

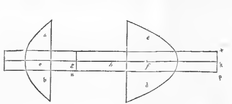


currere: eritq; trianguli b g c centrũ grauitatis in ipsa g f, & similiter trianguli a g d cẽtrum grauitatis in ipsa e g. & reliquæ igitur mensæ a b c d, erit in ipsa e f. Ducta uero b d diuidatur in tria æqualia in punctis k h: & per ea puncta ducãtur æque distantes ipsi b c lineæ l h m, n k t. & iungantur d f, b e, o x. Erit igitur centrum grauitans triãguli d b c, in linea h m, cum h b sit tertia pars b d, & per h ducta est h m æquedistans ipsi basi. Est autem centrũ grauitatis trianguli d b c, in linea d f. Quare x erit centrum grauitatis dicti trianguli. Eadem autem ratione erit o punctum centrum grauitatis trianguli a b d. Magnitudinis ergo ex utrisq; triangulis a b d, b d c compositæ, centrum grauitatis erit in linea recta o x. Quæ quidem magnitudo mensalis cum sit, erit eius centrũ grauitatis in linea e f. Quare mensalis a b c d, centrũ grauitatis erit punctũ p. Habet autem triangulus b d c ad triãgulum a b d eam proportionẽ, quam o p ad p x. Sed sicut triangulus b d c ad triangulũ a b d, sic b c ad ipsam a d. Est autẽ sicut o p ad p x, ita R p ad p s. Igitur sicut b c ad ipsam a d, sic R p ad ipsam p s. Quare sicut duæ b c, cum a d ad duas a d, cum b c: sic duæ R p cum p s, ad duas p s cum R p. Verum duæ R p cum p s, est utraq; simul e R, R p, hoc est p e: duæ uero p s cum p R utraque simul, est p s f, hoc est p f. Ostensa ergo sunt ea quæ proposita fuerant.

FINIT PRIMVS ARCHIMEDIS LIBER de Aequeponderantibus.

ARCHIMEDIS DE HIS QVAE AEQVEPONDERANT LIber *secundus.*

SI DVO spacia compræhensa à linea recta & sectione coni rectãguli, quæ ad lineam rectam datam possimus applicare, non habeãt idem centrum, centrũ grauitatis eorum erit in linea quę iungit cẽtra grauitatis eorũ: eritq; punctũ illud quod dictam lineam rectam sic diuidet, ut partes eius inter se mutuam habeant proportionem spaciorum. Esto duo spacia a b, c d, qualia dictum est. Cẽtra autem grauitatis eorum sint puncta e, f. & quam proportionem habet a b ad c d, eam habeat f h ad h e, O- 1

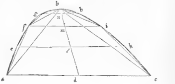


stendendum est, quod magnitudinis ex utrisque a b, c d spacijs compositæ, centrũ

uitatis est punctum h. Sit autem ipsi e h hatum utraque æqualis f g, f k. ipsi autem f h, hoc est g e, sit e l æqualis. erit igitur & l h ipsi k h æqualis. Et est sicut l g ad g k, sic a b ad c d. nam utraque utriusque dupla est. Protendatur autem in parte pũcti a linea æquedistans ipsi l g, ita ut fiat spacium m n ipsi lineæ l g utrinque adiectũ, æquale ipsi a b. erit iam ipsius m n centrum grauitatis punctum e. Compleatur itaque n x. Habebit igitur m n ad n x eam proportionem, quam l g ad g k. habet autem & a b ad c d eam, quam l g ad g k. Igitur sicut a b ad c d, sic m n ad n x. & permutatim. At uero a b æquatur ipsi m n, ergo c d æquatur ipsi n x. Et centrum grauitatis eius est f punctum. Et quoniam l h est æqualis ipsi h k, & tota l k latera opposita diuidit in duo æqua tonus p m, centrum grauitatis erit punctum h. Sed m p est æquale utrique simul m n, n x. Quare & compositi ex utrisque a b, c d centrũ grauitatis erit h punctum.

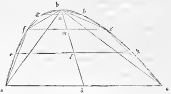
Si intra portionem à recta & coni rectanguli sectione compræhensam triangulus inscribatur, qui basem habeat cum portione eãdem, & altitudinem ipsi æqualem, & item in residuis portionibus trianguli inscribantur easdem cum portionibus bases & altitudines æquales habentes, atque item & hoc idem in residuis portionibus fiat: & huiusmodi triangulorum inscriptio continuetur figura, quæ hoc modo in sectione describitur, perspectè inscribi dicatur. Manifestum est autem, quod figuræ hoc modo inscriptæ lineæ quæ iungent angulos eos qui uertici portionis proximi existunt & eos qui deinceps sequentur æquedistabunt basi ipsius portionis, & in duo æqua diuidentur à diametro portionis, & diametrum ipsæ diuident in proportiones à numeris ab unitate continenter imparibus dictas, ea parte quæ ipsi uertici coniuncta erit pro uno computata. hoc autem in ordinibus est ostendendum.

2 SI autem in portione quæ à recta & rectanguli coni sectione compræhẽditur, rectilinea figura inscribatur perspectè centrum grauitatis figuræ inscriptæ erit in diametro portionis. Esto a b c portio qualis dicitur, & inscribatur ei perspectè figura rectilinea a e f g b h i k c. Ostendẽdum est, centrum grauitatis rectilineæ figuræ esse in b d. Quoniã enim mẽsulæ a e k c centrũ grauitatis est in l d, mensulæ uero e f i k centrum est in linea m l ipsius uero f g h i mensulæ centrum est in linea m n. Ad hæc quoque trianguli g b h centrum grauitatis est in b n. Constat quod totius figuræ rectilineæ centrũ grauitatis est in linea b d. quare constat propositum.

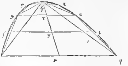


3 SI in utraque duarum portionum similium à coni rectanguli sectione, & linea recta compræhensarum rectilineæ figuræ inscribantur, perspectè quæ latera numero inter se æqualia habuerint, rectilinearum figurarum centra grauitatis secabunt similiter diametros portionum. Sint duæ portiones a b c, x o p, & eis inscribantur figuræ rectilineæ notæ secundũ omnia latera quæ sint in utraque numero æquali. Sint diametri portionum b d, o r. & iungantur e k, f i, g h. & s t, y u, q z. Quoniam igitur & b d diuiditur à lineis æquedistãtibus in proportiones à numeris imparibus, continenter ab uno dispositis nominatas: & p o similiter, & diuisiones earum sunt numero æquales inter se: constat quod partes diametrorum eisdem

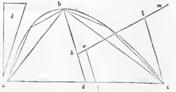
dem proportionibus babebuntur, & lineæ æquedistantes easdem proportiones seruabunt, & mensularum ipsius quidem a e k c, & ipsius x s t p, centra grauitatis erunt in d l, 9 r lineis rectis similiter posita, cum eandē habeāt proportionem a c, e k, quam p x ad s t.



Rursus autem & mensularum e f i k, f y u t, centra grauitatis diuident similiter lineas l m, 9 T. Sūt autem & triangulorum g b h, q o z centra grauitatis in lineis b n, o 9 similiter posita. Habent autem eandem proportionem mensulæ & trianguli. Cōstat igitur, quod totius figuræ rectilineæ in portione a b c inscriptæ, centrum grauitatis similiter diuidit b d diametrum, sicut figurę in x o p portione inscriptæ centrum grauitatis in o r. quod demonstrari oportuit.



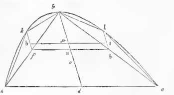
CVIuscunque portionis à linea recta & sectione rectanguli coni comprǽhensæ, centrum grauitatis in diametro portionis existit. Esto portio, ut dicitur, a b c: eius diametros, b d. Ostendendum est, dictæ portionis cētrum grauitatis esse in b d. Nam si non, esto ipsum e, & per ipsum ducatur e f, ipsi b d æquedistans, & inscribatur portioni triangulus a b c eandem basim babens, & altitudinem cū portione eandem. & quam babet c f ad d f, hanc babeat triangulus a b c, ad spacium k. Inscribatur iā in portione rectilinea figura perspectè, ita ut quæ relinquētur portiōes, sint minores ipso k. figuræ inscriptæ centrum grauitatis est in b d. Sit h, & iungatur h e, et producatur, & ducatur c l æquedistans ipsi b d. Constat autem, quod maiorē proportionem habet inscripta portioni figura ad eas quæ relictæ sunt portiones, quàm a b c triangulus ad spacium k, qui eam babet quam c f ad d f. Figura igitur inscripta, ad portiones relictas maiorem habet proportionem, quàm c f ad f d, hoc est c l ad e h. Habeat itaque m e ad e h, eā proportionem, quam rectilinea figura ad portiones. Quoniam igitur e est centrū



totius

totius portionis: figuræ uero inſcriptæ portioni centrum eſt h: conſtat quod magnitudinis compoſitæ ex reliquis portionibus, centrum grauitatis eſt in parte h e producta, quæ eam ad h e proportionẽ habet, quam figura inſcripta ad reliquas portiones. Quare erit magnitudinis ex reliquis portionibus compoſitæ centrum grauitatis punctum m: quod eſt inconueniens. nam ei quæ per m punctum ducitur lineæ æquediſtanter ipſi b d, in eandem partem erunt omnis reliquæ portiones. Manifeſtum eſt igitur, quod in diametro b d centrum exiſtit grauitatis.

5 SI in portione à recta linea & ſectione rectanguli coni cõtenta, figura rectilinea inſcribatur perſpectè totius portionis centrum grauitatis erit uertici portionis propinquius, quàm centrũ figuræ rectilineæ inſcriptæ portioni. Eſto a b c portio qualis dicitur, cuius diametros b d, & inſcribatur eidem triãgulus primum perſpectè, & notè a b c, et diuidatur b d in puncto e, ita ut b e ſit dupla e d. erit igitur trianguli a b c centrum grauitatis punctum e. Diuidatur iã in duo æqua utraq; a b, b c, in punctis f g: & per f g ducãtur f k, l g, ęquediſtantes ipſi b d. Eſt igitur



portionis a k b centrum grauitatis in linea f k. portionis uero b c l, centrum grauitatis in g l linea. Sint autem ea h i, & iungantur h i: & quoniam h f g eſt figura laterum æquediſtantium, & g i eſt æqualis ipſi f h: eſt igitur f g æqualis h i. Quare magnitudinis ex utriſque compoſitæ ex a k b, & b l c portionibus, centrum grauitatis eſt in media h i: cum portiones quidem ſint æquales, hoc eſt punctum q. quoniam autem trianguli a b c centrum grauitatis eſt e, magnitudinis uero ex utriſq; a k b, b l c compoſitæ centrum eſt q: conſtat quod portionis totius a b c centrum grauitatis eſt in linea q e: id eſt inter puncta q e. quare centrum grauitatis totius portionis erit uertici ipſius portionis propinquius, quàm centrum trianguli in ipſa perſpectè inſcripti.

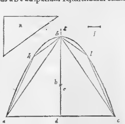
Rurſus portioni pentagonum inſcribatur rectilineum perſpectè, quod ſit a k b l c. Et eſto totius portionis diametros b d, utriuſque uero portionis utraque k f, l g diametros. Et quoniã in a k b portione inſcripta eſt rectilinea figura perſpectè, ſiue notè, totius portionis cẽtrum grauitatis eſt propinquius uertici ipſius portiõis, quàm cẽtrum rectilineæ inſcriptæ.



Eſto itaque ipſius portionis centrum grauitatis h, trianguli uero l. Rurſus eſto portionis b l c centrum grauitatis m, trianguli uero n, Eſt autem magnitudinis

dinis ex utrisque a k b, b l c portionibus compositæ, centrum grauitatis q: magnitudinis autem ex utrisque a k b, b l c triangulis compositæ, centrum est T. Rursus quoniam trianguli a b c centrum grauitatis est e, compositæ autem ex utrisque a k b, b l c portionibus, centrum est q: constat quod totius a b c portionis cētrum grauitatis est in linea q e, sic diuisa, ut quā proportionem habet a b c triangulus ad utrasq; simul a k b, b l c portiones, eam habeat eius pars terminata ad q, ad partem minorem. Pentagoni autem a k b l c centrum grauitatis est in linea recta e t, sic diuisa, ut quam proportionem habet a b c triangulus ad a k b, b l c triangulos, eam habeat eius lineæ pars terminata ad t ad reliquam. quoniam igitur maiorem habet proportionem a b c triangulus ad a k b, b l c triangulos, quàm ad portiones, manifestū est portionis a b c centrum grauitatis esse uertici b propinquius, quàm centrū figuræ rectilineæ inscriptæ. & in omnibus figuris rectilineis inscriptus portionibus notæ eadem ratio habetur.

PORtione à linea recta & sectione rectanguli coni compræhensa data, potest ipsi portioni figura rectilinea perspectè ita inscribi, ut linea quæ inter centrum grauitatis portionis & centrum figuræ inscriptæ capitur, sit quacunque linea recta data minor. Detur portio a b c, qualis dicitur, cuius cētrum grauitatis sit h, & inscribatur ipsi perspectè triāgulus a b c, & sit data linea f: & quā habet proportionem b h ad f, eam habeat triangulus a b c ad spacium R, inscribatur etiam ipsi portioni a b c perspectè rectilinea figura a k b l c, ita ut portiones residuę sint minores spacio R: & esto figuræ inscriptæ centrum grauitatis e. Dico iam lineam h e minorem esse linea f data. Nam si non, uel æqualis, uel maior erit. Quoniā itaque a k b l c figura rectilinea ad residuas portiones maiorem proportionem habet, quàm a b c triangulus ad R, hoc est quàm h b ad f: habet autem h b ad f nō minorem proportionem, quàm ad h e, cū nō sit minor f: multo magis ergo figura a k b l c rectilinea ad reliquas portiones maiorem proportionem habebit, quàm b h ad h e. Quare si faciamus, ut sicuti a k b l c figura inscripta ad residuas portiones habet, sic alia quæcunq; linea ad h e: cum iam portionis a b c centrum grauitatis sit h, protracta e h, & assumpta aliqua recta eam ad e h proportionem habēte, quam figura a k b l c rectilinea ad residuas portiones, erit ipsa maior h b: habeat igitur g b ad b e talem proportionem. erit igitur g centrum grauitatis magnitudinis ex portionibus residuis compositæ: quod quidem esse non potest, nam est, quæ per g ducta ęquedistanter ipsi a c in eandem partem portioni. Constat igitur, lineam h e minorem esse linea f. quod fuerat demonstrandum.



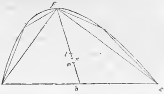
6

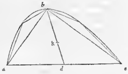
DVarum portionum similium, quæ linea recta & coni rectanguli sectione compræhenduntur, centra grauitatis in eandem proportionem diametros earum diuidunt. Sint duæ portiones, quales dicitur a b c, e f g, quarum diametri b d, f b: & esto portionis a b c, centrum grauitatis k punctum: ipsius uero e f g, sit centrum grauitatis l. Ostendendum quod in eandem proportionem diuidunt ipsas diametros centra k l. Nam si non, esto sicut k b ad k d, sic f m ad b m, & inscribatur ipsi e f g portioni figura rectilinea notæ, ita ut linea inter centrum portionis, & centrum figuræ inscriptæ capta, sit minor l m. & esto fi-

7

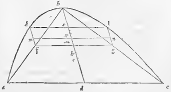
f gura

guræ inſcriptæ centrum grauitatis x punctum. Inſcribatur quoq; ipſi a b c portioni figura rectilinea ſimilis figuræ ipſi e f g portiotu inſcriptæ, hoc eſt ſimiliter notæ, cuius centrum grauitatis uertici portionis erit propinquius, quàm centrum portionis: quod quidem eſſe nõ teſt. Conſtat igitur, b k ad k d eam, quam f i ad i h, habere proportionem.





8 CVIuſcunq; portionis à recta linea & rectanguli coni ſectione compræhenſæ, centrum grauitatis diuidit diametrum portiotis, ita ut pars eius ad uerticem terminata, ſit ad partem eam ſeſquialtera, quæ ad baſim portionis terminatur. Eſto a b c portio qualis dicitur: eius diametros eſto b d, cẽtrum grauitatis punctum h. Oſtendendum eſt, quod b h ad h d eſt ſeſquialtera. Inſcribatur ipſi a b c portioni triãgulus perſpectè a b c, cuius centrum grauitatis eſto e: & utraque b a, b c in duo æqua diuidatur punctis f g, & ducanť k f, l g equediſtanter b d. Erũt igiť k f l g diametri portionũ a k b, b l c. Sit itaque portionis a k b centrũ grauitatis m: ipſius uero b l c punctum n. Et iungantur f g, m n, k l. magnitudinis ergo ex utraque portione compoſitæ centrum grauitatis eſt q. Et quoniam eſt ſicut b h ad h d, ſic k m ad m f, & componendo, & permutatim ſicut b d ad k f, ita h d ad m f. Sed b d ad k f, quadrupla eſt. hoc enim in fine oſtenditur, ubi eſt ſignũ ✐: igitur h d eſt quadrupla m f. Quare reſidua b h, ad reſiduam k m quadrupla eſt: hoc eſt ipſius ſ q. reliquarum ergo utraque ſimul, hoc eſt b ſ, q h tripla eſt ad ſ q. eſto b ſ tripla ſ x: & q h ergo erit tripla x q. Et quoniam b d eſt quadrupla ipſius b ſ, hoc enim demonſtratum eſt: & b ſ eſt tripla ſ x: igitur b x eſt tertia pars ipſius b d. Eſt autem & e d pars tertia ipſius b d, cum punctum e ſit centrum grauitatis trianguli a b c: & reliqua igitur x e erit tertia pars b d. Quoniam uero totius portionis centrum grauitatis eſt h punctum: magnitudinis autem ex utriſq; a k b, b l c portionibus compoſitæ cẽtrum grauitatis eſt punctum q: trianguli a b c centrum eſt e: eſt quoque ſicut triã-



guli

guli a b c ad residuas portiones, sic q h ad h e. Triplus uero est triangulus a b c ad residuas portiones, cum tota portio sit ad triangulum a b c sesquiterna: igitur q h est ad h e tripla. Ostensum autem est q b triplam esse q x. Igitur x e quincupla est ipsius e h: hoc est d e ad h e. nam illæ sunt æquales. quare d h sexcupla est ipsius h e, & est b d tripla ipsius d e. igitur b h ipsius h d sesquialteram esse necesse est.

SI quatuor lineæ fuerint in proportionalitate cõtinua proportionales, & quam proportionem habuerit minima earum ad excessum quo maxima minimam superat, eam habeat quædam linea sumpta ad tres quintas eius excessus quo maxima proportionalium tertiam superat: quam uero habuerit linea sumpta æqualis simul istis, duplæ maximæ proportionalium, & quadruplæ secundæ, & sextuplæ tertiæ, & triplæ quartæ, ad lineam sumptam istis simul æqualem, quincuplæ maximæ, & item decuplæ secundę & tertiæ, & quincuplæ quartæ, eam habeat linea quædam sumpta ad excessum quo maxima proportionalium excedit tertiam: lineæ sumptæ utręq; simul erũt duæ quintæ illius lineæ quæ maxima est proportionalium linearum. 9

Sint quatuor lineæ proportionales a b, b c, b d, b e: & quam proportionem babet b e ad e a, eam habeat f g ad tres quintas ipsius a d. Quam uero habet linea æqualis istis simul duplæ a b, quadruplæ b c, sexcuplæ b d, triplæ b e, ad lineam æqualem simul istis, quincuplæ a b, decuplę c b, & b d, &

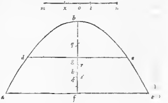


quincuplæ b e, eam habeat proportionem g b ad ipsam a d. Ostendendum est, quod f h est duæ quintæ ipsius a b. Quoniam enim a b, b c, d b, b e sunt proportionales: erunt etiam a c, c d, d e in eadem proportione. et utraque simul a b, b c ad ipsam b d, eam habet proportionem, quam a d ad d e: & similiter utraque simul c b, b d ad e b, & omnes ad omnes. Eam ergo habet proportionem a d linea ad d e, quam linea æqualis istis simul, dupla a b, tripla c b, & b d, ad lineam æqualem istis simul, duplæ b d, & e b. Quam autem proportionem habet linea æqualis istis simul, duplæ a b, & quadruplæ b c, & quadruplæ b d, & duplæ b e, ad lineam istis simul æqualem, duplæ d b, & ipsi b e, eam habebit d a ad aliquam minorem ipsa d e. Sit illa d o, & utræque ad primas eandem habebunt proportionem: habebit itaque o a ad ipsam a d, eam quam linea æqualis istis simul duplæ a b, quadruplæ b c, sexcuplæ d b, & triplæ b e, ad compositam ex dupla utriusque simul a b, b c, & quadruplæ utriusque simul c b, b d. Habet autem & a d linea ad g h, eam quam quincupla utriusq; simul a b, b e cum decupla utriusque simul c b, b d, ad compositam ex dupla a b, & quadrupla c b, & sexta b d, & tertia e b. Dissimilitet autem proportionibus ordinatis: id est in proportionalitate perturbata. per æquam ergo eam habet proportionem a o ad g h, quam composita ex quincupla utriusque simul a b, b e, & decupla c b, b d, ad compositam ex dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d. Verum composita ex quincupla utriusq; simul a b, b e, & decupla utriusq; simul c b, b d, ad cõpositam ex dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d, eam habet proportionem quam quinq; ad duo. Igitur o a ad g h eam habet proportionem, quam quinq; ad duo. Rursus quoniam o a ad d a eam habet proportionẽ, quam e b, cum dupla b d ad æqualem lineæ compositæ ex dupla utriusque simul,

a b, b e, cum quadrupla utriusq; simul c b, b d. Est autem & sicut d a ad d e, sic cõposita ex dupla a b, tripla b c, & ipsa b d, ad æqualem ipsi e b, cũ dupla b d: dissimiliter igitur proportionibus ordinatis & sectis, id est perturbata proportionalitate per æquam sicut o d ad d e, sic dupla a b, cum tripla b c, & ipsa b d, ad compositam ex dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d. quare & sicut o e ad e d, sic e b cum tripla b d, & dupla e b, ad duplam utriusque simul a b, b e, & quadruplam utriusq; simul c b, b d. Est autem & sicut d e ad e b, sic a c ad c b, & c d ad d b. quare secundum compositionem tripla c d, ad triplam d b, sicut dupla d e ad duplam e b. & ideo composita ex a c, & tripla c d, & dupla d e, ad compositam ex c b, & tripla d b, & dupla e b. Dissimiliter rursus proportionibus ordinatis, id est, in perturbata proportionalitate per æquam, eandem habebit proportionem o e ad e b, quam a c cum tripla c d, & dupla d e, ad duplam utriusq; simul a b, b e, cum quadrupla utriusq; simul c b, b d. Tota igitur o b ad e b, eam habet proportionem, quam tripla a b, cum sexcupla c b: & tripla d b, ad duplam utriusq; simul a b, b e, cum quarta utriusq; simul c b, b d. Et quia e d, d c, c a in eadem sunt proportione, & utraque simul, unaquæq; c b, b d, d b, b c, c b, b a, erit sicut e d ad d a, sic utraque simul e b, b d ad utramq; simul d b, b c, cum composita ex c b, b a. Igitur componendo sicut e a ad d a, sic utraque simul e b, b d, cum utraq; simul a b, b c, & utraq; simul c b, b d: quæ est utraque simul e b, b a, cum dupla utriusq; simul d b, b c, ad utramq; simul b d, d a, cum dupla b c. Quare & dupla ad duplam eandem habebunt proportionem: hoc est, sicut e a ad d a, sic dupla utriusq; simul e b, b a, cum quarta utriusque simul c b, b d, ad duplam utriusque simul a b, b d, cum quadrupla b c. quare & sicut e a ad tres quintas d a, sic composita ex dupla utriusque simul e b, b a, & quadrupla utriusq; simul c b, b d, ad tres quintas compositæ ex dupla utriusq; simul a b b d, & quadrupla c b. Verum sicut e a ad tres quintas a d, sic e b ad f g. Sicut igitur e b ad f g, sic dupla utriusq; simul a b, b e, cum quadrupla utriusq; simul d b, b c, ad tres quintas compositæ ex dupla utriusq; simul a b, b d, cum quadrupla c b. Ostensum est autem, sicut o b ad e b, sic tripla utriusque simul a b, b d cum sexcupla c b, ad duplam utriusq; simul a b, b e, cum quarta utriusq; simul c b, b d. per æquam igitur sicut o b ad f g, sic composita ex tripla utriusq; simul a b, b d, & sexcupla c b, ad tres quintas compositæ ex dupla utriusq; simul a b, b d, & quadrupla c b. Verum composita ex tripla utriusque simul a b, b d, & sexcupla c b, ad compositam ex dupla utriusq; simul a b, b d, & quadrupla c b, proportionem habet quam tria ad duo. & ad tres quintas eiusdem, proportionem habet quam quinq; ad duo. Ostensum est autem, quod o a ad g h proportionem habet, quam quinq; ad duo. Tota igitur a b ad totam f h proportionẽ habet, quam quinq; ad duo. Quod si hoc uerum est, necesse quoq; est f h duas quintas ipsius a b esse. Quod fuerat demonstrandum.

10 CUiuslibet frusti à sectione rectanguli coni ablati, centrum grauitatis est in linea recta, quæ frusti existit diametros: qua in quinq; partes ęquas diuisa, cẽtrum in quinta eius media existit, atq; in eo eius puncto quo ipsa quinta sic diuiditur, ut portio eius propinquior minori basi frusti ad reliquam eius portionem eam habeat proportionem, quam habet solidum, cuius basis sit quadratum lineæ illius quę frusti basis maior extiterit. Altitudo uero istis utrisq; simul ęqualis, lineę quæ dupla sit minoris basis frusti, & basi maiori eiusdem, ad solidum quod basim habeat quadratum basis minoris frusti, altitudinem uero istis utrisq; simul æqualem lineæ quæ dupla sit maioris basis, & basi minori. Sint in sectione rectanguli coni duæ lineæ rectæ a c, d e: diametros a b c portionis esto b f. Constat quòd a c, d e sunt æquedistantes ei lineæ, quæ per punctum b ducta, contingit ipsam sectionem: & diuisa e f in quinque partes æquas, esto quinta media h k. & h i ad i k eam habeat proportionem, quam solidum, quod basim habeat quadratum a f, altitudinem

titudinem uero æqualem istis utrisque simul, duplæ d g, & ipsi a f, ad solidum cuius basis existat quadratum f g, altitudo uero æqualis istis utrisque simul duplæ a f, & ipsi d g. Ostendendum est, quod frusti a d c e, centrum grauitatis est punctum i. Esto itaque m n æqualis ipsi f b, & n o æqualis b g: & sumatur ipsarum m n, n o media proportionalis m x, & quarta proportionalis n t. & sit sicut t m ad t n, ita f h ad quandam ab ipso i, quocunque proueniat in frusto punctum. Nihil enim refert siue inter f g, siue inter b g puncta proueniat: quæ sit i r. Et quoniam in rectanguli coni sectione diametros portionis est f b, ipsa f b uel est principalis ipsius sectionis, uel ei diametro æquedistat. lineæ uero a f, d g in eam intentæ, sunt ductæ, cum sint æquedistantes ei lineæ quæ à puncto b ducta sectionem contingit. Si autem hoc fuerit, erit sicut a f ad d g potentia, sic f b ad b g longitudine: hoc est m n ad n x potentia. Sicut ergo a f ad d g potentia, sic m n ad n x potentia. Quare & longitudine sunt in eadem proportione. Sicut ergo cubus lineæ a f, ad cubum lineæ d g, sic cubus ipsius m n ad cubum n x. Verum sicut cubus a f ad cubum d g, sic portio b a c ad portionem d b e. Sicut autem cubus m n ad cubum n x, sic m n ad n t. Quare & diuidendo erit, sicut frusti a d, c e ad portionem d b e, sic m t ad t n: hoc est tres quintæ f g ad i r. Et quoniam solidum basim habens quadratum a f, altitudinem uero compositam ex dupla d g, & ex a f ad cubum a f, eam habet proportionem quam dupla d g, cum a f ad a f. Quare & sicut dupla n x, cum n m ad n m. Est autem sicut cubus a f ad cubum d g, sic m n ad n t. Sicut autem cubus d g ad solidum, basim habens quadratum d g, altitudinem uero compositam ex dupla a f, cum d g: sic d g ad compositam ex dupla a f & d g. Quare & sicut t n ad compositam ex dupla o n et t n. Sunt igitur quatuor magnitudines: solidum, quod basim habet quadratum a f, altitudinem uero compositam ex dupla d g & a f: & cubus a f, & cubus d g: & solidum basim habens quadratum d g, altitudinem uero compositam ex dupla a f, & d g. quæ quatuor magnitudinibus sunt proportionales, duabus simul sumptis compositæ ex dupla n x & m n, & alij magnitudini ipsi m n, & alij deinceps n t, & postremò compositæ ex dupla n o & t n. Per æquam igitur fiet, sicut solidum basim habens quadratum a f, & altitudinem compositam ex dupla d g, & a f, ad solidum quod basim habeat quadratum d g, altitudinem uero compositam ex dupla a f: & d g eam habeat proportionem, quam composita ex dupla n x, & m n, ad compositam ex dupla n o, & n t. Verum sicut solidum dictum, ad solidum dictum, sic h i ad i k. Sicut ergo h i ad i k, sic composita ad compositam. Quare & componendo antecedentibus sequentia, erit igitur sicut f g ad i k, sic quincupla utriusque simul m n, n t, & decupla utriusque simul n x, n o, ad duplam n o & t n. Et sicut f g ad f k, quæ est duæ quintæ illius: sic quintupla utriusque simul m n, n t, & decupla utriusque simul n x, n o, ad duplam utriusque simul m n, n t, & quadruplam utriusque simul n x, x o. Erit igitur sicut f g ad f i, sic quincupla utriusque simul m n: n t, et decupla utriusque simul x n, n o, ad compositam ex



dupla m n, & quadrupla n x, & sexcupla o n, & tripla n t. Quoniã igitur sunt quatuor lineæ rectæ consequenter proportionales, m n, n x, o n, n t: & est sicut n t ad t m, sic quædam sumpta, hoc est r i, ad tres quintas f g, hoc est m o. Sicut autem cõposita ex dupla m n, & quadrupla n x, & sexcupla o n, et tripla n t, ad compositam ex quincupla utriusque simul m n, n t, & decupla utriusq; simul x n, n o, sic altera quædam sumpta, hoc est i f ad f g, hoc est ad m o: erit per ea quæ prædicta sunt r f, duæ quintæ m n, hoc est f b. Quare centrum grauitatis portionis a b c erit r punctum. Esto iam d b e portionis centrum grauitatis q punctum. Frusti itaque a d c e, centrũ grauitatis erit in linea q r recta, terminans lineam a b r eductam, quæ eãdem habet ad illam proportionem, quam frustum ad residuam portionem. Est autem punctum i, centrum ipsum: quoniam ipsius f b tres quintæ est ipsa b r: ipsius uero b g tres quintæ est b q. Reliquæ ergo, hoc est g f, tres quintæ est q r. Quoniã igitur est sicut a d e c frustum ad b d e portionem, sic m t ad n t. Sicut autem m t ad n t, sic tres quintæ g f, quæ est q r, ad r i. Erit igitur & sicut frustum a d c e, ad portionem d b e, sic q r ad lineam quæ est inter centrum grauitatis a b c portionis, & centrum grauitatis frusti. Sed cẽtrum grauitatis a b c portionis, est r punctum, et centrum grauitatis portionis d b e est q. Constat igitur, frusti a d e c, punctum i esse centrum grauitatis.

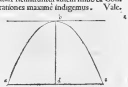
FINIVNT INVENTA ARCHIMEDIS DE HIS quæ æquali pondere aptantur.

ARCHIMEDIS QVADRATVRA PARABOLAE, ID EST PORTIONIS CONtentæ à linea recta & sectione rectanguli coni.

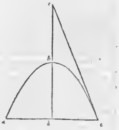
ARCHIMEDES DOSItheo rectè agere.

CVM audissem Cononem mortuum esse, qui nobis adhuc in amicitia residebat: teq; hominem Cononis antea admodum familiarem extinsse, & in Geometria maximè uersatum, eius quidem uita priuari desiderio, & dolore maximo affecti sumus, cum esset homo, cum mei amantissimus, tũ in speculationibus ingenio admirali, ac propè diuino. Tibi uero, ueluti antea Cononi scribere consueueramus sępissimè, præconati sumus inter cætera Geometricæ facultatis theoremata, hoc unum conscriptum mittere: quod cum antea tentatum esset à nullo, nuper à nobis inspectum, & depræhensum est: primò quidem Mechanica ratione perquisitũ, postea uero Geometrica quoq; demonstratum. Eorum enim qui antehac Geometriæ operam dederunt, nõnulli id inuestigare, & memoriæ mandare studuerũt, circulo dato, uel circuli portione quacunq;, spacium rectilineum æquale illi posse inueniri. Itẽ spacium à coni totius rectanguli sectione comprehensum, & linea recta, ad quadrati formam & mensuram reducere conati sunt, sumentes non facilè concessibilia fundamenta ipsis, sanè cum hæc ipsa à quámplurimis non inuenta sint. Illud etiã diuul-

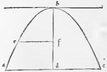
diuulgatum, portionem à rectanguli coni sectione contentam ueterũ neminem ingressum quadrare comperimus, quod nuper à nobis inuentum est. Hoc enim demonstratur, portionem omnem à recta linea & coni rectanguli sectione compræhensam, trianguli illius esse sesquitertiam, qui quidem triangulus basim habeat & altitudinem cum portione eandem. Hoc fundamento ad eius demonstrationem sumpto, spaciorum inæqualium excessus quibus minus à maiore superatur, sibi ipsis totiens coaceruari posse, ut quodcunq; spacium propositum quod sit finitum superent. Superiores quoque Geometræ hoc fundamento usi sunt: & circulos habere inter se proportionem diametrorum duplicatam, hoc demonstrauerunt, illo fundamento muniti. Item sphæras inter se proportionem suarum diametrorum babere triplicatam. Amplius, omnem pyramidem tertiam esse partem eius prismatis, quod eandem pyramidi basim & altitudinem æqualem habuerit. Item, omnem conum tertiam esse partem eius cylindri, qui basim cono eandem, & æqualem habuerit altitudinem. Similiter eodem fundamento prouecti, illa scripserunt, cum id accidat, eorum quæ prędicta sunt theorematum unum quodq; nihil minus sibi fidei comparare, quàm ea quæcunque sine eo fundamento sunt demonstrata. Nuper autem his quæ à nobis exposita sunt, in similem huius fundamenti fidem adductis, describentes igitur eius demonstrationes mittimus: primum quidem quo pacto per Mechanicas rationes inspecta fuerunt, deinde Geometricis argumennis demonstrata. Præmittuntur autem initio ea Conica elementa, quibus ad eorum demonstrationes maximè indigemus. Vale.



1 SI coni rectãguli sectio sit, in qua a b c, et linea b d recta sit, aut æquedistans diametro, aut ipsa diametros, & a c sit æquedistans lineæ contingenti in puncto b sectionẽ rectanguli coni: æqualis erit a d ipsi d c. Quod si a d est ipsi d c æqualis, æquedistantes erunt a c, & contingens sectionem coni in puncto b.



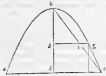
2 SI coni rectanguli sectio sit a b c, sitq; b d æquedistans diametro, aut ipsa diametros: linea uero a d c æquedistans lineæ coni sectionem in puncto b contingenti: & linea e c sectionem coni in puncto c cõtingat: erunt b d, & b e æquales.

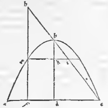


3 SI sectio rectanguli coni sit a b c, & b d, æquedistans diametro, aut ipsa diametros: & ducantur quædam æquedistantes illi, quæ in puncto b contingit sectionem

ctionem, quæ ſint a d, e f. Erit ſicut b d ad b f longitudine, ita a d linea ad e f potentia. Hæc autem demonſtrata ſunt in Conicis elementis.

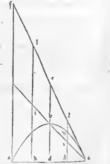
4 Eſto portio compræhenſa à coni rectanguli ſectione, & linea recta a b c, & linea b d. à medio a c ducatur æquediſtans diametro, aut ipſa diametros: & ſit b c linea iũcta, et protracta. ſi iam ducatur alia quædam æquediſtãs ipſi b d, quæ ſit f h, diuidens lineas rectas c b, a c: ducatur item alia æquediſtans ipſi a c, ſecans lineam b d,





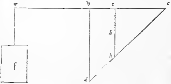
quæ ſit k g: eandem habebit proportionem f h ad h g, quam d a ad d f. Ducta eſt namque per punctum i, linea k g æquediſtans ipſi a c. Eſt igitur ſicut b d ad b k longitudine, ita d c ad k g potentia. nam hoc demõſtratum eſt. Erit igitur ſicut b c ad b i longitudine, ita d c ad d f potentia. Aequales ſunt enim d f, k g. & ideo ſicut b c ad b h potentia: proportionales igitur ſunt b c, b h, b i lineæ. Quare eam habet proportionem b c ad b h, quam c h ad h i. Eſt igitur, ſicut c d ad d f, ita f h ad h g. Verum c d eſt æqualis ipſi d a. Cõſtat igitur, d a eam ad d f habere proportionem, quam f h ad h g.

5 Eſto portio cõtenta à linea recta, & coni rectanguli ſectione a b c, & ducatur à puncto a, linea a f, æquediſtans diametro. à puncto c ducatur contingens ſectionem coni, cõcurrens cum a f, in puncto f. Si iam ducatur aliqua in triangulo f a c, quæ ſit æquediſtãs ipſi a f: ipſa ducta ſecundũ eandẽ proportionem à ſectione rectanguli coni ſecabitur, & ipſa a c ab ipſa producta proportionaliter. Eiuſdem uero rationis erit pars lineæ a c uerſus a, cuius pars lineæ ductæ uerſus a c lineam. Ducatur itaq; aliqua d e, æquediſtans lineæ a f: & primò ſecet lineam a c in duo æqua. Quoniam igitur a b c eſt ſectio coni rectanguli, & b d ducta eſt ęquediſtans diametro, & a d d c ſunt æquales, erit a c æquediſtans lineæ contingenti ſectionem rectanguli coni in puncto b. Rurſus quoniam d e diametro eſt æquediſtans, & à puncto c ducta eſt c e contingens ſectionem rectanguli coni in puncto c, & linea a c æquediſtans lineæ contingenti ſectionem coni, erit e b æqualis b d, Quare eandem habet proportionem d a ad d c, quam d b ad b e. Siquidem



dẽ igitur linea ducta, per æqualia diuidat lineã a c, ostensum est. Sin nõ per æqua diuidat, ducat̃ alia quędã k l, æquedistans ipsi a f. Ostendendũ quod eandẽ habet proportionẽ a k ad k c, quam k h ad h l. Cũ igitur b d, sit æqualis ipsi b c, æqualis erit & i l ipsi k i. Eandẽ ergo proportionẽ habet k i ad i l, quã d c ad d a. Habet aũt & k i ad i h, eam quã d a ad d k. nam hoc est prius ostẽsum in præmissa. Quare eã habet k h ad h l, quam a k ad k c proportionem. Demõstratũ est igitur propositũ.

Intelligatur autem hoc primum, quod est in inspectione propositum, sitq; con- 6 spectum ad horizontem erectum, & lineæ a b: deinde pars quidem uersus d intelligatur infrà, pars autem uersus aliud suprà. Triangulus autem b d c sit rectangulus, habẽs rectum angulum ad c, & b c latus ęquale dimidio libræ: ut sit linea a b lineæ b c æqualis. Suspendatur autẽ triangulus ex punctis b c, item suspendatur aliud spacium f ex altera parte libræ in puncto a. & spacium f suspensum in puncto a, æqueponderet ipsi triangulo b c d, sic



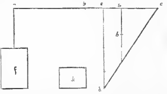
posito ut nunc est collocatum. Dico tunc f spacium trianguli b c d tertiam partem esse. Quoniam igitur suppositum est, libram æqueponderare, a c linea ipsi libræ assimilatur. Terminantur autem lineæ ad angulos rectos ex ipsa a c ductæ in plano, erecto super horizontẽ: & erũt perpendiculares super horizõtem. Diuidatur iam linea b c in puncto e, ita ut c e dupla sit ipsius e b: & ducatur k e æquedistans ipsi d b, & hæc in duo æqua diuidatur in puncto h. trianguli itaq; b a c centrum grauitatis est punctum h. nam hoc est ostensum in Mechanicis. Si igitur trianguli b d c suspensio, quæ est ad b c, soluatur, & ipse suspendatur ad punctum e, manet triangulus ut nunc se habet. Vnumquodq; enim suspensorũ ex quo puncto constitutum manet, ita ut secundum lineam perpendicularem sit punctum suspensibilis, & centrum grauitatis suspensi. nam hoc quoque ostensum est. Quoniam igitur triangulus b d c eandem habet constitutionem ad libram, æqueponderabit similiter ipsi spacium f. Quoniam autem æqueponderãt f spacium suspensum in puncto a, & triangulus b d c in puncto e, constat quod mutuam inter se habent proportionem longitudinũ: & est sicut a b ad b e, ita triangulus b d c ad spaciũ f. sed a b tripla est ipsius b e. igitur triangulus b d c spacij f triplus existit. Manifestũ quoq; est, quod si triangulus b d c spacij f triplus extiterit, ambo similiter cõstituta æqueponderabunt.

Esto itẽ libra linea a c, medium aũt eius sit b, & suspẽdatur secũdum b triangulus c d g: triangulus uero c d g sit triangulus ambligoni- 7

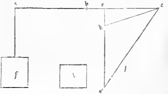


us, qui basim habeat lineā d g, altitudinē uero ęqualem dimidiæ libræ, & suspendatī d c g triāgulus ex b c pūctis. spaciū uero f suspensum ad a, æqueponderās esto ipsi c d g triangulo, sic se habenti uti nunc positū est. Similiter ostēdetur spacium f esse tertiam partem trianguli c d g. suspendatur autem & quoddam aliud spaciū ex a, quod sit tertia pars trianguli b c g. triangulus itaq; b d c æqueponderabit spacio f l. Cum itaq; b c g triangulus æqueponderet ipsi l, & b c d ipsi f l, & trianguli b c d tertia pars est f l, manifestum est triangulum c d g spacij f triplum haberi.

8 Esto libra a c, medium eius b: & suspendatur secundū b triangulus c d e rectangulus, qui rectū angulum habeat ad e, & suspendatur ex libra secundum c e, & spacium f suspendatur ex a, & æqueponderato ipsi c d e triangulo, sic se habente sicut nūc positum est. Quam autem proportionem habet a b ad b e, eam habeat c d e triāgulus ad spacium k. Dico iam, f spacium trianguło c d e minus esse, spacio autem k maius. Sumatur itaq; triāguli c d e centrū grauitatis quod sit h, et ducatur h g ęque distans d e. Quoniam igitur triangulus c d e æqueponderat spacio f, eandem proportionem habet spacium c d e ad spacium f, quam a b ad b g. Quare f minus est c d e. & quoniam c d e triangulus ad spacium f, eam propornonem habet, quam b a ad b g: ad k uero eam quam b a ad b e: constat triāgulum c d e maiorem proportionē habere ad k, quàm ad f quare f spacium ipso k maius existit.

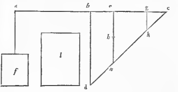


9 Esto item libra a c, & medium eius b, & c d k triangulus ambligonius, qui basim habeat d k, altitudinem uero e c, & suspendatur ex libra in punctis c e. Spaciū uero f suspendatur, & æqueponderato d e k triangulo, sic se habēti sicuti nūc iacet. Quam aūt proportionem habet a b ad b e, eam habeat c d k triangulus ad spacium l. Dico iam spacium f, ipso l maius esse, et ipso d c k minus. Hoc similiter præmisso, demonstrabitur.

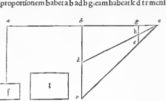


10 Esto item a b c libra, eius medium b, mensula uero b d g k habeat angulos ad puncta b g rectos, latus ueto k d inclinatum in c: & quam habet proportionē b a ad b g, eam habeat b d k g mensula ad l spacium. Suspensa autem sic mensula b d k g ex libra in b g punctis, suspensum quoq; sit f spacium in a, & æqueponderato ipsi b d k g mensulæ, sic se habenti sicut nunc iacet: dico iam f spacium ipso l minus esse. Diuidatur itaq; b g, in puncto e, ita ut quam proportionem habet dupla d b, & ipsa k g ad duplam ipsius k g, & ipsam b d, eam habeat e g ad b e: & ducta per punctum e, línea e n æquedistans ipsi b d, diuidatur in duo æqua in pūcto h, iam mensulæ b d k g centrum grauitatis est h, nam hoc ostensum est in Mechanicis.

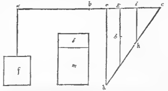
chanicis. Si igitur b d k g in e ſuſpendatur, à punctis autem b g ſoluatur, manet eandem habens conſiſtentiam, per eandẽ quæ in ſuperioribus rationem, & æqueponderabit ſpacio f. Quoniam igitur mẽſula b d k g in e ſuſpẽſa ęqueponderat ſpacio f in a ſuſpenſo, erit ſicut b a ad b e, ita menſula b d k g ad ſpacium f. Maiorem igitur proportiõem habet menſula b d k g ad ſpacium f, quàm ad ſpacium l, cum a b habeat ad b e maiorem proportionem, quàm ad b g. Quare ſequitur f ſpacium eſſe ipſo l ſpacio minus.



11 Esto item a b c libra, & medium eius b, & b d t r menſula ſit quæ habeat latera k d, t r uerſus c inclinata: latera uero d r, k t ſuper b c perpendicularia, & d r cadat in b. Quam autem proportionem habet a b ad b g, eam habeat k d t r menſula ad l ſpaciũ: mẽſula uero k d r t ſuſpendatur ex libra in punctis b g, & ſpacium f in puncto a, et æqueponderato ſpacium f mẽſulæ k d t r, ſic ſe habenti uti nũc iacet. Similiter iam ſuperiorib. oſtendetur, ſpacium f ſpacio l minus eſſe.

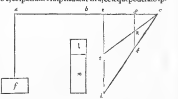


12 Esto item libra a b c, medium eius b, & menſula d e k g ſit, quæ angulos ad e g puncta rectos habeat: lineas uero k d, e g uerſus c inclinatas. et quam proportionem habet a b ad b g, eam habeat d e k g menſula ad m. Quã autem habet a b ad b e, eam habeat d e k g menſula ad l. menſula uero d e k g ſuſpenſa ſit in libra ex punctis e g: ſpaciũ uero f ſuſpendatur ex a, æqueponderans ipſi menſulæ, ſic ſe habenti uti nunc iacet. Dico iam ſpacium f ipſo l maius eſſe, ipſo uero m minus. Sumam enim centrum grauitatis menſulæ d e k g, quod ſit h. Sumetur autem ſimiliter ſuperioribus: & ducatur h i ęque

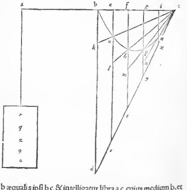


distans ipsi d e. Si igitur mensula ex libra suspendatur in puncto i, & soluatur à punctis e g, manet eandem habens consistentiam, & æqueponderabit ipsi f spacio eadem qua superius ratione: quoniam mensula suspensa in puncto i, equepõderat spacio f suspenso in a, eãdem habebit proportionẽ mensula ad spaciũ f, quã a b ad b i. Cõstat igitur d e k g maiorẽ ad l habere proportionem, quàm ad f: ad m uero minorẽ, quàm ad f. Quare f spaciũ ipso l spacio maius est, ipso uero m minus.

13 Esto rursus libra a c, medium eius b, & mensula k d t r, ita ut latera eius k d, t r sint uersus c inclinata: ipsa uero d t, k r sint ad a b perpendicularia. Suspensa autem sit ex libra in puncto e, & spacium f suspendatur in a, & æquepõderato ipsi mẽsulæ k d t r, sic se habenti, ut nunc habet. & quam habet proportionem a b ad b e, eam habeat d t k r, ad spacium l. Quã uero habet a b ad b g, eam habeat mensula ad spacium m. Similiter, ut suprà proximè ostẽdetur, f spaciũ ipso l spacio esse maius, ipso m uero minus.

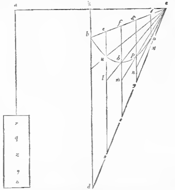


14 Esto portio b o c compræhensa à recta linea, & rectanguli coni sectione. Esto primum b c ad angulos rectos super diametrum, & ducatur à puncto b æquedistans ipsi diametro: & à puncto c ducatur c d contingens sectionem rectanguli coni in puncto c. erit iam b c d triangulus rectangulus. Diuidatũ b c in partes quotcunq;, b e, e f, f g, g i: & à punctis diuisionum ducantur æquedistantes diametro e s, f t, g y, i x. à punctis autem, quibus ipsę secant sectionem coni, educãtur & iunganũ ad c. Dico iã, b d c triangulũ mẽsulis quidẽ k e, l f, m g, n i, & triãgulo x i c minorẽ esse, q̃ triplũ. mẽsulis aũt f u, g h, i p, & triangulo i o c maiorem esse, quàm triplum. Ducatur itaq; linea recta a b c, & sumatur a b æqualis ipsi b c, & intelligatur libra a c, cuius medium b, et pendeat ex b. Suspendatur autem b d c ex libra in punctis b c: ex altera autem libræ parte suspendantur spacia r q z 9 Δ in puncto a: & spacium r æqueponderet mensulæ d e, sic se habenti ut nunc iacet: spacium uero q mensulæ f s: spacium z



mensulæ

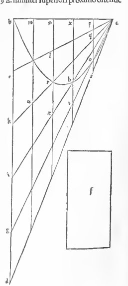
mensulæ t g: ipsum 9 mensulæ x i: ipsum uero △ triangulo c i x: æqueponderabit iam totū toti. Quare triangulus b d c, triplus erit spacio r q z 9 △. Et quoniā est portio b c o, quæ comprænhenditur à recta & sectione rectanguli coni, & à puncto b, ducta est b d æquedistans diametro: & à puncto c ducta c d, contingens sectionē coni in puncto c: ducta quoq; alia æquedistās diametro s e, eandem habebit proportionem b c ad b e, quam s e ad e u. Quare b a ad b e, eam habet quam mensula d e ad k e. Similiter ostenditur, a b ad b f eam habere proportionem, quam f f mensula ad l f, ad b g autem eam quam t g ad m g. ad lineam uero b i, eam quam y i ad n i. Quoniam igitur mensula d e habet angulos ad puncta b e rectos, latera uero uersus c inclinata: æqueponderat autem ipsi quoddam spacium r, suspensum ex libra in puncto a, mensula sic manēte uti nunc posita est: & est sicut b a ad b e, sic mēsula d e ad spacium k e. [sicut autem b a ad b f, ita mensula d e ad spacium q. Spacium igitur q spacio r maius est. nam hoc ostēsum est.] quare spacium k e maius est spacio r. nam hoc ostensum est. Rursus mensula f f, quæ angulos ad f e puncta rectos habet, & latus f t inclinatum uersus c, & æqueponderat ei spacium q ex libra suspensum in puncto a, mensula sic manente uti nunc iacet: & est sicut b a ad b e, sic f f mensula ad f u. Sicut autem a b ad b f, ita f f mensula ad l f. Quare q spacium mensula l f minus existit, ipsa uero f u maius. Hoc enim ostēsum est. Eadem ratione & z spacium, mensula quidem m g minus: ipsa uero h g maius esse probatur. & 9 spacium mensula n i minus, ipsa uero p i maius. Similiter autem & d spacium triangulo quidem x i c minus, ipso uero c i o maius. Quoniam igitur mensula k e est maior spacio r, & ipsa l f maior ipso q, & m g ipso r: & n i ipso 9, & x i c triangulus ipso △: constat quod omnia simul dicta spacia maiora sunt spacio r q z 9 △. Est autem spacium r q z 9 △ tertia pars trianguli b c d. Quare manifestum est, triangulū b c d minorem esse quàm triplum mensularum k e, l f, m g, n i, & triāgulo x i c. Rursus quoniam mēsula f u minor est spacio q, mensula h g minor spacio z, & ipsa i p ipso 9, & triangulus i o c ipso △: constat, dicta spacia simul omnia minora esse spacio q z 9 △. Quare manifestū quoque est, b d c triangulum maiorem esse quàm triplum mensularū u f, h g, i p, & triangulo i c o: minorē uero quàm triplū earū quæ antè scriptæ sunt.



Esto rursus b o c portio à recta linea & à sectione rectanguli coni comprænhensa, & b c linea non sit ad angulos rectos super diametrum, necesse iam est lineam à puncto b duc-

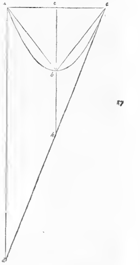
25

ctam, æquedistantem diametro uersus portionem facere angulum obtusum in parte uersus b, aut uersus c, & intra sectionis portionem, aut extra. Esto itaque quod faciat angulum extra obtusum uersus b, & ducatur b d æquedistans diametro à puncto b: & à puncto c ducatur c d contingens sectionem in puncto c, & diuidatur b c in partes æquas quotcunque b e, e f, f g, g i, i c. à punctis uero e f g i ducantur e s, f t, g y, i x diametro æquedistantes, & à punctis quibus ipsæ secant sectionem coni iungantur lineæ ad c, & extrahantur. Dico iam & nunc triangulum b d c esse mensulis ξ u, l f, m g, n i, & triangulo c i x esse minorem quàm triplum: mensulis uero f u, g h, i p, & triangulo c o i maiorem esse quàm triplum. Extrahatur d b in alteram partem, & à puncto c ducatur ad ipsam c k perpendicularis: & protendatur, donec sumatur a k æqualis ipsi c k. Intelligatur rursus libra a c, cuius medium k, & pendeat libra ex k puncto: & c k d triangulus suspẽdatur ex media libra in pũctis k c, sic se habens ut nũc iacet. Ex altera parte libræ suspẽdantur in puncto a, spacia r q z 9 Δ: & r quidẽ mensulæ d e æqueponderet, sic manenti uti nunc posita est: & spacium q mensulæ f s, spacium z mensulæ t g: & ipsũ 9 ipsi y i. & ipsum Δ ipsi c i x triangulo, æqueponderabit quoque totum toti. Quare triangulus d b c triplus existit spatio r q z 9 Δ. similiter superiori proximo ostendetur, mẽsulam e z spacio r esse maiorem, & mensulam l f maiorem spacio q, & f u minorem: & mensulam m g maiorem spacio z, ipsam uero g h minorem. & n i maiorem spacio 9, & ipsam p i minorẽ. & x i c triangulum spacio Δ maiorem, ipsum c i o minorem eodem. Quare constat propositum.



16 Esto item portio b o c cõtenta à linea recta, & à sectione rectanguli coni. et ducatᷣ per b linea b d æquedistãs diametro, & à puncto c ducatur contingẽs sectionem coni in puncto c, quæ sit c d. Esto trianguli b c d tertia pars spacium f. Dico iam, portionem b o c ęqualem esse spacio f. Nam si nõ, erit uel maior, uel minor. Esto primum si fieri potest maior, & sit ut excessus quo portio b o c superat spacium f, sibijpsi totiẽs coacetuetur, donec compositum ex ipso excedat triangulum b c d. Potest itaque sumi spacium quoddã minus illo excessu, quod spacium sit pars trianguli b c d. sit ergo b e c triangulus dicto excessu minor, & pars trianguli b c d. Erit quoque linea b e pars lineæ b d. Diuidatᷣ itaque b d in partes, & sint diuisionum puncta g i k: & à punctis g i k, ad lineam c e rectam ducãtur lineæ rectæ, quæ secabũt sectionem coni, cum linea c d contingat eam in pũcto c. & per puncta quibus rectæ secant sectionem coni, ducãtur lineæ rectæ m u, n r, x h, p s æquedistantes diametro. erunt eædem æquedistantes quoque ipsi

b d Quoniã igitur triangulus b e c est minor excessu, quo portio b o c excedit spacium f. Constat utraq; simul, spacium f, et triangulum b e c, minora esse portione: & triãgulo b c e æquales sunt mensulæ illæ per quas sectio coni permeat, quę sunt m e, u l, h r, h o cum triangulo c o f. nam mensula m e est communis: m l autem est æqualis u l, & l x æqualis ipsi h r, & q x æqualis ipsi h o, & triangulus c q p æqualis triangulo c o f. Spacium igitur f minus est mensulis m l, x r, p h, cũ triangulo p o c: & est triangulus b c d triplus spacij f. Quare b c d minor est, quàm triplus mensularum m l, r x, h p cum triangulo p o c, quod quidem esse non potest. nam ostensus est maior esse, quàm triplus. non est igitur portio maior spacio f. Dico item eam neq; esse minorem illo. Esto enim, si esse potest, minor. Rursus excessus quo spacium f superat portionem b o c, ipse sibijpsi totiẽs coaceruetur, donec superet triangulum b c d. Potest itaq; spaciũ aliquod sumi quod sit minus excessu, quodque sit pars trianguli b c d, & reliqua eadem disponantur ut prius. Quoniam igitẽ triangulus b c e minor est excessu quo spacium f superat portionem b o c, triangulus b e c, & portio b o c, utraq; simul sunt minora spacio f. Est autem & ipsum f spacium minus quadrilateris e m, u n, z x, p t, & triangulo c p f. nam b c d triangulus spacij f est triplus: spaciorum autem prædictorum minor, quàm triplus, ut in pręmisso est ostensum. Igitur triangulus b c e, & portio b o c, simul sunt minora quadrilateris e m, u n, z x, p t, & triangulo c p f. Quare portione inde ablata, quę communis est, triangulus b c e minor erit ipsis spacijs compræhensis, quod esse non potest. nam ostensum est, triangulum b c e mensulis e m, u l, h r, h o, & triangulo c o f esse æqualem, quæ simul sunt maiora dictis spacijs compræhẽsis. Non est igitur portio b o c minor spacio f: & ostensum est eo maiorem esse nõ posse. Portio ergo spacio erit æqualis.



HOc autem demõstrato, manifestũ est, portionẽ à recta linea et à sectione rectanguli coni compræhensam, esse sesquitertiam triangulo, qui habeat basim cũ portione eandem, & altitudinem eidem æqualem. Esto portio comprę hensa à linea recta, & sectione rectanguli coni: uertex eius esto punctum h, & inscribatur ei triangulus b h c, qui basim habeat cum portione eandem, & altitudinem æqualem. Quoniam igitur punctum h est uertex portionis, linea recta à puncto b ducta æquedistans diametro in duo æqua diuidit lineam b c, & b c est æquedistans lineæ cõtingenti portionem in puncto h. Ducatur autem e h diametro æquedistans: ducatur item à puncto b æquedistans diametro quæ sit b d, & à puncto c ducatur contingens sectionem in puncto c, quæ sit c d. Quoniam igitur e h k linea est diametro æquedistans, & c d contingens sectionem in puncto c, & linea b e c est æquedistans lineæ contingenti sectionem in pũ-

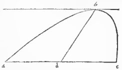
17

cto

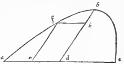
cto h, erit triangulus b c d quadruplus triangulo b h c. Cum igitur triãgulus b c d sit quadruplus triangulo b h c, & triplus portioni, manifestum est portionẽ b h c triangulo b h c sesquitertiam esse.

Earum portionum quæ continentur à curua, & à recta linea, basim uoco ipsam rectam: altitudinem uero maximam perpendicularem, quę à curua linea ad basim portionis aptata sit: uerticem autem, punctum illud à quo perpendicularis maxima ad basim ducitur.

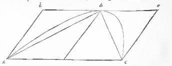
18 SI in portione quæ compræhensa sit à linea recta, & à coni rectanguli sectione, à media basi ducatur recta diametro æquedistans, punctum illud in quo dicta æquedistans diametro secat coni sectionem, est uertex sectionis. Esto a b c portio compræhensa à linea recta, & à sectione rectanguli coni, & à medio a c ducatũ d b diametro æquedistans. Quoniã igitur in rectanguli coni sectione ducta est b d diametro æquedistans, erit a d æqualis ipsi d c. Constat ac eque distãtem esse lineæ contingenti sectionem in puncto b. Manifestum est igitur, quod perpendicularis quæ ducetũ à sectione ad lineã a c, erit maxima omnium illa quę à puncto ducta fuerit. Punctum igitur b portionis uertex existit.



19 IN portione à linea recta, & à rectanguli coni cõpræhensa sectione linea ducta à media base, æquedistãs diametro, est sesquitertia lineæ ductæ similiter à dimidia dimidiæ basis. Esto a b c portio contenta à recta, & à sectione coni rectanguli: & ducatur b d à dimidia basi æquedistans diametro, & e f ducatur à dimidia a d: ducatur item f h æquedistãs ipsi a c. Quoniã igitur in sectione rectanguli coni ducta est b d ęquedistans diametro, & a d f h sunt æquedistantes cõtingenti sectionem in puncto b, constat eandem habere b d ad b h proportionem longitudine, quam a d linea ad f h potentia. Igitur b d est quadrupla ipsius b h longitudine. Constat igitur b d ipsius e f esse sesquitertiã longitudine.



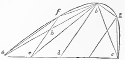
20 SI portioni à recta, & sectione rectanguli coni contentæ triangulus inscribatur, qui habeat basim cum portione eandem, & altitudinem eandem, triangulus dimidio portionis maior existit. Esto itaq; a b c portio qualis dicitur, & inscribatur ei triangulus a b c, eãdem habens basim toti, & altitudinem æqualem. Quoniam igitur triangulus habet basim, & altitudinem cum portione eandem, necesse est pũctum b uerticem esse portionis. Quare linea a c est æquedistans contingenti sectionem in puncto b. ducatur b e, per punctum b æquedistans ipsi a e. & à punctis a & c, ducantur a d, c e æquedistantes diametro. cadent iam ipsæ extra portionem. Quoniam igitur triangulus a b c est dimidium figuræ a d e c æquedistanti-



um

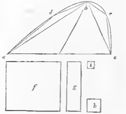
um laterum, constat ipsum plus quàm dimidium esse portionis. Hoc demonstrato manifestum est, posse figuram multorum angulorũ inscribi portioni, ita ut portiones residuæ sint quocunq; spacio dato minores. nã continuè plus dimidio ablato ex hoc constabit, quod diminuentes hoc modo tandem faciemus portiones residuas quocunq; spacio proposito minores.

21 SI in portione à recta, & à sectione rectanguli coni contenta, triangulus inscribatur, eandem basim cum portione, & eandem altitudinẽ habens: item in portionibus residuis alij trianguli inscribantur, eandem & basim & altitudinem cum portionibus habentes: utriusq; trianguli in residuis portionibus inscripti, octuplus est triangulus ille qui in tota portione descriptus existit. Esto a b c portio qualis dicitur, & diuidatur a c puncto d, & ducatur b d diametro æquedistans. punctum ergo b erit uertex portionis, & triangulus a b c eandem basim habet cum portione, et altitudinẽ eandem. Diuidatur item in duo ęqua a d puncto e, & ducatur e f ęquedistãs diametro: diuidatur autem a b puncto h. pũctum igitur f, erit uertex portionis a f b: & triangulus a f b, eandem



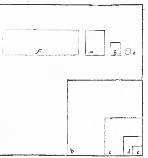
& basim & altitudinem cum portione a f b habebit. Ostendendum est, triangulum a b c, octuplum esse trianguli a f b. Est itaq; b d sesquitertia lineæ f e, & dupla ipsius e h. Quare e h, dupla est ipsius h f. Quare a e h triãgulus, duplus est a f b: & ideo æqualis triangulo a f b: & triangulus a b d quadruplus est triangulo a h e. igitur & trianguli a f b. Quare totus triangulus a b c, erit trianguli a f b octuplus. Similiter ostendetur octuplus esse triangulo in b g c portione descripti.

22 SI sit portio à recta & à sectione rectanguli coni comprehensa, & spacia quotcunque ponantur consequenter in quadrupla proportione: sit autem horum spaciorum maximum æquale triangulo, qui basim habeat, & altitudinem cum portione eandem: spacia hæc simul omnia sunt ipsa portione minora. Esto itaq; portio a b e c, à recta & sectione rectanguli coni compræhensa. Sunto itẽ spacia quotcunq; numero continenter posita, f g h i: & sit præcedens quadruplũ sequentis. Esto autem eorum maximũ f, & esto f æquale triangulo habenti basim, & altitudinem cum portione eandem. Dico a d b e c portionem, spacijs f g h i, simul omnib. esse maiorem. Esto totius quidem portionis uertex b, & residuarum portionum uertices d, e. Quoniam igitur triangulus a b c, est octuplus utriusq; trianguli a b d, b e c: Constat quod utriusq; simul quadruplus existit. Et quoniam a b c triangulus æqualis est spacio f, eadem ratione & trianguli a d b, b e c sunt simul æquales spacio g. Similiter ostendetur, triangulos deinceps reliquis portionibus inscriptos, eãdem basim & altitudinem cum portionibus habẽres, æquales esse spacio h, & triangulos portionibus deinde residuis inscriptos æquales esse spacio i. Spa

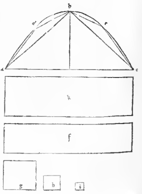


cia igitur proposita simul omnia, sunt æqualia figuræ cuidam multorum angulorum portioni inscriptæ. Quare ipsa portione constat esse minora.

23 SI magnitudines quotcunq; consequenter in proportione quadrupla disponãtur, hæ magnitudines simul omnes cum tertia parte minimæ illarum, sunt sesquitertiæ magnitudini illarum maximæ. Sunto itaq; quotcunq; magnitudines continenter positæ, unaquæq; præcedens, quadrupla proximæ sequentis a b c d e: & sit earum maxima a. Sit autẽ f tertia pars ipsius b, et g tertia pars ipsius c, & h ipsius d, et i ipsius e. Quoniam igitur f est tertia pars ipsius b, & b quarta ipsius a, erit b|f utraque simul tertia pars ipsius a. & eadem ratiõe c g, tertia ipsius b, et h d ipsius c, & i e ipsius d: & iam simul omnia b c d e f g h i, tertia pars cõpositæ ex omnibus simul a b c d e. Sunt autem f g h tertia pars ipsarum b c d. Quare & residuũ b c d e i, erit residui, hoc est ipsius a tertia pars. Constat igitur ea simul omnia a b c d e, cũ ipso i tertia ipsius e, esse ipsius a sesquitertia: quare, & c.



24 QVæcunq; portio contenta à linea recta, & sectione rectanguli coni, est sesquitertia trianguli illius qui basim habuerit, & altitudinem cum ipsa portione eandem. Esto itaq; portio a d b e c compræhensa à recta, & à sectione rectanguli coni: & a b c sit triangulus qui eandem basim habeat, & altitudinem cum portione eandem: ipsius uero trianguli esto k spacium sesquitertiũ. Ostendendum est, ipsum k esse æquale portioni a d b e c. Nam si non, erit aut maius, aut minus eadẽ. Esto prius, si esse potest, portio a d b e c maior ipso k spacio: inscribam iam triangulos a d b, & b e c, uti supradictum fuit. Et



item

item in residuis portionibus inscribam alios triangulos eandem basim, & altitudinem cum portionibus eandem habentes: & similiter in residuis portionibus inscribam duos triangulos, basim & altitudinem cum portionibus eandem habentes, donec residuæ portiones sint tandem minores excessu, quo portio a d b e c excedit spacium k. Quare figura multiangula ipsi portioni inscripta, maior erit spacio k, quod esse non potest. Cum sint quædam spacia in proportione quadrupla disposita, quorum primum est triãgulus a b c, quadruplus triãgulis a d b, & b e c: deinde ipsi trianguli sunt quadrupli triangulis, qui in portionibus sequentibus sunt descripti, & reliqui identidem. Quare constat omnia simul triangulorũ spacia minus quàm sesquitertia esse triangulo a b c, maximi eorum: & positum est, k spacium esse sesquitertiũ eidẽ maximo. Non erit igitur portio a d b e c maior k spacio. Esto item si esse potest, minor eodem. Ponatur autem triangulus a b c æqualis spacio f, & sit g quarta pars ipsius f, et sit h quarta pars ipsius g: & cõtinuæ semper ponantur consequenter ita, donec ultimum sumptum sit minus excessu quo spacium k excedit portionem, & sit ipsum minus i spacium. sunt iam f g h i spacia simul cum tertia parte ipsius i, sesquitertia ipsius f. Est autem & k spacium sesquitertium ipsius f. quare spacium k erit æquale spacijs f g h i simul, cum tertia parte i. Cum igitur spacium k excedit spacia f g h i minori quantitate quàm sit i, portionem uero excedit maiori quàm sit idem i, colligitur spacia f g h i simul maiora esse portione: quod esse non potest. Ostensum namq; est, quod si sint spacia quotcunq; in quadrupla proportione consequenter posita, & maximum eorum æquale fuerit triangulo portioni inscripto, spacia illa simul omnia esse minora portione. Non est igitur a d b e c portio minor spacio k. Ostensum quoq; est, eam non posse ipso esse maiorem. Quare eidem æqualem esse necesse est. At uero spaciũ k sesquitertium existit trianguli a b c, portio igitur a d b e c, eiusdem trianguli a b c sequitertia existet.

FINIVNT ARCHIMEDIS INVENTA DE QVAdratura Parabolæ, hoc est portionis contentæ à linea recta, & sectione rectanguli coni.

ARCHIMEDIS TRACTATVS
DE ARENAE NVMERO.

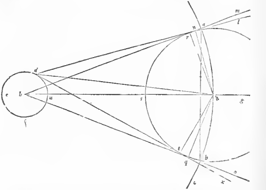
EXISTIMANT quidam, rex Gelon, arenam esse multitudine infinitam. Ego autem dico, non eam solum quæ circa Syracusas, & circa reliquã Siciliam existit, uerumetiã illam quę in universa habitabili simul et inhabitabili regione ubiq; cõtinetur, certo quodam numero comprehensam esse. Nonnulli uero infinitam eam minime opinantur: nullum autem tantum excogitari posse numerũ credũt, quẽ illius multitudo nõ superet. Igitur qui hac opinione ducuntur, si eiusmodi cumulum arenæ concepissent, qualis esset si universè terræ tumor repleto mari, & omnibus canalibus usque ad cuiusq; altissimi montis uerticem arena collectus haberetur, huius quoq; tanti alter præterea multiplex excogitaretur, eos minimè dubiũ est sensuros fore, huiusmodi cumuli multitudinem nullo prorsus numero posse contineri. Ego autem hoc declarare experiar demonstrationibus Geometricis, quib. te assensurũ minime dubitarim, quod ex illis qui

à nobis expressi, & in his quæ ad Zeuxippũ scripsimus, expositi sunt numeri, nõ nulli excellunt non solum arenę magnitudinẽ quæ fuerit tumori terræ æqualis, quæ quidem terra uti diximus ubiq; repleta fuisset: uerum quæ toti mundo par haberetur. Non autem te fugit, quod mundus à quam plurimis Astrologis appel letur sphæra, cuius centrum est centrum terræ: quæ uero ex centro linea æqua est lineæ rectæ quæ à centro solis ad centrum terræ sit ducta. Hæc itaq; quæ apud Astrologos conscripta inueniuntur, refutãs & cõmutans Aristarchus Samius suppositionibus quibusdam, scripta quædam tradidit, in quibus id perspicitur, ex his quæ illic supposita sunt, euenire mundum, dicto nuper mundo esse multiplicem. Nam apud eum supponitur stellas, quæ non errant, & solem immobile permanere, terram uero circa solem ferri in circuli circumferẽtia, qui est in medio cursu situs. Sphæram uero stellarum fixarum circa idem centrum cum sole sitam esse: ea uero magnitudine haberi, ut circulus circa quem positum est terram ferri, eam habeat proportionem ad stellarum fixarum distãtiam, quam habet centrum sphęræ ad circumferentiam. Hoc utiq; constat, esse non posse. Nam cum sphæræ centrum nullam habeat magnitudinem, non utiq; ullam habere posse ad superficiẽ sphæræ proportionem, est opinandum. Ostendendum est autem, Aristarchum hoc intellexisse & sensisse. Quoniam itaq; opinantur terram ueluti circa centrum mundi constitutam, quam proportionem habet terra ad mundum à nobis dictũ, eam habere sphæram in qua circulus existit, in cuius circumferentia supponitur, terram ferri ad sphæram stellarum fixarum. Nam demonstrationes eorum quæ apparent, id quod sic suppositum est accõmodat, & maxime apparet magnitudo sphęræ, in qua ponit terram moueri, æqualiter supponi ei qui à nobis dicitur mũdus. Dicimus utiq;, si fieret sphęra ex arena, quæ tanta esset quantam Aristarchus sphæram stellarum fixarum supponit esse, etiã sic quædam haberi, & ostendi posse ex his quæ in principijs habentur numerorum denominationibus, quæ hanc ipsam arenam multitudine superarent, quæ magnitudinem dictæ sphæræ haberet æqualem his quæ dicam suppositis. Primum quidem ambitum terræ esse ueluti ter mille milia stadiorum, uel etiam maiorem, cum tu quoq; illis assentias, qui experientia ostenderunt eum esse trecentorum milium stadiorum. Ego autem exuberans, & ponens terræ magnitudinẽ decuplã eius quam superiores posuerũt, & opinati sunt, ambitum eius pono esse ter mille milia stadiorum. Post hoc, diametrum terræ maiorem esse diametro lunæ, & diametrum solis maiorem esse dia metro terræ, similiter eadem sumens quæ plurimi superiorum Astrologorum posuerunt. Post hoc, diametrum solis esse tricesies diametrum lunæ, & magis. & à prioribus astrologis, ab Eudoxo quidem uti nonuplum, Phidia uero uti duodecuplum: ab Aristarcho, qui demõstrare conatus est diametrum solis diametro lunæ maiorem esse, quàm octo et decies ipsam: minorem uero quàm uigesies eandem. Ego autem & hunc excedens, ut suppositum cum ostensum fuerit sit minime ambiguum, suppono diametrum lunæ ueluti trigesies tantum quantum nunc ponitur, uel etiam maiorem. Ad hæc quoq; diametrum solis maiorem esse latere figuræ mille angulorum, inscriptæ maximo circulo mundi. Hoc autem suppono, cũ Aristarchus dicat solem uideri esse uigesimãseptimam partẽ circuli zodiaci. Ipse enim hoc modo perscrutatus, conatus est instrumentis depræhendere angulum cui sol aptatur, qui uerticem habeat in oculo. Simile uero non facile est sumere, cum neq; uisus, neq; manus, neq; instrumenta, per quæ experiri oportet, satis habeant fidei ad declarandum id quod certum est. De his autem in præsentiarũ non expedit disceptare: alioquin cum hæc sæpe sum errorem declarent. Sufficiat autem mihi ad propositum demonstrandum, angulum sumere, qui maior sit angulo illo cui sol accommodatur, qui uerticem habeat in uisu. Et item alterum sumere angulum, qui non sit minor eo cui sol accommodatur, quiq; uerticem habeat in

hoc hodie copernicus defendit

eam partem in quam uisus. Posita igitur longa regula super planum erectum, in loco unde sol oriri debet, & sol aspici possit, deinde cylindro per tornum facto, & longo posito super canonem erecte illico post ortum solis, deinde procedente ipso uersus horizontem & possit contra solem inspicere, uertatur canon in solem, et uisus constitutus sit in extremo regulæ, & cylindrus in medio positus solis & uisus, ita ut occultetur sol uisui, separans autem cylindrum à uisu donec incipiat ex utraq; parte cylindri solis extremũ quid & minimũ lymbi inspicere: cõstituatur illic cylindrus. Siquidem similiter contingit uisum ab uno puncto inspicere, & uidere ductis lineis rectis ab extremo regulæ, ubi uisus in inspiciendo fuerat constitutus quæ contingant cylindrum, angulus, compræhensus à lineis ductis maior est uno quodã ex his angulis, quibus sol accõmodatur, qui uerticem habeat in uisu propterea, quod sol utriq; ex cylindro uidetur. Quoniã uero uisus nõ à pũcto uidet, sed à magnitudine quadã, sumatur magnitudo quædã uolubilis non minor uisu, & hac magnitudine posita in extremo regulę ubi uisus fuerat cõstitutus, ducantur lineæ rectæ contingentes magnitudinẽ & cylindrũ: angulus itaq; à lineis ductis cõpræhensus minor est angulo cui sol accõmodatur, qui uerticem habeat uersus uisum. Magnitudo uero quæ nõ sit minor uisu, hoc modo reperitur. Duo cylindruli sumantur leues, tersi, æquè crassi inter se, unus albus, alter non: & sic disponãtur ad uisum, ut albus à uisu remotior sit: nõ albus iuxta uisum proximus, ita ut attingat faciem. Siquidem igitur cylindruli leuissimi & tersissimi fuerint, aspectu proximus uisui ab ipso uisu præteritur, & albus conspicitur: siquidem ipsi admodum tersi, et qui iuxta est fuerit omnino leuior. sin autem non supra modũ, partes quædã uidebũtur cylindruli albi, ex utraq; parte cylindruli ad uisum admoti. Sumptis deinde his ipsis cylindris, & positis, ita ut crassitudine alterius alter uisui occultetur, & ampliori loco. Tanta igitur magnitudo, quanta est crassitudo cylindrulorũ hoc facientium maximè quodam modo est non minor uisu. Angulus autem non est minor angulo cui sol accommodatur, qui uerticem habet in uisu, Sic ergo sumatur, & remoto per regulam ab ipso uisu, ita ut à cylindro sol occultetur totus, & ducantur lineæ rectæ ab extremo regulæ, ubi uisus est constitutus, cõtingentes cylindrum, angulus ab ipsis ductis compræhensus non est minor angulo cui sol accommodatur, qui uerticem habet in uisu. Istis angulis sic sumptis, dimetiatur angulus rectus, & fiat puncto & aculeo, ut angulo recto in centum & sexagintaquatuor partes diuiso, unus angulus qui sit minor quàm una pars illarum: & ipse angulus minor factus sit recto angulo diuiso in ducentas partes, maior una illarum partium. Constat igitur, quod angulus cui sol accommodatur, qui uerticem habet in uisu minor est, quàm una pars recti diuisi in centum quatuor & sexaginta partes: minor autẽ angulo solis dicto est maior, quàm una pars anguli recti diuisi in ducentas partes. Constat item quod angulus cui sol accõmodatur, qui uerticem habet in uisu, minor est quàm una pars anguli recti diuisi in centum quatuor & sexaginta partes, maior autem quàm una pars recti diuisi in ducentas partes. Istis autem sic concessis, ex quibus sequitur solis diametrũ latere figuræ maiorem esse, quæ figura mille angulis constet, atq; inscripta sit circulo qui in mundo maximus habetur. Intelligatur planum per centrum terræ eductum, & per centrum uisus minimo solis, uel ferè illico cum sol super horizontem steterit. Diuidat autem planum eductum mundum secũdum circulum a b c, terram uero secundum d e f, & solem secundum f g circulum. sit autem centrum terræ h, & solis centrum k, & centrum uisus d. Et ducantur lineæ rectæ contingentes circulũ f g à puncto d, quæ sint d l, d x, & contingant in punctis n & t. & à puncto h ducantur h m, h o cõtingentes eundem in pũctis q & r. Circulum uero a b c diuidant lineæ h m, h o, in punctis a & b. Est itaq; o k maior quàm d k, cum sol ponatur super horizontem esse. Quare angulus contentus lineis d l, d x, maior exi-

ſtet angulo contento lineis h n, h o. Angulus autem contentus lineis d l, d x, maior eſt quàm ducenteſima pars anguli recti, minor uero quàm una pars anguli recti diuiſi in centum quatuor & ſexaginta partes. Huic autem angulo æqualis eſt an-



gulus cui ſol accommodatur, qui uerticem habet in uiſu. Quare angulus contentus lineis h m, h o, minor eſt quàm una pars anguli recti, diuiſi in centum quatuor & ſexaginta partes: linea uero a b recta, minor eſt quàm linea quæ ſubtēditur uni portioni circumferentiæ circuli a b n, diuiſę in ſexcentas ſex & quinquaginta partes. ambitus uero dictæ figuræ multorum angulorum, ad ſemidiametrum circuli a b c, minorem habet proportionem, quàm quatuor & quadraginta ad ſeptem: propterea quod cuiuſcunque figuræ multorum angulorum circulo inſcriptæ, ambitus habet ad ſemidiametrum proportionem minorem, quàm quatuor & quadraginta ad ſeptem. Noſti enim à nobis demonſtratum eſſe, cuiuſcunq; circuli circumferentiam maiorem eſſe, quàm triplam ſeſquioctauam diametri: minorem uero, quàm triplam ſeſquiſeptimam eiuſdem. Minorem uero habet proportionem b h ad h k, quàm undecim ad mille centum octo & quadraginta. Quare linea b a minor eſt, quàm centeſima pars lineæ h k. Ipſi uero b a æquatur diametros circuli e g. quoniam eius dimidia u a eſt æqualis k r, cum h k ſit æqualis ipſi h a, cum ſint perpendiculares ductæ ab eiſdem angulis iunctæ. Cōſtat igitur, diametrum circuli a b c minorem eſſe quàm centeſimam partē lineæ h k. & e h y angulus minor eſt diametro circuli a b g, cum d e f circulus ſit minor circulo e g. Minores igitur utræq; erunt h y, k ſ lineæ, q̄ centeſima pars lineæ h k. Quare h k ad y ſ minorem habet proportionem, quàm centum ad nouem & nonaginta. Et quoniam linea h k y minor eſt quàm h r, & linea ſ y minor linea d c: minorem igitur proportionem habebit h r ad d e, quàm centum ad nouem & nonaginta. Cū uero h k r, d k t trianguli ſint rectanguli, latera k r, k t æqualia erūt: lineæ uero h r, d t inæquales: & angulus maior contentus lineis d t, d k, ad angulum contentum lineis

lineis h r,h k, maiorem habet proportionem, quàm h k ad d k: minorem uero, quàm h r ad d t. Si enim sint duo trianguli rectanguli, & altera duorum laterum cõtinẽtia angulum rectum sint æqualia, altera uero inęqualia, maior angulus ex his qui erunt apud latera inæqualia, ad minorem habet maiorem proportionem, quàm maior linea subtensa angulo recto ad minorem subtentũ: & habet minorẽ, quàm maior linea earum quæ circa angulos rectos sunt ad minorem. Quare angulus cõtentus lineis d l,d x, ad angulum contentum lineis h n,h m, minorẽ habet proportionem, quàm h r ad d t: quæ minorem habet proportionem, quàm centũ ad nouem & nonaginta. Quare angulus contentus d l,d x lineis, ad angulum contentũ lineis b m,h o, minorẽ proportionem habet quàm centum ad nouem & nonaginta. Et quoniam angulus contentus lineis d l,d x, est maior quàm ducentesima pars recti, erit & angulus contentus lineis h m,h o maior quàm nouem & nonaginta partes anguli recti diuisi in uigintimilia partiũ. Quare maior est quàm una pars anguli recti diuisi in ducentas partes & tertia. Igitur b a maior est, quàm subtenta uni portioni circumferentiæ circuli a b c, diuisæ in partes quadringẽtas duodecim ipsi uero a b æqualis est solis diametros. Constat igitur, diametrum solis maiorem esse latere figuræ, quæ sit mille angulis constituta.

Istis suppositis demonstrãtur & ista, uidelicet diametrum mundi minorem esse diametro terræ, quàm decies milies. Item diametrũ mundi minorem esse, quàm decies miles decem milia centies stadiorum. Quoniam igitur suppositum est, diametrum solis minorem esse diametro lunæ, quàm tricesies, & diametrũ terræ maiorem esse diametro lunæ: constat diametrũ solis minorem esse diametro terræ, quàm tricesies. Rursus autem, quoniam ostensum est, diametrum solis maiorem esse latere figuræ quæ mille angulis constet, maximo mundi circulo inscriptæ: constat ambitum dictę mille angulorum figuræ diametrum solis minus quàm milies cõtinere. Solis autem diametros diametrum terræ minus quàm tricesies continet. Quare ambitus figuræ mille angulorum, diametrum terræ minus quàm tricesies milies continebit. Diametro uero mundi maior est quàm triplus. Nam ostensum est, diametrum cuiuscunque circuli minorem esse tertia parte ambitus cuiuscunque figuræ multorum angulorum circulo inscriptæ, quæ plus quàm sex lateribus constet: cum hexagono inscripto in circulo, diametros circuli est tertia pars ambitus ipsius hexagoni, erit ut diametros mundi diametrũ terræ contineat minus decies milies. Quod aũt diametros mundi minor sit decies milies decem milibus centies stadiorum, hinc cõstat. Quoniam enim supponitur, ambitum terræ maiorem esse quàm trecentorum decem milium stadiorum, & ambitus terræ maior est diametro quàm tripla, propterea quod cuiuscunque circuli circumferentia est plus quàm tripla diametro, constat diametrũ terræ minorem esse quàm centies decẽ milia stadiorum. Quoniam autem diametros mundi diametrum terræ minus continet, quàm decies milies: constat diametrum mundi minorem esse quàm decies decem milia centies stadiorum. Circa distantiam igitur magnitudinũ hæc suppono. Verum de arena ista ponantur. Si fuerit aliqua magnitudo ex arena composita, quę non sit papauere maior, eius arenæ numerũ nõ maiorem decem milib. esse: & diametrum papaueris esse non minorem quadragesima parte digiti. Suppono autẽ hoc cõsiderans hoc modo: posita in regula tersa & leui fuerũt papauera in eadem linea recta constituta, aptata inter se, & trigintaquinque papauera plus loci occupabant quàm digiti lõgitudo existat. Minorem itaque diametrũ papaueris ponens statuo, ut sit pars quadragesima digiti, & nõ minor: uolens etiã per hęc nõ ambiguè, indubitatissimè demonstrare propositũ. Hæc aũt sunt quæ suppono. At uero utile esse arbitror, denominationes numerorũ enumerare, ut in his qui cõpositi sunt à me in libro quẽ ad Zeuxippũ scripsi, nõ curẽt qui hic legẽt, propterea quod nil hic præter ea quæ in eo libro dicta sunt, additũ habetur. Cõtingit aũt nomina numerorum

merorum à nobis tradita in decē milib. collecta, & suprà decem milia perfectè, et satis intelligimus numerũ miliũ decem referentes eũ in reliquos superiores. Sunto itaque qui à nobis dicti sunt numeri in milies decem milia primi nominati. horum itaq; qui primi dicũtur decies milies decem milia, uocetur unitas eorum qui secundi sunt, & numerorum secundorum unitates, & unitatum decem, & centeni & milleni & decies milies erunt unitatum, quæ dicuntur decies milies decē milia: & itē decies milies decem milia secũdorum numerorũ, uocetur unitas tertiorũ numerorum, et numerentur tertiorum numerorum unitates, & unitatum deceni & centeni, & milleni, & decies milleni, erunt decies milies decem milium unitatũ dictarum. Eodem autem modo & tertiorum numerorum decies milies decē milia uocentur unitates quartorum numerorum: & decies milies decem milia quartorum numerorũ similiter uocenť unitates quintorũ numerorũ: et hoc modo procedentes numeri huiusmodi nomina habentes, erunt decies milies denorum milium decies milies decem milia. Sufficiũt quidem, & ex tantis hi numeri cognoscũtur. Licet autē & in plus producere. Sunto igiť hi qui nuper dicti sunt numeri primæ periodi uocati. Vltimus aũt numerus periodi unitas uocetur secundæ periodi primorum numerorum, & rursus decies milies decem milia secundę periodi secundorũ numerorũ: similiter et horũ ultimus unitas uocetur secũdę periodi tertiorum numerorum: & sic semper numeri procedentes nomina habeãt secũdæ periodi, erunt decies milies decem milia denorum milium decem milia decies milies. Rursus ultimus secũdæ periodi numerus decies milies decem milia uocetur unitas tertiæ periodi primorum numerorum decies milies decem milium. Et hoc modo procedentib. erũt decies milies denorũ milium decies milies dena milia decies milies decem milia. Istis hoc modo denominatis, erũt numeri ab unitate proportionales effecti. qui uero iuxta unitatē ad decē procedũt, hi octo primi cũ unitate primorũ decies milies decē miliũ uocatorũ erũt primi. Octo autem qui post eos sequũtur, numeri uocentur secundorũ, & alij eodē modo istis erunt synonymorũ uocati: & erũt distantiæ octoni decies milies denũ miliũ. Octauus enim numerus est milies dena milia, q secũdi octoni erit primus: quoniã decuplus est eius qui eũ præcedit, decies milies decē milia erit secundorũ numerorũ. hic aũt est unitas tertiarũ myriadũ. Constat igiť plures esse octoni, ut dictũ est. Cōfert aũt et hoc cognoscere, si sint numeri ab unitate proportionales, & quidã ex eadē proportionalitate sese multiplicauerint, q produceť, erit ex eadē proportionalitate, tantũ distãs à maiore multiplicantiũ, quantũ minor multiplicantiũ ab unitate discesserit secundũ proportionalitatis rationē, & productus idē ab unitate in ordine proportionis distabit uno minus ex numero illo qui sit collectus ex duobus numeris, dictos multiplicãtes in ordine proportionis denominãtibus. Esto itaq; quotcũq; numeri ab unitate proportionales a b c d e f g h i k l: sit a unitas, & d multipliceť h, & proueniat q. Sumať aũt in ea proportionalitate ex eo ordine unus, qui tãtos in ea proportione inter se & h habeat, quãti sunt inter d & unitatem, & hic sit l. Ostendendũ est, quod q est ęqualis ipsi l. Cum igiť sint proportionales, & totidē d distat ab unitate sicut l ab ipso h, eandē proportionē habet d ad unitatē, quã l ad ipsum h. Verũ d est multiplex unitatis secundũ seipsum d. igitur l erit multiplex ipsius h secundũ ipsum d. Quare l est æqualis ipsi q. Cōstat igiť, productũ esse ex eius proportionalitatis ordine unũ, & à maiore multiplicantiũ tãtis distabit, quãtis minor ab unitate discedit. Constat quoq; eum in ordine proportionis tantis ab unitate distare uno minus, quãtus est numerus ex numeris ordinis multiplicãtium collectus. nã a b c d e f g h tanti sunt, quantis h distat ab unitate. sed i k l uno pauciores, quàm quibus d distat ab unitate. Cum h ergo tanti erunt.

Istis ita dispositis, quibusdã suppositis, quibusdã demōstratis, id quod propositũ est demonstrabitur. Quoniã itaq; supponitur, diametrũ papaueris nō esse minorem

norem quadragesima parte digiti, constat sphæram quæ diametrum digito æqua
lem habeat, maiorem esse regione quã occupat papauer, sexagesies quater milies.
nam ipsa est secundum dictum numerum multiplex eius sphęræ, quæ habeat dia
metrum quadragesimam partem digiti. Nam ostẽsum est, quod sphæra haberad
sphæram proportionem diametro suæ ad diametrum alterius triplicatam. Quo-
niam aũt suppositũ est, numerũ arenæ ad magnitudinem papaueris nõ maiorem
esse decem milibus, constat si arenæ sphæra multiplicetur ad magnitudinem sphę
ræ quæ diametrum digito æqualem habeat, nõ maior erit arenæ numerus quàm
decies milies ipse sexagesies quater mille. Hic enim numerus est unitates sex se-
cundorum numerorum, & primorum myriades quatuor milia. Minor est igitur,
quàm decem myriades secundorũ numerorũ. Sphęra uero quæ centum digitorũ
diametrũ habuerit, sphæræ quæ diametrum digitalem habuerit, multiplex est ad
hæc centum myriadibus, quia habet ad aliam sphæram proportionem suæ dia-
metri ad diametrũ illius triplicaram. Si igitur ex arena fiat sphæra, quæ habeat dia
metrũ centum digitorũ, cõstat quod minor erit arenæ numerus, ꝗ numerus ex de
cẽ unitatib. secũdorũ numerorũ, in centũ myriades ductis collectus. Quoniã aũt
numerus decem unitatũ secundorũ numerorũ decimus est in ordine proportio-
nis ab unitate, in decuplis quoq; centũ est proportionalis, centũ uero myriadũ nu
merus septimus est ab unitate in eodẽ proportionis ordine, cõstat quod factus in-
de sextus erit ex eodẽ proportionis ordine sextusdecimus ab unitate. Nam osten
sum est, productũ uno paucioribus ab unitate distare, quàm sint illi qui ex utroq;
multiplicanniũ numero collecto notatur. Ipsorũ uero sexdecim octo primi simul
cũ unitate primorũ uocati sunt, reliqui uero post istos octo secundorũ, & eorũ ul-
timus est mille myriades secundorũ numerũ. Cõstat igitut multitudinem arenæ,
quæ habeat magnitudinẽ æqualẽ sphæræ, cuius sit diametros centũ digitorũ, mi-
norẽ esse quàm mille myriades secundorũ numerorũ. Rursus sphæra quæ diame
trum decem miliũ digitorũ habuerit, multiplex est sphæræ habentis diametrum
centum digitorũ myriadib. centũ. Si igitur fiat sphæra ex arena tantã habens ma-
gnitudinẽ, quantã habet sphæra cuius diametros est decem miliũ digitorũ, cõstat
numerũ arenæ inde prouenientem esse minorem quam mille myridas secundorũ
numerorũ multiplicatæ in centum myriades: quoniam mille myriades secundo-
rum numerorum est sextusdecimus ab unitate numerus in ordine proportionis,
& centũ myriades est septimus ab unitate in eodem eiusdẽ proportionis ordine.
Constat igitur, quod numerus inde factus erit uigesimussecundus ab unitate in
eodem proportionis eiusdem ordine. Istorum uero duorũ et uigintiprimi octo cũ
unitate primorũ uocati sunt: octo secũdi post illos secundorũ, reliqui uero sex ter-
tiorum uocabuntur, & eorũ ultimus est decem myriades tertiorũ numerorũ. Con
stat igitur arenæ multitudinẽ habentis magnitudinẽ æqualem sphæræ, cuius dia-
metros est decem milium digitorũ, minorẽ esse quàm decem myriades tertiorum
numerorum. & quoniã sphæra, cuius diametros æqualis stadio, est minor sphæ-
ra, quæ habeat diametrum decem milium digitorũ: constat arenæ multitudinem
habentis magnitudinem æqualem sphęræ cuius diametros est æqualis stadio, mi
norem esse quàm decem myriades tertiorũ numerorũ. Rursus sphęra quæ diame
trum habet centum stadiorum, multiplex est sphæræ habentis diametrum unius
stadij centum myriadibus. Si igitur fiat sphæra ex arena, quæ tantam habeat ma-
gnitudinẽ quantã habeat sphæra cuius diametros est centum stadiorum: constat
eius arenæ numerum minorem esse numero qui fit multiplicatis decem myriadi-
bus tertiorum numerorum per centũ myriadas. Et quoniam tertiorum numero-
rum decem myriades uigesimus secundus est ab unitate in uno proportionis or-
dine, centum uero myriades septimus est ex eodem eiusdem proportionis ordine:
constat collectum inde numerum fore uigesimumoctauum ab unitate in eodem
eiusdem

eiusdem proportionis ordine. Horũ aũt uigintiocto numerorum primi octo cum unitate primorum uocati sunt, secundi octo post illos secundorum, tertij octo tertiorum, & reliqui quatuor quartorum uocabuntur, & eorum ultimus est mille unitates quartorum numerorum. Manifestum est igitur, arenæ multitudinem, cuius magnitudo fuerit æqualis, sphæræ habenti diametrum centum stadiorum, minorē esse quàm mille unitates quartorũ numerorum. Rursus sphæra habens diametrum decem milium stadiorum, multiplex est sphæræ habentis diametrũ centũ stadiorum centum myriadibus. Si igitur fiat ex arena sphæra, habens tantam magnitudinem, quantam habet sphæra cuius diametros est decem milium stadiorũ, constat huius arenæ multitudinem fore minorem numero producto ex mille unitatibus quartorum numerorum per centum myriadas multiplicatis. Quoniam enim quartorum numerorum mille unitas est uigesimusoctauus ab unitate in eodem eiusdem proportionis ordine: constat productum inde numerũ fore in eodem eius proportionis ordine tricesimũquartum: horum uero quatuor & triginta numerorum primi octo cum unitate primorum uocati sunt, secundi octo post illos secundorum, tertij octo tertiorum, & quarti octo quartorum, & reliqui duo erunt quintorum: quorum ultimus erit decem unitates quintorum numerorum. Constat igitur arenæ multitudinem habentis magnitudinem æqualem sphæræ, cuius diametros est decem milium stadiorum, minorem fore, quàm decem unitates quintorum numerorum. Rursus sphæra quæ habeat diametrum centum myriadibus stadiorum æqualem, multiplex est sphæræ habentis diametrum decē milium stadiorum. Si igitur fiat ex arena sphæra, habens tantam magnitudinē, quãtam habet sphæra cuius diametros est centum myriadum stadiorum, constat numerũ arenæ istius minorem fore eo numero, qui producitur ex decem unitatibus quintorum numerorum, per centum myriadas multiplicatis. nam quia decem unitates quintorum numerorum est tricesimusquartus proportionalis ab unitate, & centum myriades est septimus ab unitate in eodem eiusdem proportionis ordine, constat numerũ inde productũ, ex eodem eiusdem proportionis fore quadragesimum ab unitate: horum uero quadraginta primi octo cum unitate primorũ uocati sunt, secundi post illos octo secundorum, tertij octo tertiorum, quarti octo quartorum, & quinti octo quintorum numerorum, & eorum ultimus est mille unitates quintorum numerorum. Constat igitur multitudinem arenæ, cuius magnitudo fuerit æqualis sphæræ habenti diametrum centum myriadas stadiorum, minorē esse quàm mille unitates quintorum numerorum. Sphæra uero quæ diametrum habeat decies mille myriadas stadiorum, multiplex est sphæræ, cuius diametros est centum myriades stadiorum centum myriadibus. Si aũt fiat sphæra ex arena, tantam habens magnitudinem, quãtam habet sphæra cuius diametros est decies mille myriades stadiorum, manifestum est, quod eius arenæ multitudo minor erit numero qui producetur ex mille unitatib. quintorum numerorum, multiplicatis per centum myriadas Nam cum mille unitates quintorum numerorum sit quadragesimus ab unitate proportionalis, & centum myriades sit septimus ab unitate in eodem eiusdem proportionis ordine, manifestũ est, numerũ inde productum fore quadragesimũsextum ab unitate proportionalem: horũ sex & quadraginta numerorum, octo primi cum unitate primorum uocati sunt, octo secũdi post illos secundorũ, octo post secundos tertiorum, octo post tertios quartorum, octo post quartos quintorum, reliqui post quintos sextorum sunt uocati, & eorũ ultimus est decem myriades sextorum numerorum Constat igitur arenæ multitudinem, quæ magnitudinem habeat æqualem sphæræ, diametrum habenti decem milium myriadum stadiorum, minorē esse q̃ decem myriades sextorũ numerorũ. Sphæra uero, quæ diametrũ habeat stadiorũ centũ myriadas myriadũ, multiplex est sphæræ habenti diametrũ decē miliũ myriadũ stadiorũ centũ myriadibus. Si igi-

igitur fiat sphæra ex arena, quæ magnitudinem habeat tantam, quantam habet sphæra cuius diametros est centum myriades myriadum stadiorum: constat huius arenæ numerum minorē fore numero producto ex decē myriadib sextorũ numerorum, per cētum myriadas multiplicatis. Nam quoniã decē myriades sextorum numerorum, quadragesimus sextus est ab unitate proportionalis, & centũ myriades septimus in eodem eiusdem proportionis ordine ab unitate, constat numerum inde productum fore quinquagesimum secundum, ab unitate in eodem eiusdem proportionis ordine. Horum aũt duorum & quinquaginta octo, primi cum unitate primorum uocati sunt, octo secundi post primos secundorum, octo deinde tertij tertiorum, octo quarti quartorum, octo quinti quintorum, octo sexti sextorum. reliqui uero quatuor, septimorum uocabuntur: quorum ultimus est mille unitates septimorum numerorum. Constat igitur arenę dictæ multitudinē, quæ habeat magnitudinem æqualem sphæræ habenti diametrum centum myriadas myriadum stadiorum, minorē esse ꝙ mille unitates septimorũ numerorum. Cum itaq; ostensum sit, diametrum mundi minorem esse centum myriadib. myriadum, constat multitudinē arenæ habentis magnitudinem æqualem mundo, minorem esse mille unitatibus septimorum numerorum. quod quidem propositum fuerat. Quemadmodum autem probatum est, arenæ multitudinē, quæ fuerit æqualis mũdi, illi qui à plurimis Astrologis positus est, minorē esse mille unitatibus septimorũ numerorum: similiter ostēdetur, multitudinē arenę magnitudinē habentis æqualem sphæræ tãtæ, quantã Aristarchus supponit esse sphærã stellarum fixarum, esse minorem ꝙ mille myriades octauorũ numerorũ. Quoniã enim supponit, terrã habere proportionē illã ad mũdũ à nobis dictũ, quã habet dictus mũdus ad sphærã stellarũ fixarũ, quã Aristarchus supponit: & diametri sphęrarũ eãdem habent inter se proportionē: & ostensum est diametrũ mundi minorē esse diametro terræ, ꝙ decies milies: constat diametrũ sphęræ stellarũ fixarum minorē esse, ꝙ decies milies diametrũ mũdi. Quoniã uero sphæræ habēt inter se proportionem diametrorum suarũ triplicatã, manifestum est sphæram stellarum fixarũ quã Aristarchus ponit, minorē esse ꝙ decies milies decē milia mundos. Ostēsum uero est multitudinē arenę, habētis magnitudinē æqualem mũdo, minorē esse, ꝙ mille unitates septimorũ numerorum. Manifestum est igit, quod si fiat sphæra ex arena, tantã habens magnitudinē, quantã habere ponit Aristarchus sphęrã stellarum fixarũ, huius arenæ numerus minor erit eo numero qui producitur ex mille unitatib. septimorum numerorũ, multiplicatis per decē milia decies milies myriadas. Nam quoniam mille unitates septimorum numerorũ est quinquagesimus secundus ab unitate proportionalis, & decem milia decies milies myriades est tertiusdecimus ab unitate proportionalis in eodē eiusdem proportionis ordine sumptus, constat productum inde numerum fore sexagesimũquartũ ab unitate, proportionalem ex eodem eiusdem proportionis ordine: iste uero est octauorũ octauus, & quinq; myriades octauorũ numerorũ. Cõstat itaq; quod multitudo arenę magnitudinē habentis æqualem sphæræ stellarum fixarũ, quam Aristarchus posuit, minor est ꝙ mille myriades octauorũ numerorũ. Hæc aũt rex Gelon, ꝙ plurimis quidē qui in disciplinis uersati non sunt, non admodũ creditũ iri arbitror: illis uero qui disciplinis imbuti sunt, & circa distãtias & magnitudines terræ, & solis, & lunæ, totiusq; mundi sanam institutionē acceperunt, credibilia prorsus propter demonstrationem uidebuntur. Quare non nullos existimarim ad hæc inspicienda nullo pacto posse accommodari.

FINIT ARCHIMEDIS RATIO
de Arenæ dimensione.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑ

ΛΩΝΙΤΟΥ ΕΙΣ ΤΑ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ
καὶ κυλίνδρου, καὶ τὰ ἄλλα, ὑπομνήματα.

EVTOCII ASCALONITAE IN ARCHIMEDIS LIBROS DE SPHAERA ET

cylindro, atque alios quosdam, Commentaria, nunc primum & Græce & Latine in lucem edita.

Cum Cæs. Maiest. gratia & priuilegio, ad quinquennium.

BASILEAE,
Ioannes Heruagius excudi fecit.
An. MDXLIIII.

MAGNIFICO DOMINO SEVERINO *BONERO A BALITZ, IN CAMIENETZ* AC OGRODZENETZ HAEREDI, CASTELLANO BYERENSI, *Burgrauio Zuppario, ac magno Procuratori Cracouiensi, &c. Domino & patrono suo obseruandissimo, Thomas Venatorius sese commendat.*

OMnes, qui ad summos honestarum artium gradus usque ascendere student, ordinis cum primis rationem ut habeant, contendunt: quòd nimirũ contempta ordinis ratione, omnia passim confundi sit necesse. Non minus autem in literarum studijs, quàm in alijs rebus uniuersis, ipsa parens rerum, ordinẽ esse uoluit, Natura. Ut enim à summo tecto domum ædificare qui cœperit, neglecta fundamenti ratione, frustra & oleum, quod autem, & operam insumit: sic qui ueræ philosophiæ campos spaciosissimos ingressi, unius duntaxat agri floribus contenti, pedes sistunt, nec ipsam segetem ac messem integrè legerint, aut saltem apis in morem degustauerint, doctos inter uerè quomodo recenseri possint, non equidẽ uideo. Sed ad hæc gradatim, suspensisque interim pedibus concedendum esse, iampridem à maioribus nostris accepimus. Neque temere sibi quisquam docendi prouinciã usurpet hac in parte, quòd periculo non caret doctor. Non rarò enim arrogantia comitatur doctorem, sæpe etiam sui complacẽtia, Græcis φιλαυτία uocata. Quæ duo, maxime ubi doctoris animum occuparint, ipsum statim non tam periculo uanæ gloriæ, quàm ludibrio uulgi exponere consueuerunt. Discipulus etsi abiectus uideatur mundo, ipsum tamẽ quia humilitas animi commẽdat Deo, securè & extra periculum ambulat. Et quidem hæc omnia, ut ordinis decorum, siue ut Græci loquuntur, τὸ καλὸν καὶ τὸ πρέπον, à nostris studijs minime cupiam excludi, sed potius constantissimè seruandam esse nobis moderationem illam in decoro ordinis, quæ & ipsa à Græcis ob id uocatur εὐταξία. Et rectè profectò hæc ita esse à doctis censentur. In elementis enim, ubi ordinis ratio sibi minus constare contigerit, sequi uidemus in aëre fulmina, in terra commotiones, in mari inundationes: denique contempto ordine, experimur in urbibus & familijs seditiones, in corporibus ægritudines: & ut uno uerbo comprehendam multa, in animabus nostris regnabunt peccata. Cum tanta sit in rerum omnium natura, illa ordinis obseruatio, in rectis studijs absoluendis cur ordinis ratio à nobis conturbaretur? Conturbaretur autẽ, si secus quàm à fundamentis ad summa contenderemus. Neque enim sacrum illum omniũ disciplinarum circulũ absoluerit unquã, qui minutas aliqui fastidiẽs, summas tantum assequi conatur artes. Ad summa cõtemplanda, nisi per

gradus quoſdam, non admittitur animus. Senſiſſe hoc idem Plato uidetur, cum ueſtibulo Scholæ ſuæ inſcriberet, ἀγεωμέτρητος οὐδεὶς εἰσίτω. Qua utiq; ſentẽtia ſignificare uoluit, inutiles eſſe ad percipiendas liberales diſciplinas, qui nulla Muſices præſertim, & Geometriæ principia poſuiſſent. nempe quòd hæ diſciplinæ, imagines rerũ, quæ humanis ſaltem ſtudijs capi poſſunt, oculis mundi ſubijcere & poſſint & ualeant. Ipſa certè γεωμετρία mentem noſtram, ſuo ordine quàm longiſſimè tandem à rebus caducis abducit, ut iam non in terra infernè, ſed cœlo potius ſupernè, inhęrere cupiat, ac rebus ipſis delectari, quæ ut ſummè bona ſunt, ita nullam unquam permutationem admittũt. Quid quod magna pars Sacræ ſcripturæ obſcura nobis erit, niſi Geometrica proportione expendat ea pius lector. Templi Hieroſolymitani fabrica, nonne maxima cura & diligentia traditur? quæ omnia, niſi Geometrica proportione ſeruata, imparati & inculti uulgi cognitionem remorentur oportet. Præter alia, quanto ſtudio præcipit diuinus ſermo, de conſtruendis columnis? adeò ut omnia Geometrica ratione conſtarent, ſtylobatagmata, baſes quoq;, & ſpiræ: ſcapus deinde, ac plinthus ipſa qualis eſſe deberent, cum ipſis cymacijs, faſcijs, ſcotijs, ſtrijs, canaliculis, epiſtilijs, quæ omnia quàm longa & lata, quàm alta & profunda eſſent, per Geometricas rationes ſpiritus diuinus ſapientiſſimè commonſtrauit: quæ res animum hominis non tantum in admirationem, ſed etiam in cognitionem Opificis rerum, inducere equidem euidentiſſimè queant. Claruit in hiſce diſciplinis apud Syracuſas olim Archimedes, qui neſcias an doctior, an patriæ ſalutis fuerit amantior. Is quia ſcripſerat quædam, quæ acutiora cum eſſent, quàm ut rudes ſtatim capere poſſent, Eutocius Aſcalonita, homo ſua tempeſtate ut doctus, ita ingenio fœcũdus et fuit, & habitus eſt ab omnibus, ut iam nõ immerito de eo dixerit quidam, εὐτόκιος ὥσπερ ὄνομα αὐτῷ. Verè enim eſt fœcũdus in omnibus illis explanãdis, in quibus obſcurior alioqui uideri poterat Archimedes. Eius ſcripta uiri, nunquam antehac in lucẽ edita, ſub tui nominis potiſſimũ tutela publicare placuit: cũ quòd dignus tu quidem es, cuius uirtuti hæc quoq; laus accedat, ut nominis tui fama, per ſe proſectò clariſſima, acceſſione tanti ſcriptoris longè reddatur clarior: tũ quòd mei erga te, atq; adeò erga familiã tuã uniuerſam, ſynceri palàm argumẽtũ extaret amoris. Habes rationẽ huius factũ mei. Soleo enim nõ infrequẽter admirari, in magnis rebus obeundis prudentiã tuam, in periculis propulſandis animi fortitudinẽ, fidem in promiſſis, induſtriã & ingenij acrimoniã in conſilijs, in conficiundis autẽ negocijs celeritatẽ. Quæ cum uerè excellẽtes ſint in uno homine, uirtutes, niſi à doctiſsimo quopiã, pro dignitate explicari nõ poſſunt: eas in præſentia attigiſſe ſaltẽ, mihi uiſum eſt ſatis. Itaque uiue diu fœlix, æuo ſuperante Sibyllas, annisq; annoſum Neſtora uince. Vale. ex Norimberga, ad Calend. Ianuarij. Anno Salutis noſtræ MDXLIIII.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ, ΕΙΣ ΤΟ ΠΡΩΤΟΝ ΤΩΝ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου.

Εἰς τὰ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἀρχιμήδους οὐδένα τῶν πρὸ ἡμῶν ἀξίαν εὑρεῖν σύνταξιν καταβεβλημένον. καὶ κατανοήσας μὴ δὲ δυνάμενον τὸ θεωρημάτων τοῦτο παρεωρᾶσθαι, ἐπιστάσεως γὰρ ἀκριβοῦς, ὡς ἴσε, καὶ δυσεπιβόλου δεῖται φαντασίας, ὠρέχθην κατ' ἐμὴν δύναμιν σαφῶς ἐκθέσθαι τὰ ἐν αὐτῷ † θεωρήματα, προαχθεὶς μᾶλλον εἰς τοῦτο τῷ μηδένα πω θεῖναι εἰς ταύτην τὴν ὑπόθεσιν, ἢ διὰ τὴν δυσκολίαν ὀκνήσας, καὶ ἅμα τὸ σωκρατικὸν λογισάμενος, ὡς τοῦ θεοῦ συλλαμβάνοντος πάνυ εἰκὸς καὶ ἐπὶ τέλος ἡμᾶς τῆς σπουδῆς ἐλθεῖν. ἐκ τριῶν δὲ διανοηθείς, ὡς εἴ τι καὶ ἐπταισμένον διὰ νεότητα φθέγξομαι τοῦτο ὑπὸ τῆς σῆς περί τε τὴν ἄλλην φιλοσοφίαν ἐπιστημονικῆς θεωρίας, καὶ διαφερόντως περὶ τὰ μαθήματα ἐπανορθώσεως τεύξεται, ἀνέθηκά σοι κράτιστε φιλοσόφων ἀμμώνιε. πρέπον δ' ἂν σοι τῇ ἐμῇ σπουδῇ συνάρασθαι. καὶ εἰ μὲν ἀνεμιαῖον δόξει τὸ γράμμα, αὐτόθεν μὴ δὲ εἰς ἄλλον ἐλθεῖν συγχωρήσῃς, εἰ δὲ τοῦ σκοποῦ μὴ πάντη διαμαρτάνον, δήλωσον ἣν ἔχει περὶ αὐτοῦ γνώμην, ὡς εἴγε τῇ ὑμετέρᾳ κρίσει βεβαιωθῇ, πειράσομαι καὶ ἄλλο τυχὸν τῶν ἀρχιμηδείων συντάξεων ἑρμηνεῦσαι.

† δυσθεώρητα

ΕΙΣ ΤΟΥΣ ΟΡΟΥΣ.

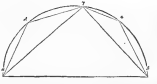
Προειπὼν τὰ μέλλοντα ἐκτίθεσθαι ὑπ' αὐτοῦ θεωρήματα, τὸ συνήθως πᾶσι γεωμέτραις ἐν τῇ ἐκθέσει τηρῶν, τάς τε ὀνομασίας αἷς αὐτὸς κατ' ἐξουσίαν ἐχρήσατο, καὶ τοὺς ὅρους τῶν ὑποθέσεων, καὶ αὐτὰς τὰς ὑποθέσεις διὰ τὴν ἀρχῆς τοῦ συγγράμματος διασαφῆσαι βούλεται. καὶ φησὶ πρῶτον εἶναι τινὰς ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλας γραμμάς, αἵ τινων τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰ πέρατα αὐτῶν εὐθειῶν ἢ πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτά εἰσιν, ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα. σαφὲς δὲ ἂν εἴη τὸ λεγόμενον, εἰ γνωσόμεθα τίνας καλεῖ τὰς ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλας γραμμάς. ἰστέον οὖν ὅτι καμπύλας γραμμὰς καλεῖ οὐχ ἁπλῶς τὰς κυκλικάς, ἢ κωνικάς, ἢ ἄλλως ἐχούσας τὴν συνέχειαν, ἀλλὰ πᾶσαν ἐν ἐπιπέδῳ γραμμὴν παρὰ τὴν εὐθεῖαν, καμπύλην ὀνομάζει, μίαν δὲ γραμμὴν ἐν ἐπιπέδῳ τὴν ὁποσοῦν συναπτομένην, ὥστε καὶ ἐξ εὐθειῶν σύγκειται * τὴν α β γ δ. ἀλλ' ἐπειδὴ ὡς καὶ ἀνωτέρω εἴρηται, καμπύλας γραμμὰς οὐ τὰς περιφερεῖς μόνον καλεῖ, ἀλλὰ καὶ τὰς ἐξ εὐθειῶν συγκειμένας, ἐκ δὲ τούτων κοινὴ ἐπὶ λοιπῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλων, ἐνδεχόμενον ἂν εἴη λαβεῖν ἐπί τινος ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλης γραμμῆς δύο τυχόντα σημεῖα, ὥστε



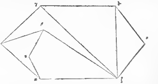
τὴν ἐπ' αὐτὰ ἐπιζευγνυμένην εὐθεῖαν, ἐπὶ μὲν τὰ ἕτερα μέρη πίπτειν τῆς γραμμῆς, ἐπ' αὐτὴν ἐφαρμόζειν. διό φησιν ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλην καλεῖν γραμμήν, ἐν ᾗ αἱ διὰ δύο ὁποιωνοῦν σημείων ἀγόμεναι εὐθεῖαι, ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη πίπτουσι τῆς γραμμῆς, ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ' αὐτῆς. ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μέρη οὐδὲ μία. ταῦτα δὲ καὶ αὐτὰ ἔξεστιν ἐπινοεῖν καὶ ἐπὶ ἐπιφανειῶν.

Εἶτα ἑξῆς ὀνομάζει τομέα στερεόν, καὶ ῥόμβον στερεόν, σαφῶς ἐμφανίζων τὴν ἔννοιαν τῶν ὀνομάτων. μετὰ δὲ ταῦτα αἰτήματα τινὰ λαμβάνειν ἀξιοῖ, χρησιμεύοντα αὐτῷ εἰς τὰς ἑξῆς ἀποδείξεις, καὶ ὄντα μὲν κατὰ τὴν τῆς αἰσθήσεως ὁμολογημένα, οὐδὲν δὲ ἧττον δυνατὰ καὶ ἀποδειχθῆναι ἔκ τε τῶν κοινῶν ἐννοιῶν, καὶ ἐκ τῶν δεδειγμένων ἐν τοῖς στοιχείοις. ἔστι δὲ πρῶτον αἰτημάτων τὸ τοιόνδε, πασῶν τῶν ταὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν. ἔστω γὰρ ἐν ἐπιπέδῳ εὐθεῖα μὲν τις πεπερασμένη ἡ α β, ἑτέρα δέ τις γραμμὴ ἡ α γ β, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσα τῇ α β. φησὶ δὲ δεῖ δέχεσθαι αὐτῷ τὴν α β ἐλάττονα εἶναι τῆς α γ β. λέγω οὖν, ὅτι τοῦτο ἀληθὲς ὑπετάσατο. εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς α γ β, τυχὸν σημεῖον τὸ γ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α γ, γ β. φανερὸν δή, ὅτι αἱ α γ, γ β τῆς α β μείζους εἰσί, πάλιν δὴ εἰλήφθωσαν ἐπὶ ταῖς α γ β γραμμαῖς ἄλλα τυ-

χόντα σημεῖα τὰ δ, ε. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, δγ, γε. ὁμοίως δὴ καὶ ἐνταῦθα δῆλον, ὅτι δύο μὲν αἱ αδ, δγ τῆς αγ μείζους εἰσί. δύο δὲ αἱ γε, εβ τῆς γβ. ὥστε αἱ αδ, δγ, γε, εβ πολλῷ μείζους εἰσὶ τῆς αβ. ὁμοίως δὴ κἂν ἄλλα σημεῖα λαβόντες μεταξὺ τῶν εἰλημμένων ἐπιζεύξωμεν ἐπὶ τὰ νῦν ληφθέντα, εὐθείας εὑρήσομεν αὐτὰς ἔτι μείζους τῆς αβ. καὶ τοῦτο συνεχῶς ποιοῦντες τὰς μᾶλλον συνεγγιζούσας τῇ αγβ γραμμῇ, εὐθείας ἀεὶ μείζους εὑρήσομεν. ὥστε ἐκ τούτου συμφανὲς ἐστιν, αὐτὴν τὴν γραμμὴν μείζονα εἶναι τῆς αβ. δυνατὸν ὄντος καὶ παρ' αὐτὸ τὸ σημεῖον ἐπιζευγνύντας εὐθείας λαβεῖν τῶν εὐθειῶν συγκειμένην τὴν οἷον αὐτὴν οὖσαν γραμμήν, μείζονα δεικνυμένην διὰ τῶν αὐτῶν τῆς αβ. οὐ γὰρ ἄτοπον ἐν ταῖς τῶν ὁμολογουμένων ἀποδείξεσι καὶ τοιαύτας ἐννοίας προλαβεῖν.



Μετὰ δὴ τοῦτο φησὶν, λαμβάνειν καὶ τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐκείνας ἀνίσους εἶναι, τὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας οὔσας, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εἰρημένον τρόπον. οὐ μόνον δὲ ἤρκεσεν εἰς τὸ ἀνίσους εἶναι τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας εἶναι, ἀλλὰ καὶ ὅταν ἡ ἑτέρα τὴν ἑτέραν, ἢ ὅλην περιλαμβάνῃ. ἢ μέρος μὲν περιλαμβάνῃ, μέρος δὲ καὶ κοινὸν ἔχῃ, καὶ μείζονα εἶναι τὴν περιλαμβάνουσαν τῆς περιλαμβανομένης. νενοήσθωσαν γοῦν πρὸς τὸ καὶ τοῦτο κατάδηλον γενέσθαι, ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμαὶ αἱ αβγδεζ, καὶ αηθζ, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι τὰ αζ. καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι. καὶ ἔτι περιλαμβανομένη ὅλη ἡ αηθζ ὑπὸ τῆς αβγδεζ γραμμῆς, καὶ τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐταῖς, τῆς αζ εὐθείας. φημὶ δὴ ὅτι καὶ ἄνισοι εἰσὶν αἱ προκείμεναι γραμμαί. καὶ μείζων ἡ περιλαμβάνουσα. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βθ, γζ, δζ. ἐπεὶ οὖν ἐὰν νοηθῇ ἐπιζευγνυμένη ἡ θα, ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ αβθ, ἐντὸς συνιστάμεναι εἰσὶ αἱ αη, ηθ. καὶ ἐλάττους εἰσὶ αἱ αη, ηθ τῶν αβ, βθ. κοινὴ προσκείσθω ἡ θζ. αἱ ἄρα αη, ηθ, θζ ἐλάττους εἰσὶ τῶν αβ, βθ, θζ. ἀλλ' αἱ βθ, θζ ἐλάττους εἰσὶ τῶν βγ, γζ. ἐντὸς γὰρ πάλιν ἐπὶ μιᾶς τοῦ βγζ συνεστάμεναι εἰσί. πολλῷ ἄρα αἱ αβ, βγ, γζ τῶν αη, ηθ, θζ, μείζους εἰσίν. ἀλλὰ τῆς γζ μείζονες αἱ γδ, δζ. τῆς δὲ δζ, αἱ δε, εζ. ἔτι πολλῷ ἄρα αἱ αβγδεζ μείζους εἰσὶ τῶν αηθζ.



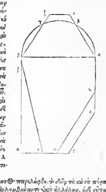
Σαφηνείας δὲ χάριν ὑποκείσθωσαν καὶ ἕτεραι γραμμαὶ ὁμοίως ταῖς προειρημέναις, ὡς αἱ αβγδε, αζηθε. λέγω ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ περιλαμβάνουσα. νενοήσθωσαν γὰρ ἐκβεβλημέναι αἱ αζ, ηθ, ἐπὶ τὸ κλ. ἐπεὶ οὖν πάλιν δύο αἱ ζλ, λη μείζους εἰσὶ τῆς ζη, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ αζ, ηθ. αἱ ἄρα αλ, λθ μείζους εἰσὶ τῶν αζ, ζη, ηθ. ἀλλ' αἱ αλ, λθ, ἐλάττους τῆς αβθ, πολλῷ ἄρα αἱ αβθ μείζους τῆς αζηθ.



κοινὴ

κοινὴ προσκείσθω ἡ θκ. μείζους ἄρα αἱ αβθκ τῶν αζηθκ. ἀλλ' αἱ βθκ ἐλάσσους τῶν βγκ. πολλῷ ἄρα μείζους αἱ αβγκ τῶν αζηθκ. κοινὴ προσκείσθω ἡ κε. αἱ ἄρα αβγκε μείζους τῶν αζηθκε. ἀλλ' αἱ γκε ἐλάσσους τῶν γδε. πολλῷ ἄρα αἱ αβγδε μείζους εἰσὶ τῶν αζηθκε.

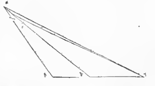
Καὶ περιφέρειαι δὲ ὦσιν, ἤτοι αἱ περιλαμβάνουσαι, ἢ αἱ περιλαμβανόμεναι, ἢ καὶ ἀμφότεραι, τὸ αὐτὸ χρὴ νοεῖν. συνεχῶν γὰρ σημείων ἐπ' αὐτῶν λαμβανομένων, καὶ ἐπὶ αὐτὰ ἐπιζευγνυμένων εὐθειῶν, ληφθήσονται γραμμαὶ ἐξ εὐθειῶν συγκείμεναι, ἐφ' ὧν ἁρμόσει ἡ προειρημένη ἀπόδειξις τῶν ἐξ εὐθειῶν συγκειμένων, οἷον αὐτῶν γινομένων τῶν προτεθεισῶν, διὰ τὸ καὶ πᾶσαν γραμμὴν ἐκ συνεχείας σημείων τὴν ὕπαρξιν ἔχουσαν † νοεῖσθαι. ὅτι δὲ εἰκότως τὴν ἀνισότητα τῶν γραμμῶν οὐ μόνον τῷ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας εἶναι ἐχαρακτήρισεν, ἀλλὰ καὶ † ἔθηκεν τὸ καὶ δεῖν περιλαμβάνεσθαι τὴν ἑτέραν ὑπὸ τῆς ἑτέρας, καὶ τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης εὐθείας. τούτου γὰρ μὴ ὄντος, οὐδὲ τὸ ἀνίσους εἶναι τὰς γραμμὰς, πάντη ἀληθὲς ὑπῆρχεν, ὡς ἔστι κατανοῆσαι ἐκ τῶν ὑποκειμένων καταγραφῶν. ἡ γὰρ αβγδ γραμμὴ, καὶ ἡ αεζδ, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι εἰσὶ, καὶ ἄδηλον ὁποτέρα αὐτῶν μείζων ἐστί. δυνατὸν γὰρ καὶ ἴσας εἶναι. δυνατὸν δὲ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλην ἑτέραν νοεῖν, καὶ τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσας ἀμφοτέρας, κατ' ἐναντίαν δὲ θέσιν ἀλλήλαις κειμένας, ὡς ὁποτέρα τῶν εἰρημένων τῇ ακθκδ. καὶ οὕτως γὰρ ἄδηλος, ἥτε ἰσότης καὶ ἀνισότης αὐτῶν. διὸ καλῶς πρόκειται, τὸ δεῖν ἢ ὅλην τὴν ἑτέραν ὑπὸ τῆς ἑτέρας περιλαμβάνεσθαι, καὶ τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης εὐθείας. ἢ τινὰ μὲν περιλαμβάνεσθαι, τινὰ δὲ καὶ κοινὰ ἔχειν, ὡς ἐπὶ τῶν ακθκδ, καὶ αλμνξδ. ἐπὶ γὰρ τούτων τινὰ μὲν περιλαμβάνεται, τινὰ δὲ κοινά ἐστι, ὡς τὰ αλ, μν.



† νοεῖσθαι

† ἐπέθηκεν

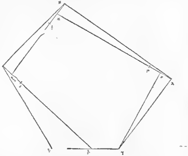
Δεόντως δὲ πάνυ κἀκεῖνο πρὸς κρίσιν τῆς ἀνισότητος παρελήφθη, τὸ δεῖν τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχειν τὰς γραμμάς. τούτου γὰρ μὴ ὄντος, οὐδ' ἂν περιλαμβάνοιντο ὑπ' ἀλλήλων, οὐδὲ οὕτως ἄνισοι εἰσὶ, ἀλλ' ἐνίοτε ἴσαι, ἢ καὶ ἡ περιλαμβανομένη μείζων. ὅπερ ἵνα σαφῶς γένηται, νενοήσθωσαν ἐν ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ αβγ, ἀμβλεῖαν τὴν πρὸς τῷ β γωνίαν περιέχουσαι, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς βγ τυχὸν σημεῖον τὸ δ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, αγ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ αδ τῆς αβ, κείσθω τῇ αβ ἴση ἡ δε καὶ τετμήσθω ἡ αε δίχα κατὰ τὸ ζ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζε. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ αζε τῆς αγ μείζους εἰσὶ, ἴση δὲ ἡ αζ τῇ ζε. καὶ αἱ εζγ ἄρα τῆς αγ μείζους εἰσὶ, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ αβ, δε. αἱ ἄρα δζγ τῶν βαγ μείζους εἰσίν. ὥστε μιᾶς γραμμῆς νενευμένης τῆς βαγ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλης. ἑτέρας δὲ τῆς δζγ περιλαμβανομένης ὑπὸ τῆς ἑτέρας, μὴ ἐχούσης δὲ τὰ αὐτὰ πέρατα, οὐ μόνον ὅτι οὐ μείζων ἡ περιλαμβάνουσα, ἀλλὰ καὶ ἐλάττων ἐδείχθη.



Καὶ ἐπὶ γραμμῶν δὲ ἐκ πλειόνων εὐθειῶν συγκειμένων τὸ αὐτὸ ἔστι θεωρῆσαι. νενοήσθωσαν γὰρ ἐν ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, καὶ τυχὸν σημεῖον τὸ δ. καὶ ἐπεζευγμένη ἡ αδ. πάλιν δὴ κείσθω τῇ αβ ἴση ἡ δε. καὶ ἡ εα δίχα τετμήσθω τῷ ζ. καὶ τῇ αδ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ αη, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζη. καὶ κείσθω τῇ αη ἴση ἡ ζθ. καὶ πάλιν δίχα τετμήσθω ἡ θκ κατὰ τὸ

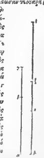
α,

κ, καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ ζκ ἤχθω ἡ κλ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ κλ. καὶ πάλιν τῇ κλ ἴση ἡ κμ. καὶ δίχα τετμήσθω ἡ μλ τῷ ν. καὶ πάλιν πρὸς ὀρθὰς τῇ κδ ἤχθω ἡ λε. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ νγ. φανερὸν οὖν διὰ τὰ προδεδειγμένα, ὅτι μείζων ἡ μὲν δζ τῆς αβ. ἡ δὲ ζκ τῆς εκ, ἡ δὲ κν τῆς κλ. ἡ δὲ νγ τῆς λγ. ὥστε καὶ ὅλη ἡ γραμμὴ ἡ δζκνγ μείζων τῆς αβκλγ. καλῶς ἄρα προσετέθη τὸ τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχειν τῶν ἀνίσων. τὰ αὐτὰ δὲ δυνατὸν ἐπινοοῦντα * καὶ λαμβανόμεναι ἐπιφάνειαι τὰ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἐπιπέδοις.



ΕΙΣ ΤΟ Β ΘΕΩΡΗΜΑ.

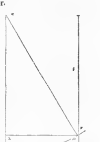
Τὸ δὲ αγ ἑαυτῷ ἐπισυντιθέμενον ὑπερέξει τοῦ δ, διπλάσιον ὡς τοῦ αβ, ἤτοι ἐπιμόριον, ἢ ἐπιμερὴς τυγχάνοντος τοῦ δ. εἰ δὲ εἴη τὸ αβ τοῦ δ, ἤτοι πολλαπλάσιον ἢ πολλαπλασιμόριον, ἢ καὶ πολλαπλασιεπιμερὲς, ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τοῦ αβ, ἴσου τῷ δ τοῦ βγ, τὸ λοιπὸν τὸ γα ὑπερέξει τοῦ δ. ὥστε μηκέτι πολλαπλασιάζεσθαι αὐτὸ, ἀλλὰ αὐτόθεν δεῖν τῷ αγ ἴσον ἀποτίθεσθαι τὸ αθ, καὶ τὴν αὐτὴν ἀπόδειξιν ἁρμόζειν. καὶ συνθέντι τὸ ζκ πρὸς ζε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αβ πρὸς βγ. ὅτι γὰρ ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τρίτον πρὸς τέταρτον. καὶ συνθέντι ὁ αὐτὸς λόγος ἀκολουθεῖ. δειχθήσεται οὕτως. ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη τὰ αβ, βγ, δε, εζ. τὸ δὲ αβ πρὸς τὸ βγ μείζονα λόγον ἐχέτω, ἤπερ τὸ δε πρὸς τὸ εζ. λέγω ὅτι καὶ συνθέντι τὸ αγ πρὸς τὸ γβ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς τὸ ζε. γεγονέτω γὰρ ὡς τὸ γβ πρὸς τὸ βα, οὕτως τὸ ζε πρὸς τὸ ζθ. ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ αβ πρὸς τὸ βγ, οὕτως τὸ θζ πρὸς τὸ ζε. μείζονα δὲ λόγον ἔχει τὸ αβ πρὸς τὸ βγ, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ καὶ τὸ ζθ ἄρα πρὸς ζε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ. μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ζθ τοῦ εδ, καὶ ὅλον τὸ θε τοῦ δζ. καὶ διὰ τοῦτο τὸ θε πρὸς εζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς ζε. ἀλλ' ὡς τὸ θε πρὸς εζ, τὸ αγ πρὸς γβ. διὰ τὸ συνθέντι, καὶ τὸ αγ ἄρα πρὸς γβ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς εζ. ἀλλὰ δὴ τὸ αγ πρὸς γβ μείζονα λόγον ἐχέτω, ἤπερ τὸ δζ πρὸς ζε. λέγω ὅτι καὶ διελόντι τὸ αβ πρὸς βγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ. πάλιν γὰρ ὁμοίως ἐὰν ποιήσωμεν, ὡς τὸ βγ πρὸς γα, οὕτως τὸ ζε, καὶ τὸ θε μεῖζον τοῦ δζ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ εζ, ἔσται μεῖζον τὸ θζ τοῦ δε. καὶ διὰ τοῦτο τὸ θζ πρὸς ζε, τουτέστι τὸ αβ πρὸς βγ, διὰ τὸ διελόντι μείζονα λόγον ἕξει, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ. φανερὸν δὲ διὰ τῶν ὁμοίων, ὅτι κἂν τὸ αβ πρὸς τὸ βγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ, καὶ συνθέντι, καὶ πάλιν διελόντι ὁ αὐτὸς λόγος ἔσται. ἐκ δὲ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ τοῦ ἀναστρέψαντος λόγος ἐμφανής ἐστιν. ἐχέτω γὰρ τὸ αγ πρὸς βγ μείζονα λόγον, ἤπερ τὸ δζ πρὸς ζε. λέγω ὅτι καὶ ἀναστρέψαντι τὸ γα πρὸς αβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς δε. ἐπεὶ γὰρ τὸ αγ πρὸς γβ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς ζε, καὶ διελόντι τὸ αβ πρὸς βγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ,



αὐα-

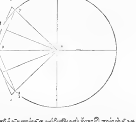
ὥστε πάλιν τὸ β γ πρὸς β α ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ζ ε πρὸς ε δ, καὶ συνθέντι τὸ γ α πρὸς α β ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δ ζ πρὸς δ ε.

ΕΙΣ ΤΟ Γ.



Καὶ ἀπὸ τοῦ κ, τῇ θ ἴση κατήχθω ἡ κ μ, δυνατὸν γὰρ τοῦτο. καὶ ἐκβληθείσης τῆς κ λ ὡς ἐπὶ τὸ χ, καὶ τεθείσης τῆς θ ἴσης τῇ κ χ. καὶ κέντρῳ τῷ κ, διαστήματι δὲ τῷ κ χ κύκλου γραφέντος ὡς τοῦ χ μ ν. ἔστι γὰρ ἡ κ μ ἴση τῇ κ χ, τουτέστι τῇ θ.

Η ἄρα ν γ πολυγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου καὶ ἀρτιοπλεύρου πλευρά. τῆς γὰρ μιᾶς ὀρθῆς οὔσης τεταρτημορίου βεβηκυίας, καὶ τῆς τομῆς κατὰ ἀρτίαν διαίρεσιν ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γινομένης, δῆλον ὅτι καὶ ἡ τοῦ τεταρτημορίου περιφέρεια εἰς ἀρτιάκις ἀρτίους τὸν ἀριθμὸν ἴσας διαιρεθήσεται περιφερείας. ὥστε καὶ ἡ ὑποτείνουσα εὐθεῖα μίαν τῶν περιφερειῶν, πολυγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου καὶ ἀρτιοπλεύρου πλευρά. ὥστε καὶ ἡ ο π πολυγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου πλευρά. ἐὰν γὰρ τῇ ὑπὸ ξ κ ν γωνίᾳ ἴσην ποιήσαντες τὴν ὑπὸ π κ δ, ἀπὸ τοῦ π ἐπὶ τὸ δ ἐπιζεύξωμεν καὶ προσεκβάλωμεν ἄχρι τῆς κ θ ἴσην τῇ ὑπὸ π κ δ, ἔσται ἴση ἡ π θ τῇ π ο, ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου. ἐπεὶ γὰρ ἡ ξ κ ἴση ἐστὶ τῇ κ δ, κοινὴ δὲ ἡ κ π καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, καὶ βάσις ἄρα ἡ ξ π τῇ π δ ἴση ἐστί. καὶ ἡ ὑπὸ π ξ κ ὀρθὴ οὖσα, τῇ ὑπὸ π δ κ. ὥστε ἐφάπτεται ἡ δ π. ἐπεὶ οὖν αἱ πρὸς τὸ δ ὀρθαί εἰσιν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ π κ δ, δ κ θ ἴσαι, καὶ ἡ πρὸς ταῖς ἴσαις κοινὴ ἡ δ κ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ π δ τῇ θ δ. ἀλλ' ἡ ξ π τῇ π δ ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ θ π ἄρα τῇ π ο ἐστὶν ἴση, καὶ πᾶσαι αἱ ὁμοίως ἐφαπτόμεναι, ὥστε ἡ θ π πολυγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου καὶ ἀρτιοπλεύρου πλευρὰ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου. ὅτι δὲ καὶ ὁμοίου τῷ ἐγγραφομένῳ αὐτόθεν δῆλον. ἴσης γὰρ οὔσης τῆς μὲν θ κ τῇ κ π, τῆς δὲ γ κ τῇ κ ν, παράλληλος γάρ ἐστιν ἡ ο π τῇ γ ν, διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ π θ τῇ ν κ. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ γ ν κ τῇ ὑπὸ ο π θ ἴση ἐστί. καὶ διὰ τοῦτο ὅμοιον ἐστὶ τὸ περιγεγραμμένον τῷ ἐγγεγραμμένῳ.



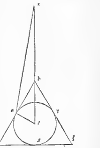
Η ἄρα μ κ πρὸς κ λ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ κ πρὸς κ τ. μείζονος γὰρ οὔσης τῆς πρὸς τὸ κ γωνίας τῆς ὑπὸ γ κ τ, ἐὰν τῇ ὑπὸ γ κ τ ἴσην συστησόμεθα τὴν ὑπὸ λ κ ρ τοῦ ρ μεταξὺ τῶν λ μ νοουμένου, τὸ λ κ ρ τρίγωνον τῷ γ κ τ ὅμοιον ἐστίν, ὡς ἡ ρ κ πρὸς κ λ, οὕτως ἡ γ κ πρὸς κ τ. ὥστε καὶ ἡ μ κ πρὸς κ λ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ κ πρὸς κ τ.

ΕΙΣ ΤΟ Ϛ.

Διὰ δὴ τοῦτο ἔλασσόν ἐστι τὸ περιγραφόμενον τοῦ συναμφοτέρου. ἐπεὶ γὰρ τὸ περιγραφόμενον πρὸς τὸ ἐγγραφόμενον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ συναμφότερον πρὸς τὸν κύκλον, πολλῷ ἄρα τὸ περιγραφόμενον πρὸς τὸν κύκλον. ὥστε τὸ περιγραφόμενον ἔλασσόν ἐστι τοῦ συναμφοτέρου. καὶ κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ κύκλου, λοιπὰ τὰ περιλείμματα ἐλάσσονά ἐστι τοῦ β χωρίου.

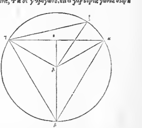
ΕΙΣ ΤΟ Η.

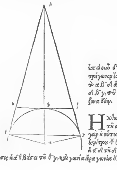
Αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὰς α, β, γ ἐπιζευγνύμεναι κάθετοί εἰσιν ἐπ' αὐτάς. νενοήσθω γὰρ χωρὶς ὁ κῶνος. καὶ ἔστω κορυφὴ μὲν αὐτοῦ τὸ κ, κέντρον δὲ τῆς βάσεως αὐτοῦ τὸ θ. καὶ ἀπὸ τοῦ θ ἐπὶ τὸ α ἐπεζεύχθω ἡ θα. ἀπὸ δὲ τοῦ κ, ἡ κα. λέγω ὅτι ἡ κα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν δε. ἐπεὶ γὰρ ἡ κθ κάθετός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα, ὥστε καὶ τὸ κθα τρίγωνον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὴν βάσιν, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων τῇ θα πρὸς ὀρθάς, ἥτις ἐστὶ ἐν τῷ τοῦ ἐπιπέδῳ ἡ δε. ἡ ἄρα δε τῷ κθα ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ὥστε καὶ πρὸς τὴν κα. ὁμοίως δὲ δειχθήσονται καὶ αἱ ἐπὶ τὰ γ, β ἐπιζευγνύμεναι ἀπὸ τῆς κορυφῆς κάθετοι οὖσαι ἐπὶ τὰς δζ, εζ. ἐπιστῆσαι δὲ χρή, ὅτι ἐπὶ μὲν τοῦ πρὸ τούτου καλῶς πρόκειται, τὸ δεῖν πάντως τὴν ἐγγραφομένην πυραμίδα ἰσόπλευρον ἔχειν τὴν βάσιν. ὁ καλῶς γὰρ αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὰς τῆς βάσεως πλευρὰς ἴσαι ἠδύναντο εἶναι. ἐπὶ δὲ τοῦ προκειμένου οὐ προσέθηκεν τὸ εἶναι ἰσόπλευρον τὴν βάσιν, διὰ τὸ δύνασθαι, καὶ ὁποία τις ᾖ, τὸ αὐτὸ ἀκολουθεῖν.



ΕΙΣ ΤΟ Θ.

Μείζονα ἄρα ἐστὶ τὰ αβδ, βδγ τρίγωνα, τοῦ αδγ τριγώνου. ἐπεὶ γὰρ στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ πρὸς τὸ δ, αἱ ὑπὸ αδβ, βδγ μείζους εἰσὶ τῆς ὑπὸ αδγ. καὶ ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἐπιζεύξωμεν, ὡς τὴν δε κάθετον γινομένην ἐπὶ τὴν αγ, ἔσται ἡ ὑπὸ αδβ μείζων τῆς ὑπὸ αδε. συνεστάτω οὖν τῇ ὑπὸ αδβ ἴση ἡ ὑπὸ αδζ. καὶ τεθείσης τῆς δζ ἴσης τῇ δγ, ἐπεζεύχθω ἡ αζ.





ἐπεὶ οὖν δύο δυσὶν ἴσαι, ἀλλὰ καὶ γωνία γωνίᾳ, καὶ τὸ αβδ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ αδζ τριγώνῳ, μείζονι ὄντι τοῦ αδε· καὶ τὸ αβδ ἄρα τρίγωνον τοῦ αδε μεῖζόν ἐστιν. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ δβγ τοῦ δεγ. δύο ἄρα τὰ αδβ, δβγ, τοῦ αδβ μείζονά ἐστιν.

ΕΙΣ ΤΟ Ι.

Ἤχθω γὰρ ἡ κζ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, καὶ παράλληλος ἔστω τῇ αγ, δίχα τμηθείσης τῆς αβγ περιφερείας κατὰ τὸ β. ὅτι γὰρ ἡ οὕτως ἀγομένη παράλληλός ἐστι τῇ αγ, δειχθήσεται ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ θ, ἐπιζευχθεισῶν τῶν θα, θδ, θγ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ αθ τῇ θγ, καὶ κοινὴ ἡ θδ, δύο δυσὶν ἴσαι, ἀλλὰ καὶ βάσις ἡ αθ βάσει τῇ θγ, καὶ γωνία ἄρα γωνίᾳ ἐστὶν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ κβδ, βδζ γωνίαι ὀρθαί.

θαι. ἀπὸ γὰρ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπεζεύχθω ἡ θ β. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ δ η β, λοιπῇ τῇ ὑπὸ δ ζ β ἐστὶν ἴση. καὶ διὰ τοῦτο ἡ η δ τῇ δ ζ ἴση ἐστίν. ὥστε παράλληλός ἐστιν ἡ ζ η τῇ α γ.

Περιγραφόντων δὲ ἡ πολύγωνα περὶ τὸ τμῆμα, ὁμοίως δίχα τεμνομένων τῶν περιλειπομένων περιφερειῶν, καὶ ἀγομένων ἐφαπτομένων, λείψομεν τινὰ ἀποτμήματα ἐλάσσονα τοῦ θ χωρίου. ἐκεῖ μὲν τῶν ἐγγραφομένων δέδεικται ἐν τῇ στοιχειώσει, ὅτι τὰ ἐγγραφόμενα τρίγωνα εἰς τμήματα μείζονα ἐστὶν, ἢ τὸ ἥμισυ τῶν καθ' ἑαυτὰ τμημάτων. καὶ διὰ τοῦτο δυνατὸν ἦν, τέμνοντας τὰς περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντας εὐθείας, καταλείπειν τινὰ ἀποτμήματα ἐλάσσονα τοῦ δοθέντος χωρίου. ἐπὶ δὲ τῆς περιγραφῆς, οὐκέτι. τοῦτο δέδεικται ἐν τῇ στοιχειώσει. ἐπεὶ οὖν ἐν τῷ προκειμένῳ τοῦτό φησι, ὃ καὶ ἐστὶν αὐτὸ συλλογίσασθαι διὰ τοῦ ε θεωρήματος, δεικτέον ὅτι ἡ ἐφαπτομένη ἀφαιρεῖ τρίγωνον, μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ περιλείμματος, οἷον ὡς ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς, ὅτι τὸ η δ ζ τρίγωνον μεῖζον ἐστὶν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ περιλείμματος τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν α δ, δ γ, καὶ τῆς α β γ περιφερείας. τῶν γὰρ αὐτῶν ἐπεζευγμένων, ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ δ β ζ, μείζων ἐστὶν ἡ δ ζ τῆς β ζ. ἡ δὲ ζ β τῇ ζ γ ἴση. ἐφάπτεται γὰρ ἑκατέρα αὐτῶν. καὶ ἡ δ ζ ἄρα τῆς ζ γ μείζων, ὥστε καὶ τὸ δ β ζ τρίγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ β ζ γ τριγώνου. ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσίν. πολλῷ ἄρα τοῦ β ζ γ περιλείμματος μεῖζόν ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ τὸ δ β η τοῦ β η α μεῖζον. ὅλον ἄρα τὸ δ η ζ μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ α δ γ περιλείμματος.

ΕΙΣ ΤΟ ΙΓ.

Νοείσθω δὴ εἰς τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον, καὶ περὶ τὸν α κύκλον περιγεγραμμένον, ὅμοιον τῷ περὶ τὸν β περιγεγραμμένῳ. ὅπως μὲν οὖν ἐστὶν εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πολύγωνον ἐγγράψαι, ὅμοιον τῷ ἑτέρῳ ἐγγεγραμμένῳ, δῆλον. εἴρηται δὲ καὶ πάππῳ εἰς τὸ ὑπόμνημα τῶν στοιχείων, περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πολύγωνον περιγράψαι ὅμοιον τῷ περὶ ἕτερον κύκλον περιγεγραμμένῳ, οὐκέτι ὁμοίως ἔχομεν εἰρημένον, ὅπερ νῦν λεκτέον. τῷ γὰρ εἰς τὸν β κύκλον ἐγγεγραμμένῳ, ὅμοιον εἰς τὸν α ἐγγεγράφθω, καὶ περὶ αὐτὸν τὸν α ὅμοιον τῷ εἰς αὐτὸν, ὡς ἐν τῷ γ θεωρήματι. καὶ ἔσται ὅμοιον καὶ τῷ περὶ τὸν β περιγεγραμμένῳ. καὶ ἐπεὶ ὅμοια ἐστὶ τὰ εὐθύγραμμα τὰ περὶ τοὺς α, β κύκλους περιγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ὅνπερ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει. τὸ τοίνυν, ἐπὶ μὲν τῶν ἐγγεγραμμένων δέδεικται ἐν τῇ στοιχειώσει, ἐπὶ δὲ τῶν περιγεγραμμένων οὐκέτι. δειχθήσεται δὲ οὕτως. νενοήσθωσαν γὰρ χωρὶς τὰ περιγεγραμμένα καὶ ἐγγεγραμμένα εὐθύγραμμα. καὶ ἀπὸ τῶν κέντρων τῶν κύκλων ἐπεζευγμέναι αἱ κ ε, κ μ, λ θ, λ ν. φανερὸν δὴ ὅτι αἱ κ ε, λ θ ἐκ τῶν κέντρων * τῶν περὶ τὰ περιγεγραμμένα πολύγωνα κύκλων. καὶ πρὸς ἀλλήλας * δυνάμει ὥστε τὰ περιγεγραμμένα πολύγωνα. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ κ ε μ, λ θ ν ἡμίσεαι * τῶν ἐν τοῖς πολυγώνοις



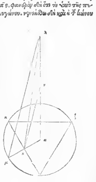
ὁμοίων ὄντων τῶν πολυγώνων, δῆλον ὅτι καὶ αὗται ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ αἱ πρὸς τοῖς μ, ν ὀρθαί. ἰσογώνια ἄρα τὰ κ ε μ, λ θ ν τρίγωνα. καὶ ἔσται ὡς ἡ κ ε πρὸς λ θ, ἡ κ μ πρὸς λ ν. ὥστε καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν, ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ κ ε πρὸς τὸ ἀπὸ θ λ, οὕτως τὰ περιγεγραμμένα πρὸς ἄλληλα. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κ μ πρὸς τὸ ἀπὸ λ ν, οὕτως τὰ περιγεγραμμένα πρὸς ἄλληλα.

Τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ κ τ δ τρίγωνον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον, τὸ περὶ τὸν β κύκλον, ὅνπερ τὸ κ τ δ τρίγωνον. ἐπεὶ γὰρ τὰ περὶ τοὺς α, β κύκλους εὐθύγραμμα πρὸς ἄλληλα ἐστὶν ὡς αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει, τουτέστιν ἡ τ δ πρὸς η δυνάμει, τουτέστιν ἡ τ δ πρὸς ρ ζ μήκει, τουτέστιν ὡς τὸ κ τ δ τρίγωνον πρὸς τὸ ζ ρ λ, ἴσον δὲ τὸ κ τ δ τῷ περὶ τὸν α κύκλον περιγεγραμμένῳ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ κ τ δ πρὸς τὸ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον, οὕτως τὸ αὐτὸ κ τ δ τρίγωνον πρὸς τὸ ζ ρ λ τρίγωνον. ἐναλλὰξ ἄρα ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ πρίσμα πρὸς τὸν κύλινδρον, ἤπερ τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν β κύκλον πολύγωνον πρὸς τὸν β κύκλον, ὅπερ ἄτοπον, ἐὰν ποιήσωμεν ὡς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πρίσματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, οὕτως τὸ ἐγγεγραμ

μένον εἰς τὸν β κύκλον πρὸς ἄλλο τι, ἔσται πρὸς ἔλασσον τοῦ β κύκλου, πρὸς ὃ μείζονα λόγον ἔχει τὸ ἐγγεγραμμένον, ἤπερ πρὸς τὸν κύκλον. τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος, πρὸς τὴν τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνειαν, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὸν κύκλον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἔλασσον, ὅπερ ἄτοπον.

ΕΙΣ ΤΟ ΙΔ.

Η δὲ γ πρὸς τὴν δ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον. ἡ γὰρ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετος ἀγομένη ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου, πρὸς τὴν ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου κάθετον ἀγομένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου. νοείσθω γὰρ χωρὶς ἡ ἐν τῷ ῥητῷ καταγραφή, καὶ εἰς τὸν α κύκλον ἐγγεγραμμένον πολύγωνον τὸ ζθ κ. καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ α, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου τὴν θ κ, κάθετος ἤχθω ἡ α η. φανερὸν δὴ ὅτι τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου, καὶ τῆς α η διπλάσιόν ἐστι τοῦ πολυγώνου. νενοήσθω δὴ καὶ ἡ τοῦ κώνου κορυφὴ τὸ λ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὸ η ἐπεζεύγμένη ἡ λ η κάθετος γίνεται, ἐπὶ τὴν θ κ, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ λήμματι τοῦ η θεωρήματος. ἐπεὶ οὖν ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον. ἐστι δὲ καὶ ἰσοσκελὴς ὁ κῶνος, αἱ ἀπὸ τοῦ λ ἐφ᾽ ἑκάστην τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου ἀγόμεναι κάθετοι, ἴσαι εἰσὶ τῇ λ η. ἑκάστη γὰρ αὐτῶν δύναται τὸ ἀπὸ τοῦ ἄξονος καὶ τῆς ἴσης τῇ α η. διὰ δὲ τοῦτο καὶ τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς λ η, διπλάσιόν ἐστι τῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος. τὸ γὰρ ὑφ᾽ ἑκάστης πλευρᾶς, καὶ τῆς ἀπὸ τῆς κορυφῆς καθέτου ἐπ᾽ αὐτὴν ἀγομένης ἴσης τῇ λ η, διπλάσιον ἐστὶ τοῦ καθ᾽ ἑαυτὴν τριγώνου. ὥστε ἐστὶν ὡς ἡ α η πρὸς η λ, τὸ πολύγωνον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος, κοινοῦ ὕψους τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου λαμβανομένου. ἐκθείσης δὴ τῆς η ν παρὰ τὴν μ λ, ἔσται ὡς ἡ α μ πρὸς μ λ, ἡ α η πρὸς η ν. ἡ δὲ α η πρὸς η ν μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὴν η λ. μείζων γὰρ ἡ λ η τῆς η ν. καὶ ἡ α μ ἄρα πρὸς μ λ, τουτέστιν ἡ γ πρὸς τὴν δ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ α η πρὸς η λ, τουτέστιν ἤπερ τὸ πολύγωνον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος.



ΕΙΣ ΤΟ ΙϚ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν β α, α η, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν β δ ζ, καὶ τῷ ὑπὸ τῆς α δ, καὶ συναμφοτέρου τῆς δ ζ α η, διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν δ ζ τῇ α η. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ δ ζ τῇ α η, ἔστιν ὡς ἡ β α πρὸς α η, ἡ β δ πρὸς δ ζ. καὶ διὰ τοῦτο τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων τῶν β α, δ ζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων τῶν β δ, α η. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν β α, δ ζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ β δ, δ ζ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν α δ, δ ζ, διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ β βιβλίου τῆς στοιχειώσεως. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν β δ, α η ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ β δ, δ ζ, καὶ τῷ ὑπὸ α δ, δ ζ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ὑπὸ δ α, α η, ὅπερ ἐστὶ τὸ ὑπὸ β α, α η, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ β δ, δ ζ. καὶ τῷ ὑπὸ α δ, δ ζ, καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ α δ, α η.

ΕΙΣ ΤΟ ΚΓ.

Το δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου μετρείσθω ὑπὸ τετράδος. ὑπὸ τετράδος βούλεται μετρεῖσθαι τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου διὰ τὸ τοῦ κύκλου κινουμένου περὶ τὴν α γ διάμετρον. πάσας τὰς πλευρὰς κατὰ κωνικῶν φέρεσθαι ἐπιφανειῶν χρησίμως ἐσομένου αὐτῷ ἐν τοῖς ἑξῆς τοῦ τοιούτου, μὴ γὰρ ὑπὸ τετράδος μετρουμένων τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, κἂν ἀρτιόπλευρον ᾖ, οὐ πάσας δυνατὸν κατὰ κωνικῶν φέρεσθαι ἐπιφανειῶν, ὡς κατανοῆσαι ἔνεστιν ἐπὶ τῶν τοῦ ἑξαγώνου πλευρῶν. δύο γὰρ τὰς ἀπεναντίον αὐτοῦ παραλλήλους πλευρὰς κατὰ κυλινδρικῆς φέρεσθαι ἐπιφανείας συμβαίνει, ὅπερ ὡς ἔρηται οὐ χρήσιμον αὐτῷ πρὸς τὰ ἑξῆς.

ΕΙΣ

ΕΙΣ ΤΟ ΚΘ.

Η δὲ κθ, ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τοῦ αβγδ κύκλου. ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ χ ἐπιζεύξωμεν ἐπὶ τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἐφάπτεται ἡ κξ τοῦ αβγδ κύκλου νοούμενον τὸ μ. ὁμοίως δὲ καὶ τὴν χκ, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ χκ τῇ χζ. εἰσὶ δὲ καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τῷ μ. ἴση γὰρ καὶ ἡ κμ τῇ μζ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ζχ τῇ χθ ἴση. παράλληλος ἄρα ἡ χμ τῇ κθ. καὶ διὰ τοῦτο ἔσται ὡς ἡ θζ πρὸς ζχ, οὕτως ἡ κθ πρὸς χμ. διπλῆ δὲ ἡ θζ τῆς χζ. διπλῆ ἄρα καὶ ἡ κθ τῆς χμ ἐκ τοῦ κέντρου οὔσης τοῦ αβγδ κύκλου.

ΕΙΣ ΤΟ Λ.

Ἔχει δὲ καὶ ἡ διάμετρος τοῦ μ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ελ πρὸς ακ. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῶσιν αἱ ηλ, γκ, ὀρθῶν γωνιῶν τῶν πρὸς τοῖς κ, λ. καὶ παραλλήλου τῆς ακ τῇ λε. ἰσογώνιον γὰρ τὸ ηλε τρίγωνον, τῷ γκα τριγώνῳ. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ ηλ πρὸς λε, οὕτως ἡ γκ πρὸς κα. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ηλ πρὸς λε, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ περιγεγραμμένου γωνίας, πρὸς τὴν τοῦ περὶ τὸ περιγεγραμμένον κύκλου διάμετρον. ὡς δὲ ἡ γκ πρὸς κα, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου γωνίας πρὸς τὴν τοῦ αβγδ κύκλου διάμετρον. ὡς ἄρα πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ περιγεγραμμένου γωνίας, πρὸς τὴν τοῦ περὶ αὐτὸ κύκλου διάμετρον, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου γωνίας, πρὸς τὴν τοῦ αβγδ κύκλου διάμετρον. ὡς δὲ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν, οὕτως ἡ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν. ἐπεὶ καὶ ὡς ἡ με πρὸς ελ, οὕτως ἡ μα πρὸς ακ. καὶ δι' ἴσου ἄρα, ὡς πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι πρὸς τὴν ελ, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι πρὸς τὴν ακ, ἀλλ' ὡς πᾶσαι πρὸς τὴν πλευρὰν τὴν ελ, οὕτως τὸ ὑπὸ πασῶν καὶ τῆς ελ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ πρὸς τὸ ἀπὸ ελ, τῆς ελ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. ὡς δὲ πᾶσαι πρὸς τὴν ακ, οὕτως τὸ ὑπὸ πασῶν καὶ τῆς ακ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ακ. κοινοῦ ὕψους πάλιν λαμβανομένης τῆς ακ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ, πρὸς τὸ ἀπὸ ελ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν, πρὸς τὸ ἀπὸ ακ. καὶ ὡς ἄρα αὐτὴ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ πρὸς τὴν ελ, οὕτως ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν πρὸς τὴν ακ. ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ, πρὸς τὴν ἐκ κέντρου τοῦ ν, οὕτως ἡ ελ πρὸς ακ. καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια, ὡς ἡ διάμετρος τοῦ μ πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ν, ἡ ελ πρὸς ακ.

ΕΙΣ ΤΟ ΛΒ.

Αἱ δὲ ι, θ εἰλημμέναι, ὥστε τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχειν, τὴν κ τῆς ι, καὶ τὴν ι τῆς θ, καὶ τὴν θ τῆς η. τὸ προκείμενόν ἐστι, δύο δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν κατὰ ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν, ὅταν τὸ δεῖ τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχειν. ποιεῖται δὲ τοῦτο οὕτως. ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, γκ ἄνισοι. καὶ ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τῆς αβ ἴσης τῇ γκ, τῆς βδ, ἡ λοιπὴ ἡ αδ τετμήσθω τριχῇ κατὰ τὰ ε, ζ. καὶ τῇ μὲν εβ ἴση κείσθω ἡ η, τῇ δὲ βζ ἴση ἡ θ. ἔσονται δὴ αἱ θ, ι, η ποιοῦσαι τὸ προκείμενον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἡ αβ πρὸς τὴν γκ μείζονα ἢ τριπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ αβ πρὸς τὴν η. γεγονέτω γὰρ ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν η, οὕτως ἡ η πρὸς ἄλλην τινὰ τὴν λ. καὶ ἐπεὶ ᾧ μέρει ἑαυτῆς ἡ αβ ὑπερέχει τῆς η, τούτῳ καὶ ἡ η ἑαυτῆς ὑπερέχει τῆς λ. τὸ δὲ αὐτὸ μέρος τῆς αβ μεῖζόν ἐστι τοῦ μέρους τῆς η. μείζονι ἄρα ὑπερέχει ἡ αβ τῆς η, ἤπερ ἡ η τῆς λ. τῷ δὲ αὐτῷ ὑπερέχει ἡ αβ τῆς η, καὶ ἡ η τῆς θ. μείζονι ἄρα ὑπερέχει ἡ η τῆς θ, ἤπερ ἡ η τῆς λ, ὥστε μείζων ἡ λ τῆς θ. ἐὰν δὴ πάλιν ποιήσωμεν ὡς τὴν η πρὸς τὴν λ, οὕτως τὴν λ πρὸς μ, πολλῷ μείζων ἔσται τῆς γκ. καὶ ἐπεὶ τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ αβ, η, λ, μ, ἑξῆς ἀνάλογον εἰσίν, ἡ αβ πρὸς τὴν μ, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ αβ πρὸς η. ὥστε ἡ αβ πρὸς τὴν γκ μείζονα ἢ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν η.



ΕΙΣ ΤΟ ΛΕ.

Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ εθ, ἐν τῷ εζ, γδ, κα δέδεικται ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ελ, κθ. ἐν γὰρ τῷ δευτέρῳ καὶ εἰκοστῷ θεωρήματι δέδεικται, ὅτι αἱ εζ, γδ, κα, πρὸς τὴν θκ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν, ὃν ἡ λε πρὸς εθ. ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. τῷ δὲ ὑπὸ ελ, κθ ἔλασσόν ἐστι τὸ ἀπὸ θα. καὶ γὰρ τὸ ὑπὸ λθ, θκ, ἴσον ὄντος τῷ ἀπὸ θα. ὡς ἐστι δῆλον ἐπιζευγνυμένης τῆς αλ. καὶ διὰ τὸ ὅμοιον γινόμενον τοῦ θακ τριγώνου τῷ θαλ. ἔστι γὰρ ὡς ἡ λθ πρὸς θα, ἡ αθ πρὸς θκ. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς μέσης.

ΕΙΣ ΤΟ ΛΖ.

Ἕξει δὲ καὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τῷ αβγ κύκλῳ. ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ δ ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι ἐπὶ τὰ θ, ε, λ ἴσαι ἔσονται, διὰ τὸ καὶ τὰς ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυμένας εὐθείας καθέτους εἶναι ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας. καὶ αὐτὰς δὲ τὰς ἐφαπτομένας δίχα τέμνεσθαι πρὸς τῇ ἁφῇ. ὅταν δὲ τοῦτο ᾖ, μείζων ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας. ἐπεὶ γὰρ ἡ μζ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας φέρεται τῆς κολούρου ἐπιφανείας καθήσεται, ἡ ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗτος ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς τε ζμ, καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρου τῆς ζη καὶ τῆς μν. ὁμοίως δὴ καὶ τῇ ὑπὸ τῆς μα γινομένης κολούρου κώνου ἐπιφανείᾳ, ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗτος ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς μα καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρου τῆς αβ καὶ μν. καὶ ἔστιν ἡ μὲν ζμ μείζων τῆς μα, ἡ δὲ ζη τῆς αβ. μείζων ἄρα καὶ ἡ μέση τῆς μέσης, ὥστε καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας. ἡ ἄρα ὑπὸ ζμ, νη μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ μα, νβ ἐπιφανείας.

ΕΙΣ ΤΟ ΛΗ.

Ἡ ἄρα τοῦ σχήματος τοῦ κζλ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς. ἀσαφέστερον δοκεῖ συνῆχθαι τὸ εἰρημένον. λέγοις δ' ἂν σαφῶς οὕτως. ἐπειδὴ ὁ ν κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν δύναται τὸ ὑπὸ μθ, ζη, τὸ δὲ ὑπὸ μθ, ζη, μεῖζον τοῦ ὑπὸ γδ, δξ. ἡ μὲν γὰρ μθ ἴση δέδεικται τῇ γδ. ἡ δὲ ζη μείζων τῆς δξ. ὁ ν ἄρα κύκλος μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ γδ, δξ. τὸ δὲ ὑπὸ γδ, δξ, ἴσον τῷ ἀπὸ δα. ὁ ἄρα ν κύκλος, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου, μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ δα.

ΕΙΣ ΤΟ ΛΘ.

Ἀλλὰ τὰ εἰρημένα χωρία πρὸς ἄλληλα ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς εκ πλευρᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αλ πλευρᾶς. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῇ ἡ δλκ, παραλλήλου οὔσης τῆς εκ τῇ αλ, ἐστὶν ὡς ἡ εκ πρὸς αλ. ὡς δὲ ἡ εδ πρὸς δα, ἡ εζ πρὸς αγ. καὶ ὡς ἄρα ἡ εκ πρὸς αλ, ἡ εζ πρὸς αγ. καὶ ἡμίσεια τῆς εζ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς αγ. ὁμοίως δὴ καὶ ἐπὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας τῶν πολυγώνων δειχθήσεται, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον πρὸς ἀλλήλας, ὃν ἡ εκ πρὸς αλ. καὶ ὡς ἄρα ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα. ὡς ἄρα ἡ εκ πρὸς αλ, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ περιγεγραμμένου γωνίας μετὰ τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως τοῦ μείζονος τμήματος, πρὸς πάσας τὰς ἐπιζευγνυούσας μετὰ τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς εκ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αλ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς εκ καὶ πασῶν, πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς αλ καὶ πασῶν. τὰ γὰρ ὅμοια εὐθύγραμμα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. καὶ τοῦ μὲν τῆς εκ πρὸς αλ λόγου διπλασίων ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς εκ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αλ. τῶν δὲ ἐπιζευγνυουσῶν τὰς τοῦ μείζονος, πρὸς τὰς ἐπιζευγνυούσας τὰς τοῦ ἐλάσσονος, διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ὑπὸ τῆς εκ, καὶ πασῶν, πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς αλ καὶ πασῶν. ὅμοια γὰρ καὶ ταῦτα, διὰ τὸ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχειν.

Καὶ ἔστιν ὡς ἡ εκ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, οὕτως ἡ αλ πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν αλ κάθετον ἠγμένην. ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ εὐθεῖα, ἔσται ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἐπ' ἀμφοτέρας τὰς εκ, αλ. καὶ ἔσται ὡς ἡ ελ πρὸς δα, τουτέστιν ἡ εκ πρὸς αλ, ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν αλ κάθετον.

Ἐδείχθη δὲ ὡς ἡ εκ πρὸς αλ, οὕτως ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ κύκλου, πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν κύκλου. ἐπεὶ δέδεικται ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, οὕτως ὁ μ κύκλος πρὸς τὸν ν. τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν.

ΕΙΣ ΤΟ Μ.

Ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων διπλάσιός ἐστι τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου. ἐδείχθη γὰρ ἐν τῷ πρὸ τούτου, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ ἴσου τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου, πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ ἴσου τῇ ἐπιφανείᾳ

ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου, οὕτως ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου. οἱ δὲ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐκ τῶν κέντρων. καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἄρα πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

ΕΙΣ ΤΟ ΜΒ.

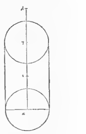
Τὸ ἄρα περιγεγραμμένον στερεὸν πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ στερεὸς τομεὺς πρὸς τὸν θ κῶνον. εἰ γὰρ τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα ἢ τριπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ β πρὸς ζ, ἡ δὲ δ πρὸς ε μείζονα ἢ τριπλασίονα, τὸ ἄρα περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ δ πρὸς ε. ἡ δὲ δ πρὸς ε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον. καὶ τὸ περιγεγραμμένον ἄρα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον.

Εὐτοκίου ἀσκαλωνίτου ὑπόμνημα εἰς τὸ πρῶτον τῶν ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἐκδόσεως, παραναγνωσθείσης τῷ μιλησίῳ μηχανικῷ ἰσιδώρῳ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ.

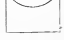
ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ

ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΟ Β. ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ καὶ κυλίνδρου.

Σαφῶς ἡμῖν τῶν ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ θεωρημάτων γεγραμμένων, ἀκόλουθος καὶ ἡ περὶ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐν τοῖς δευτέροις θεωρήμασι σπουδή. φησὶ δὲ πρῶτον ἐν τῷ α θεωρήματι. εἰλήφθω τοῦ δοθέντος κώνου, ἢ κυλίνδρου ἡμιόλιος κύλινδρος. τοῦτο δὲ διχῶς δυνατὸν ἐστὶν εἰπεῖν ἤτοι τῆς βάσεως τῆς αὐτῆς σωζομένης ἐν ἀμφοτέροις, ἢ τοῦ ὕψους. καὶ ἵνα σαφέστερον γένηται τὸ λεγόμενον, νενοήσθω κῶνος, ἢ κύλινδρος, οὗ βάσις μὲν ὁ α κύκλος, ὕψος δὲ ἡ α γ. καὶ δέον ἔστω αὐτοῦ ἡμιόλιον κύλινδρον εὑρεῖν. ὑποκείσθω δὲ πρότερον ὁ α γ κύλινδρος, καὶ ἐκβεβλήσθω τὸ α γ ὕψος τοῦ κυλίνδρου, καὶ κείσθω τῆς α γ ἡμίσεια ἡ γ δ, ἡ ἄρα α δ ἡμιόλια ἐστὶ τῆς α γ. ἐὰν δὴ νοήσωμεν κύλινδρον, βάσιν μὲν ἔχοντα τὸν α κύκλον, ὕψος δὲ τὴν α δ εὐθεῖαν, ἡμιόλιος ἔσται τοῦ προτεθέντος τοῦ α γ. οἱ γὰρ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ὡς τὰ ὕψη. Εἰ δὲ κῶνος εἴη ὁ α γ, τμηθείσης τῆς α γ δίχα ὡς κατὰ τὸ ε. ἐὰν πάλιν νοηθῇ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν α κύκλον, ὕψος δὲ τὴν α ε, ἔσται ἡμιόλιος τοῦ α γ. ὁ γὰρ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν α κύκλον, ὕψος δὲ τὴν α γ εὐθεῖαν, τοῦ μὲν α γ κώνου τριπλάσιός ἐστι, τοῦ δὲ α ε κυλίνδρου διπλάσιος. ὥστε δῆλον, ὅτι καὶ ὁ α ε κύλινδρος ἡμιόλιός ἐστι τοῦ α γ κώνου. ἕως μὲν οὖν τῆς αὐτῆς βάσεως σωζομένης, ἔν τε τῷ προτεθέντι,

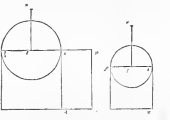




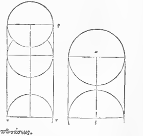


καὶ ἐν τῷ λαμβανομένῳ γενήσεται τὸ πρόβλημα. γίνεται δὲ καὶ τῆς βάσεως διαφόρου τυγχανούσης, τοῦ δὲ ἄξονος τοῦ αὐτοῦ μένοντος τὸ αὐτὸ ποιεῖν. ἔστω γὰρ πάλιν κῶνος ἢ κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ ζ η κύκλος, ὕψος δὲ ἡ θ κ εὐθεῖα. οὗ δέον ἔστω ἡμιόλιον κύλινδρον εὑρεῖν, ὕψος ἔχοντα ἴσον τῇ θ κ. ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ζ η διαμέτρου τοῦ κύκλου τετράγωνον τὸ ζ λ, καὶ προσεκβληθείσης τῆς ζ η, κείσθω αὐτῆς ἡμίσεια ἡ η μ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ζ ν παραλληλ-

παραλληλόγραμμον. τὸ ἄρα ζν ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ ζλ, καὶ ἡ μζ τῆς ζκ. συνεστάτω δὴ τῷ ζν παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον τὸ ξπ. καὶ περὶ διάμετρον μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τὴν ξο κύκλος περιγεγράφθω. ἔσται δὴ ὁ ξο ἡμιόλιος τοῦ ζκ. οἱ γὰρ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. καὶ ἐὰν πάλιν νοηθῇ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν ξο κύκλον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ θκ, ἔσται ἡμιόλιος τοῦ κυλίνδρου οὗ βάσις μὲν ὁ ζκ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ θκ. εἰ δὲ κῶνος εἴη, ὁμοίως τὰ αὐτὰ ποιήσαντες, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ζν παραλληλογράμμου ἴσον συστησάμενοι τετράγωνον, ὡς τὸ ξπ. καὶ περὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ τὴν ξο κύκλον γράψαντες, νοήσομεν ἀπ' αὐτοῦ κύλινδρον ὕψος ἔχοντα τὴν θκ. ἕξομεν αὐτὸν ἡμιόλιον τοῦ προτεθέντος κώνου. ἐπεὶ γὰρ τὸ ζν παραλληλόγραμμον τοῦ ξπ τετραγώνου τριπλάσιον, τοῦ δὲ ζλ ἡμιόλιον, τὸ ζλ τοῦ ξπ ἔσται διπλάσιον. καὶ διὰ τοῦτο καὶ ὁ κύκλος τοῦ κύκλου διπλάσιος, καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ κυλίνδρου. ἀλλ' ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὴν ζκ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν θκ, τριπλάσιός ἐστι τοῦ περὶ τὴν αὐτὴν βάσιν, καὶ ὕψος τὸ



αὐτὸ κώνου. ὥστε καὶ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν ξο κύκλον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ θκ, ἡμιόλιός ἐστι τοῦ προκειμένου κώνου. εἰ δέοι μήτε τὸν ἄξονα τὸν αὐτὸν εἶναι, μήτε τὴν βάσιν, γενήσεται τὸ πρόβλημα πάλιν διχῶς. ἢ γὰρ τὴν βάσιν ἕξει ἴσην τῇ δοθείσῃ, ἢ τὸν ἄξονα ὁ ποριζόμενος κύλινδρος. ἔστω γὰρ πρότερον ἡ βάσις δεδομένη, ὡς ὁ ξο κύκλος. καὶ δέον ἔστω κύλινδρον εὑρεῖν ἡμιόλιον τοῦ δοθέντος κώνου, ἢ κυλίνδρου ἀπὸ βάσεως τῆς ξο, εἰλήφθω ὡς προείρηται τοῦ δοθέντος κώνου, ἢ κυλίνδρου ἡμιόλιος κύλινδρος, βάσιν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ προτεθέντι ὁ φυ. καὶ γεγονέτω ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ξο, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς υ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ φυ πρὸς τὴν ρσ. ἔσται ἄρα ὁ κύλινδρος ὁ ἀπὸ τῆς ξο βάσεως ὕψος ἔχων τὴν ρσ, ἴσος τῷ φυ. ἀντιπεπόνθασι γὰρ αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπίταγμα. εἰ δὲ μὴ ἡ βάσις ἡ δεδομένη, ἀλλ' ὁ ἄξων τῷ αὐτῷ λόγῳ πορισθέντος τοῦ φυ, γενήσεται τὰ τῆς προτάσεως.



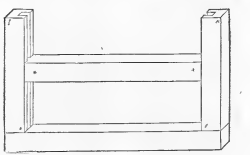
ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ Α.

Τούτου ληφθέντος, ἐπεὶ διὰ ἀναλύσεως αὐτοῦ προέβη τὰ τοῦ προβλήματος, λήξασης τῆς ἀναλύσεως εἰς τὸ δεῖν δύο δοθεισῶν δύο μέσας ἀνάλογον προσευρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, φησὶν ἐν τῇ συνθέσει εὑρήσθωσαν. τὴν δὲ εὕρεσιν τούτων ὑπ' αὐτοῦ μὲν γεγραμμένην, οὐδὲ ὅλως εὑρίσκομεν. πολλῶν δὲ κλεινῶν ἀνδρῶν γραφαῖς ἐντετυχήκαμεν, τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐπαγγελλομέναις, ὧν τὴν Εὐδόξου τοῦ Κνιδίου παρῃτησάμεθα γράφειν. ἐπειδή φησὶ μὲν ἐν προοιμίοις διὰ καμπύλων γραμμῶν αὐτὴν ηὑρηκέναι. ἐν δὲ τῇ ἀποδείξει πρὸς τὸ μὴ κεχρῆσθαι καμπύλαις γραμμαῖς, ἀλλὰ καὶ διῃρημένην ἀναλογίαν εὑρὼν, ὡς συνεχεῖ χρῆται, ὅπερ ἦν ἄτοπον ὑπονοῆσαι. τί λέγω περὶ Εὐδόξου,

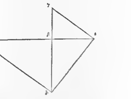
δόξῃ, ἀλλὰ περὶ τῶν καὶ μετρίως περὶ γεωμετρίαν ἀναστρεφομένων. ἵνα δὲ ἡ τῶν εἰς ἡμᾶς ἐληλυθότων ἀνδρῶν ἔννοια ἐμφανὴς γένηται, ὁ ἑκάστου τῆς εὑρέσεως τρόπος καὶ ἐνταῦθα γραφήσεται.

ΩΣ ΠΛΑΤΩΝ.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις. ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὰ δ, ε, καὶ κατεσκευάσθω ὀρθὴ γωνία ἡ ὑπὸ ζηθ. καὶ ἐν ἑνὶ σκέλει οἷον τῷ ζη, κινείσθω κανὼν ὁ κλ ἐν σωλῆνί τινι ὄντι ἐν τῷ ζη, οὕτως ὥστε παράλληλον αὐτὸν διαμένειν τῷ ηθ. ἔσται δὲ τοῦτο, ἐὰν καὶ ἕτερον κανόνιον νοηθῇ συμφυὲς τῷ θη, παράλληλον δὲ τῷ ζη, ὡς τὸ θμ. σωληνισθεισῶν γὰρ τῶν ἄνωθεν ἐπιφανειῶν τῶν ζη, θμ σωλῆσι πελεκινοειδέσι, καὶ τύλων συμφυῶν γενομένων τῷ κλ, εἰς τοὺς εἰρημένους σωλῆνας, ἔσται ἡ κίνησις τοῦ κλ παράλληλος ἀεὶ τῷ ηθ. τούτων οὖν κατεσκευασμένων, κείσθω τὸ ἓν σκέλος τῆς γωνίας



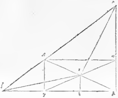
τυχὸν τὸ ηθ, ψαῦον τοῦ γ, καὶ μεταφερέσθω ἥτε γωνία καὶ ὁ κλ κανὼν ἐπὶ τοσοῦτον, ἄχρις ἂν τὸ μὲν η σημεῖον ἐπὶ τῆς βδ εὐθείας ᾖ, τοῦ ηθ σκέλους ψαύοντος τοῦ γ. ὁ δὲ κλ κανὼν κατὰ μὲν τὸ κ ψαύῃ τῆς βε εὐθείας, κατὰ δὲ τὸ λοιπὸν μέρος τοῦ α. ὥστε εἶναι ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς καταγραφῆς, τὴν μὲν ὀρθὴν γωνίαν θέσιν ἔχουσαν, ὡς τὴν ὑπὸ γδε. τὸν δὲ κλ κανόνα θέσιν ἔχειν, οἵαν ἔχει ἡ εα. τούτων γὰρ γενομένων ἔσται τὸ προκείμενον. ὀρθῶν γὰρ οὐσῶν τῶν πρὸς τοῖς δ, ε, ἔστιν ὡς ἡ γβ πρὸς βδ, ἡ δβ πρὸς βε, καὶ ἡ εβ πρὸς βα.



ΩΣ ΗΡΩΝ ΕΝ ΜΗΧΑΝΙΚΑΙΣ ΕΙΣΑΓΩΓΑΙΣ, καὶ ἐν τοῖς βελοποιικοῖς.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ. ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. κείσθωσαν ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν πρὸς τῷ β, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ βδ παραλ-

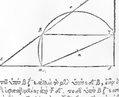
λληλόγραμμον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ε γ, β δ. φανερὸν δὴ, ὅτι ἴσαι οὖσαι δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας. ὁ γὰρ περὶ μίαν αὐτῶν γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν περάτων τῆς ἑτέρας, διὰ τὸ ὀρθογώνιον εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ δ γ, δ α ἐπὶ τὰ ζ, η, καὶ νοείσθω κανόνιον ὡς τὸ ζ β η, κινούμενον περί τινα τύλον, μένοντα πρὸς τῷ β, καὶ κινείσθω ἕως ἀπὸ τέμοι ἴσας τὰς ἀπὸ τοῦ ε, τουτέστι τὰς ε η, ε ζ. καὶ νοείσθω ἀποτεμὸν, καὶ θέσιν ἔχον τὴν ζ β η, ἴσων ὡς εἴρηται γινομένων τῶν ε η, ε ζ. ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὴν γ δ κάθετος ἡ ε θ, δίχα δὴ τέμνει. δῆλον ὅτι τὴν γ δ. ἐπεὶ οὖν δίχα τέμνεται ἡ γ δ κατὰ τὸ θ, καὶ πρόσκειται ἡ γ ζ, τὸ ὑπὸ δ ζ γ μετὰ τοῦ ἀπὸ γ θ, ἴσον ἐστὶ τῷ



ἀπὸ θ ζ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ε θ. τὸ ἄρα ὑπὸ δ ζ γ μετὰ τῶν ἀπὸ γ θ, θ ε, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ζ θ, θ ε. καὶ ἔστι τοῖς μὲν ἀπὸ γ θ, θ ε, ἴσον τὸ ἀπὸ γ ε. τοῖς δὲ ἀπὸ ζ θ, θ ε, ἴσον τὸ ἀπὸ ε ζ. τὸ ἄρα ὑπὸ δ ζ γ μετὰ τοῦ ἀπὸ γ ε, ἴσον τῷ ἀπὸ ε ζ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ δ η α μετὰ τοῦ ἀπὸ α ε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ε η. καί ἐστιν ἴση ἡ μὲν α ε τῇ ε γ, ἡ δὲ η ε τῇ ε ζ. καὶ τὸ ὑπὸ δ ζ γ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ δ η α. ἐὰν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσι. ἔστιν ἄρα ὡς ζ δ πρὸς δ η, οὕτως ἡ α η πρὸς γ ζ. ἀλλ' ὡς ἡ ζ δ πρὸς δ η, οὕτως ἡ ζ γ πρὸς γ β, καὶ ἡ β α πρὸς α η. τριγώνου γὰρ τοῦ ζ δ η παρὰ μίαν μὲν τὴν δ η, ἦκται ἡ γ β. παρὰ δὲ τὴν δ ζ ἡ α β. ὡς ἄρα ἡ β α πρὸς α η, οὕτως ἡ α η πρὸς γ ζ, καὶ ἡ γ ζ πρὸς γ β. τῶν ἄρα α β, β γ, μέσαι ἀνάλογόν εἰσι αἱ α η, γ ζ, ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

ΩΣ ΦΙΛΩΝ Ο ΒΥΖΑΝΤΙΟΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ α β, β γ, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν, κείσθωσαν, ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν πρὸς τῷ β. καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς α γ, γεγράφθω περὶ αὐτὴν ἡμικύκλιον τὸ α β ε γ, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν, τῇ μὲν β α, ἡ α δ. τῇ δὲ β γ ἡ γ ζ. καὶ παρακείσθω κανὼν κινούμενος πρὸς τὸ β, τέμνων τὰς α δ, γ ζ. καὶ κεκινήσθω περὶ τὸ β, ἄχρις ἂν ἡ ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὸ δ ἴση γένηται τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὸ ζ, τουτέστι τῇ μεταξὺ τῆς τε περιφερείας τοῦ κύκλου καὶ τῆς γ ζ. νενοήσθω οὖν ἔχον τὸ κανόνιον θέσιν, οἵαν ἔχει ἡ δ β ε ζ, ἴσης οὔσης ὡς εἴρηται τῆς δ β τῇ ε ζ. λέγω ὅτι αἱ α δ, γ ζ μέσαι ἀνάλογόν εἰσι τῶν α β, β γ. νενοήσθωσαν γὰρ ἐκβεβλημέναι αἱ δ α, ζ γ, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ θ. φανερὸν δὴ ὅτι παραλλήλων οὐσῶν τῶν β α, ζ θ, ἡ πρὸς τὸ θ γωνία ὀρθή ἐστι. καὶ ὁ α ε γ κύκλος ἀναπληρούμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ θ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ



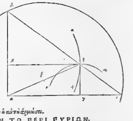
δ β τῇ ε ζ, καὶ τὸ ὑπὸ ε δ β ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ β ζ ε. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ε δ β, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ θ δ α. ἑκάτερον γὰρ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἀπὸ τοῦ δ. τὸ δὲ ὑπὸ β ζ ε ἴσον τῷ ὑπὸ θ ζ γ. ἑκάτερον γὰρ ὁμοίως ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἀπὸ τοῦ ζ. ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ θ δ α ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ θ ζ γ. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ δ θ πρὸς θ ζ, οὕτως ἡ γ ζ πρὸς δ α. ἀλλ' ὡς ἡ θ δ πρὸς θ ζ, οὕτως ἥ τε β γ πρὸς γ ζ, καὶ ἡ δ α πρὸς α β. τριγώνου γὰρ τοῦ δ θ ζ, παρὰ μὲν τὴν δ θ, ἦκται ἡ β γ, παρὰ δὲ τὴν θ ζ ἡ β α. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ β γ πρὸς ζ γ, ἡ γ ζ πρὸς δ α, ἡ δ α πρὸς α β, ὅπερ προέκειτο δεῖξαι.

Ἴσ τον

ἰστέον δέ, ὅτι ἡ τοιαύτη κατασκευὴ σχεδόν ἡ αὐτή ἐστι τῇ ὑπὸ Ἥρωνος κατασκευῆς, καὶ αἱ περιβαλλόμεναι πλευραὶ αἱ δα, θγ, καὶ ὁ περὶ τὸ β κινούμενος κανών. ταύτῃ δὲ μόνον διαφέρει, ὅτι ἐκεῖ μὲν μέχρι τοσούτου ἐκινοῦμεν περὶ τὸ β τὸν κανόνα, ἄχρις ἂν αἱ ἀπὸ τῆς διχοτομίας τῆς αγ, τουτέστι τοῦ κ, ἴσαι ὑπ' αὐτοῦ ἀποτέμνονται πρὸς τὰς θδ, θζ προσπιπτούσας, ὡς αἱ κδ, κζ, ἐνταῦθα δὲ ἄχρις ἂν ἡ δβ ἴση γένηται τῇ εζ. ἐφ' ἑκατέρας δὲ κατασκευῆς τὸ αὐτὸ ἀκολουθεῖ. τὸ δὲ νῦν εἰρημένον πρὸς χρῆσιν εὐθετώτερον. τὰς γὰρ δβ, εζ ἴσας τηρεῖν ἐνδέχεται διηρημένου τοῦ δζ κανόνος εἰς ἴσα καὶ συνεχῆ. πολὺ γὰρ εὐκολώτερον τοῦ κέντρου διαπειράζειν τὰς ἀπὸ τοῦ κ ἴσας πρὸς τὰ δ, ζ.

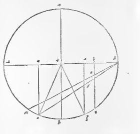
ΩΣ ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν, αἱ αβ, γ, ὀρθὴν περιέχουσαι γωνίαν τὴν πρὸς τῷ α, κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ αγ, κύκλου περιφέρεια γεγράφθω ἡ κθλ. καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ γ, καὶ διαστήματι τῷ αβ κύκλου περιφέρεια γεγράφθω ἡ μθν. καὶ τεμνέτω τὴν κθλ κατὰ τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θα, θβ, θγ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ αγ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ θα. τετμήσθω δίχα ἡ θα τῷ ξ, καὶ κέντρῳ τῷ ξ γεγράφθω κύκλος τέμνων τὰς αβ, αγ ἐκβληθείσας κατὰ τὰ δ, ε. ὥστε μέντοι τὰ δ, ε ἐπ' εὐθείας εἶναι τῷ θ, ὅπερ ἂν γένοιτο κανονίου κινουμένου περὶ τὸ θ, τέμνοντος τὰς αδ, αε. καὶ παραγομένου ἐπὶ τοσοῦτον ἄχρις ἂν αἱ ἀπὸ τοῦ ξ ἐπὶ τὰ δ, ε ἴσαι γίνωνται. τούτου γὰρ γενομένου ἔσται τὸ ζητούμενον. ἡ γὰρ αὐτὴ κατασκευή ἐστι τῇ τε ὑπὸ Ἥρωνος καὶ Φίλωνος γεγραμμένῃ. καὶ δῆλον ὅτι καὶ ἡ ἀπόδειξις ἡ αὐτὴ ἁρμόσει.



ΩΣ ΔΙΟΚΛΗΣ ΕΝ ΤΩ ΠΕΡΙ ΠΥΡΙΩΝ.

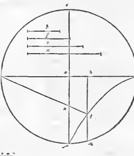
Ἐν κύκλῳ ἤχθωσαν δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς αἱ αβ, γδ, καὶ δύο περιφέρειαι ἴσαι ἀπειλήφθωσαν ἐφ' ἑκάτερα τοῦ β αἱ εβ, βζ. καὶ διὰ τοῦ ζ παράλληλος τῇ αβ ἤχθω ἡ ζη. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δε. λέγω ὅτι τῆς γη, ηθ δύο μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ζη, ηδ. ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ ε τῇ αβ παράλληλος ἡ εκ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ εκ τῇ ζη, ἡ δὲ κγ τῇ ηδ. ἔσται γὰρ δῆλον ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὰ ε, ζ ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν. ἴσαι γὰρ γίνονται αἱ ὑπὸ γλε, ζλδ. καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς κ, η. καὶ πάντα ἄρα πᾶσι διὰ τὴν λε τῇ λζ ἴσην εἶναι. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ γη τῇ κδ ἴση ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ δκ πρὸς κε, ἡ δη πρὸς ηθ, ἀλλ' ὡς ἡ δκ πρὸς κε, ἡ εκ πρὸς κγ. μέση γὰρ ἀνάλογον ἡ εκ τῶν δκ, κγ. ὡς ἄρα ἡ δκ πρὸς κε, καὶ ἡ εκ πρὸς κγ, οὕτως ἡ δη πρὸς ηθ. καὶ ἔστιν ἴση ἡ μὲν δκ τῇ γη, ἡ δὲ κε τῇ ζη, ἡ δὲ κγ τῇ ηδ. ὡς ἄρα ἡ γη πρὸς ηζ, ἡ ζη πρὸς ηδ, καὶ ἡ δη πρὸς ηθ. ἐὰν δὴ ἐφ' ἑκάτερα τοῦ β ληφθῶσι περιφέρειαι ἴσαι μβ, βν,



καὶ διὰ μὲν τοῦ ν παράλληλος ἀχθῇ τῇ αβ ἡ νξ, ἐπιζευχθῇ δὲ ἡ δμ, ἔσονται πάλιν τῶν γξ, ξο μέσαι ἀνάλογον αἱ νξ, ξδ. πλειόνων οὖν οὕτως καὶ συνεχῶν παραλλήλων ἐκβληθεισῶν μεταξὺ

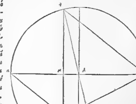
ξὺ τῶν β, δ. καὶ ταῖς ἀπολαμβανομέναις ὑπ' αὐτῶν περιφερείαις πρὸς τῷ β, ἴσων περιφερειῶν ἀπὸ τοῦ β ὡς ἐπὶ τὸ γ, καὶ ἐπιτεταγμένα σημεῖα ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν ἀπὸ τοῦ δ, ὡς τῶν ὁμοίως ταῖς δε, δμ, τμηθήσονται αἱ παράλληλοι αἱ μεταξὺ τῶν β, δ κατά τινα σημεῖα, ὡς ἐπὶ τῆς προκειμένης καταγραφῆς τὰ σ, θ. ἐφ' ἃ κανόνος παραθέσει ἐπιζεύξαντες εὐθείας, ἕξομεν καταγεγραμμένην ἐν τῷ κύκλῳ τινὰ γραμμήν. ἐφ' ἧς ἐὰν ληφθῇ τυχὸν σημεῖον, καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλος ἀχθῇ τῇ λβ, καὶ ἡ ἀχθεῖσα, καὶ ἡ ἀπολαμβανομένη ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῷ δ, μέσαι ἀνάλογον ἔσονται τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῷ γ σημείῳ, καὶ τοῦ μέρους αὐτῆς τοῦ ἀπὸ τοῦ ἐν τῇ γραμμῇ σημείου ἐπὶ τὴν γδ διάμετρον.

Τούτων προκατασκευασμένων, ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν, αἱ α, β. καὶ ἔστω κύκλος ἐν ᾧ δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ γδ, εζ. καὶ γεγράφθω ἐν αὐτῷ ἡ διὰ τῶν συνεχῶν σημείων γραμμή ὡς προείρηται, ἡ δθζ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ α πρὸς τὴν β, ἡ γη πρὸς ηκ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γκ, καὶ ἐκβληθεῖσα τεμνέτω τὴν γραμμὴν κατὰ τὸ θ, καὶ διὰ τοῦ θ τῇ εζ παράλληλος ἤχθω ἡ λμ. διὰ ἄρα τὰ προγεγραμμένα τῶν γλ, λθ μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ μλ, λδ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ γλ πρὸς λθ, οὕτως ἡ γη πρὸς ηκ. ὡς δὲ ἡ γη πρὸς ηκ, οὕτως ἡ α πρὸς τὴν β. ἐὰν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ταῖς γλ, λμ, λδ, λθ παρεμβάλωμεν μέσας τῶν α, β ὡς τὰς ν, ξ, ἔσονται εἰλημμέναι τῶν α, β μέσαι ἀνάλογον αἱ ν, ξ. ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.



ΩΣ ΠΑΠΠΟΣ ΕΝ ΜΗΧΑΝΙΚΑΙΣ ΕΙΣΑΓΩΓΑΙΣ.

Προέθετο μὲν ὁ πάππος κύβον εὑρεῖν πρὸς τὸν δοθέντα κύβον, λόγον ἔχοντα δεδομένον. καὶ ὡς πρὸς τὴν τοιαύτην πρότασιν καὶ τὰ ἀπὸ τῆς ἀποδείξεως αὐτῷ προάγεται. δῆλον δὲ ὅτι τούτου εὑρισκομένου, καὶ τὸ προκείμενον εὑρίσκεται. δύο γὰρ δοθεισῶν εὐθειῶν, ἐὰν ὀφειλουσῶν μέσων εὑρεθῆναι, ἡ δευτέρα εὑρεθῇ, καὶ ἡ τρίτη αὐτόθεν δοθήσεται. γεγράφθω γάρ, ὥς φησιν αὐταῖς κατὰ λέξιν, ἡμικύκλιον τὸ αβγ. καὶ ἀπὸ τοῦ δ κέντρου πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ δβ, καὶ κινείσθω κανόνιον περὶ τὸ α σημεῖον. ὥστε τὸ μὲν ἓν πέρας αὐτοῦ προσκεῖσθαι τυλίῳ τινὶ κατὰ τὸ α σημεῖον. τὸ δὲ λοιπὸν μέρος ὡς περὶ κέντρον τὸ τυλάριον κινείσθω μεταξὺ τῶν β, γ. τούτων δὲ κατασκευασμένων ἐπιτετάχθω δύο κύβους εὑρεῖν, λόγον ἔχοντας πρὸς ἀλλήλους τὸν ἐπιταχθέντα, καὶ τῷ λόγῳ ὁ αὐτὸς πεποιήσθω ὁ τῆς βδ πρὸς

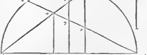


δε

δ ε. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γ ε ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ζ. παραγέσθω δὴ τὸ κανόνιον μεταξὺ τῶν β, γ, ἕως οὗ τὸ ἀπολαμβανόμενον αὐτοῦ μέρος μεταξὺ τῶν ζ ε, ε β εὐθειῶν, ἴσον γένηται τῷ μεταξὺ τῆς β ε εὐθείας, καὶ τῆς β κ γ περιφερείας. τοῦτο γὰρ πειράζοντες, καὶ μετάγοντες τὸ κανόνιον, ῥᾳδίως ποιήσομεν. γεγονέτω δὴ καὶ ἐχέτω θέσιν τὴν α κ, ὥς τε ἴσας εἶναι τὰς κ θ, θ κ. λέγω ὅτι ὁ ἀπὸ τῆς β δ κύβος, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς δ θ κύβον, λόγον ἔχει τὸν ἐπιταχθέντα, τουτέστι τὸν τῆς β δ πρὸς δ ε. νενοήσθω γὰρ ὁ κύκλος ἀναπεπληρωμένος, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ κ δ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ λ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ λ η. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ β δ τῇ λ η, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν μὲν κ θ τῇ η θ, τὴν δὲ κ δ τῇ δ λ. ἐπεζεύχθω δὴ ἥ τε α λ καὶ ἡ λ γ. ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ α λ γ, ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ, καὶ κάθετος ἡ λ μ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ λ μ πρὸς τὸ ὑπὸ μ α, τουτέστιν ἡ γ μ πρὸς μ α, οὕτως τὸ ἀπὸ α μ πρὸς τὸ ἀπὸ μ η. κοινὸς προσκείσθω ὁ τῆς α μ πρὸς μ η λόγος. ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος, ἔκ τε τοῦ τῆς γ μ πρὸς μ α, καὶ τοῦ τῆς α μ πρὸς μ η, τουτέστιν ὁ τῆς γ μ πρὸς μ η λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἔκ τε τοῦ ἀπὸ τῆς α μ πρὸς τὸ ἀπὸ μ η, καὶ τοῦ τῆς α μ πρὸς μ η. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ἀπὸ τῆς α μ πρὸς τὸ ἀπὸ μ η, καὶ τοῦ τῆς α μ πρὸς μ η, ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ, ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ τῆς α μ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς μ η. καὶ ὁ τῆς γ μ ἄρα πρὸς μ η λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ, ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ τῆς α μ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς μ η. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ γ μ πρὸς μ η, οὕτως ἡ γ δ πρὸς δ ε. ὡς δὲ ἡ α μ πρὸς μ η, ἡ α δ πρὸς δ θ. καὶ ὡς ἄρα ἡ β δ πρὸς δ ε, τουτέστιν ὡς ὁ δοθεὶς λόγος, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς β δ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς δ θ κύβον. τῶν ἄρα ὀφειλουσῶν εὑρεθῆναι δύο μέσων ἀνάλογον τῶν β δ, δ ε, δευτέρα ἐστὶν ἡ δ θ. καὶ ἐὰν ποιήσωμεν ὡς τὴν β δ πρὸς δ θ, τὴν θ δ πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται καὶ ἡ τρίτη εὑρημένη. προσέχειν δὲ χρὴ ὡς καὶ ἡ τοιαύτη κατασκευὴ ἡ αὐτή ἐστι τῇ ὑπὸ Διοκλέους εἰρημένῃ, τούτῳ μόνον διαφέρουσα τῷ ἐκεῖνον μὲν γραμμήν τινα καταγράφειν διὰ συνεχῶν σημείων μεταξὺ τῶν α, β. ἐφ' ἧς ἐλαμβάνετο τὸ η, ἐκβαλλομένης τῆς γ ε, καὶ τεμνούσης τὴν εἰρημένην γραμμήν. ἐνταῦθα δὲ τὸ η πορίζεται, διὰ τοῦ α κ κανόνος κινουμένου περὶ τὸ α. ὅτι γὰρ τὸ η τὸ αὐτό ἐστι, εἴτε ὡς ἐνταῦθα διὰ τοῦ κανόνος ληφθῇ, εἴτε ὡς ἔφη Διοκλῆς, μάθοιμεν ἂν οὕτως ἐκβληθείσης τῆς μ η κατὰ τὸ ξ, ἐπεζεύχθω ἡ κ ν. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ κ θ τῇ θ η, καὶ παράλληλος ἡ η ν τῇ θ β, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ κ ξ τῇ ξ ν, καὶ κοινὴ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ξ β. ἡ γὰρ κ ν δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνεται ὑπὸ τῆς διὰ τοῦ κέντρου, καὶ βάσις ἄρα βάσει ἴση, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ κ β περιφέρεια τῇ β ν. τὸ ἄρα η ἐστὶ τὸ ἐπὶ τῆς γραμμῆς τοῦ Διοκλέους, καὶ ἡ ἀπόδειξις δὲ αὐτή ἐστιν. ἔφασκεν γὰρ ὁ Διοκλῆς, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ γ μ πρὸς μ ν, οὕτως ἡ μ ν πρὸς μ α. καὶ ἡ α μ πρὸς μ η. ἴση δέ ἐστιν ἡ η μ τῇ μ λ. ἡ γὰρ διάμετρος πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γ μ πρὸς μ λ, οὕτως ἡ λ μ πρὸς μ α, καὶ ἡ α μ πρὸς μ η. τῶν ἄρα γ μ, μ η μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ λ μ, μ α. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ γ μ πρὸς μ η, ἡ γ δ πρὸς δ ε. ὡς δὲ ἡ γ μ πρὸς μ λ, ἡ α μ πρὸς μ η, τουτέστιν ἡ γ δ πρὸς δ θ. καὶ τῶν δύο μέσων ἄρα τῶν γ δ, δ ε, δευτέρα ἐστὶν ἡ δ θ, ἥν τινα ἐπορίσατο καὶ ὁ Πάππος.

ΩΣ ΣΠΟΡΟΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ α β, β γ. δεῖ δὴ τῶν α β, β γ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ β τῇ α β πρὸς ὀρθὰς ἡ δ β ε, καὶ κέντρῳ τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ β α ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ δ α ε. καὶ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὸ γ εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα διήχθω ἐπὶ τὸ ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ δ διήχθω τις εὐθεῖα οὕτως, ὥς τε ἴσην εἶναι τὴν η θ τῇ θ κ. τοῦτο γὰρ δυνατόν. καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν η, κ ἐπὶ τὴν δ ε κάθετοι αἱ η λ, κ μ ν. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ κ θ πρὸς θ η, ἡ μ β πρὸς β λ. ἴση δὲ ἡ κ θ τῇ θ η, ἴση ἄρα καὶ ἡ μ β τῇ β λ, ὥς τε καὶ λοιπὴ ἡ μ ε τῇ λ δ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ δ μ τῇ λ ε ἐστὶν ἴση. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ μ δ πρὸς δ λ, ἡ λ ε πρὸς ε μ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ μ δ πρὸς δ λ, ἡ κ μ πρὸς η λ. ὡς δὲ ἡ λ ε πρὸς ε μ, ἡ η λ πρὸς ν μ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ δ μ πρὸς μ κ, ἡ κ μ πρὸς μ ε. ὡς ἄρα ἡ δ μ πρὸς μ ε, οὕτως τὸ ἀπὸ δ μ πρὸς τὸ ἀπὸ μ κ,

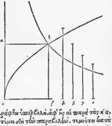


τουτέστι τὸ ἀπὸ δ β πρὸς τὸ ἀπὸ β θ. τουτέστι τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ β θ. ἴση γὰρ ἡ δ β τῇ β α.

τῇ βα. πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ μδ πρὸς δβ, ἡ λε πρὸς εβ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ μδ πρὸς δβ, ἡ κμ πρὸς θβ, ὡς δὲ ἡ λε πρὸς εβ, ἡ κλ πρὸς γβ. καὶ ὡς ἄρα ἡ κμ πρὸς θβ, ἡ κλ πρὸς γβ. καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ κμ πρὸς κλ, ἡ θβ πρὸς γβ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ κμ πρὸς κλ, ἡ μδ πρὸς δλ, τουτέστιν ἡ δμ πρὸς με, τουτέστι τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, ἡ βθ πρὸς βγ. εἰλήφθω τῶν θβ, βγ μέση ἀνάλογον ἡ ξ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ, ἡ θβ πρὸς βγ, ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αβ πρὸς βθ. ἡ δὲ θβ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θβ πρὸς ξ. καὶ ὡς ἄρα ἡ αβ πρὸς βθ, ἡ βθ πρὸς ξ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ θβ πρὸς ξ, ἡ ξ πρὸς βγ. καὶ ὡς ἄρα ἡ αβ πρὸς βθ, ἡ θβ πρὸς ξ. καὶ ἡ ξ πρὸς βγ. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ αὐτὴ ἡ αὐτή ἐστιν, τῇ ὑπὸ πάππου καὶ διοκλέους γραμμῇ.

ΩΣ ΜΕΝΕΧΜΟΣ.

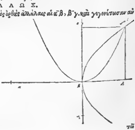
Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ δ, ε. δεῖ δὴ τῶν δ, ε δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. Γεγονέτω καὶ ἔστωσαν αἱ β, γ. καὶ ἐκκείσθω θέσει εὐθεῖα ἡ ακ, πεπερασμένη κατὰ τὸ α. καὶ πρὸς τῷ α τῇ γ ἴση κείσθω ἡ αζ. καὶ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ ζθ. καὶ τῇ β ἴση κείσθω ἡ ζθ. ἐπεὶ οὖν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ δ, β, γ. τὸ ὑπὸ τῶν δ, γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β. τὸ ἄρα ὑπὸ δοθείσης τῆς δ καὶ τῆς γ, τουτέστι τῆς αζ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ζθ. ἐπὶ παραβολῆς ἄρα τῆς θ, διὰ τοῦ α γεγραμμένης. ἤχθωσαν παράλληλοι αἱ θκ, ακ. καὶ ἐπεὶ δοθὲν τὸ ὑπὸ β, γ. ἴσον γάρ ἐστι τῷ ὑπὸ δ, ε. δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ κθζ. ἐπὶ ὑπερβολῆς ἄρα τὸ θ ἐν ἀσυμπτώτοις ταῖς κα, αζ. δοθὲν ἄρα τὸ θ, ὥστε καὶ τὸ ζ. συντεθήσεται δὴ οὕτως. ἔστωσαν αἱ μὲν δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ δ, ε. ἡ δὲ τῇ θέσει ἡ ακ πεπερασμένη κατὰ τὸ α, καὶ γεγράφθω διὰ τοῦ α παραβολή. ἧς ἄξων μὲν ἡ αη, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ δ. αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν αη ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ δυνάσθωσαν τὰ παρὰ τὴν δ παρακείμενα χωρία, πλάτη ἔχοντα τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ᾽ αὐτῶν πρὸς τῷ α σημείῳ. γεγράφθω, καὶ ἔστω ἡ αθ.



καὶ ὀρθὴ ἡ ακ, καὶ ἐν ἀσυμπτώτοις ταῖς κα, αζ γεγράφθω ὑπερβολή, ἀφ᾽ ἧς αἱ παρὰ τὰς κα, αζ ἀχθεῖσαι ποιήσουσι τὸ χωρίον ἴσον τῷ ὑπὸ δ, ε, τεμεῖ δὴ τὴν παραβολήν. τεμνέτω κατὰ τὸ θ, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ θκ, θζ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ ζθ, ἴσον τῷ ὑπὸ δ, γ, ἐστὶν ὡς ἡ δ πρὸς τὴν ζθ, ἡ ζθ πρὸς ζα. πάλιν ἐπεὶ τὸ ὑπὸ δ, ε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ θζα, ἔστιν ὡς ἡ δ πρὸς τὴν ζθ, ἡ ζα πρὸς τὴν ε. ἀλλ᾽ ὡς ἡ δ πρὸς τὴν ζθ, ἡ ζθ πρὸς ζα, καὶ ἡ ζα πρὸς ε. κείσθω τῇ μὲν θζ ἴση ἡ β, τῇ δὲ αζ ἴση ἡ γ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δ πρὸς τὴν β, ἡ β πρὸς τὴν γ, καὶ ἡ γ πρὸς ε. αἱ δ, β, γ, ε ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

ΑΛΛΩΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ αβ, βγ. καὶ γεγονέτωσαν αὐτῶν μέσαι αἱ δβ, βε. ὥστε εἶναι, ὡς τὴν γβ πρὸς βδ, οὕτως τὴν βδ πρὸς βε, καὶ τὴν βε πρὸς βα. καὶ ἤχθωσαν πρὸς ὀρθὰς αἱ δζ, εζ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ δβ πρὸς βε. τὸ ἄρα ὑπὸ γβε, τουτέστι τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς βε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βδ, τουτέστι τῷ εζ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς βε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εζ, τὸ ζ ἄρα ἅπτεται παραβολῆς τῆς περὶ ἄξονα τὴν βε. πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ αβ πρὸς βε, ἡ βε πρὸς βδ. τὸ ἄρα ὑπὸ αβδ, τουτέστι τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς βδ, ἴσον ἐστὶ

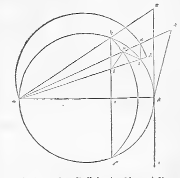


τῷ ἀπὸ ε β, τουτέστι τῷ δ ζ. τὸ ζ ἄρα ἅπτεται παραβολῆς περὶ ἄξονα τὴν β δ. ἐπεὶ δὲ καὶ ἑτέρας δοθείσης περὶ τὴν β ζ. δοθὲν ἄρα τὸ ζ, καὶ κάθετοι αἱ ζ δ, ζ ε. καὶ δοθεῖσαι ταῖς δ, ε. συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ α β, β γ. καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ᾽ ἄπειρον ἀπὸ τοῦ β, β δ, β ε. καὶ γεγράφθω περὶ ἄξονα τὴν β ε παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας ἐπὶ τὴν β ε δύνασθαι παρὰ τὴν β γ. πάλιν γεγράφθω περὶ ἄξονα τὴν δ β παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν α β. τέμνουσι δὴ ἀλλήλας αἱ παραβολαί. τεμνέτωσαν κατὰ τὸ ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ ζ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ζ δ, ζ ε. ἐπεὶ οὖν ἐν παραβολῇ κατῆκται ἡ ζ ε, τουτέστιν ἡ δ β, τὸ ἄρα ὑπὸ γ β ε ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ β δ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γ β πρὸς β δ, ἡ δ β πρὸς β ε. πάλιν ἐπεὶ ἐν παραβολῇ κατῆκται ἡ ζ δ, τουτέστιν ἡ ε β, τὸ ἄρα ὑπὸ δ β α ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ε β. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δ β πρὸς β ε, ἡ β ε πρὸς β α. ἀλλ᾽ ὡς ἡ δ β πρὸς β ε, οὕτως ἡ γ β πρὸς β δ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γ β πρὸς β δ, ἡ β δ πρὸς β ε, καὶ ἡ ε β πρὸς β α, ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

Γράφεται δὲ ἡ παραβολὴ διὰ τοῦ εὑρεθέντος διαβήτου τῷ μιλησίῳ μηχανικῷ Ἰσιδώρῳ τῷ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ, γραφέντος δὲ ὑπ᾽ αὐτοῦ εἰς τὸ γενόμενον αὐτῷ ὑπόμνημα τῶν Ἥρωνος καμαρικῶν.

Η ΑΡΧΙΤΟΥ ΕΥΡΕΣΙΣ, ΩΣ ΕΥΔΗμος ἱστορεῖ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ α δ, γ. δεῖ δὴ τῶν α δ, γ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. γεγράφθω περὶ τὴν μείζονα τὴν α δ κύκλος, ὁ α β δ ζ. καὶ τῇ γ ἴση ἐνηρμόσθω ἡ α β. καὶ ἐκβληθεῖσα συμπιπτέτω τῇ ἀπὸ τοῦ δ ἐφαπτομένῃ τοῦ κύκλου κατὰ τὸ π. παρὰ δὲ τὴν π δ ο ἤχθω ἡ β ε ζ, καὶ νενοήσθω ἡμικυλίνδριον ὀρθὸν ἐπὶ τοῦ α β δ ἡμικυκλίου. ἐπὶ δὲ τῆς α δ ἡμικύκλιον ὀρθὸν, ἐν τῷ τοῦ ἡμικυλινδρίου παραλληλογράμμῳ κείμενον. τοῦτο δὴ τὸ ἡμικύκλιον περιαγόμενον ὡς ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὸ β, μένοντος τοῦ α πέρατος τῆς διαμέτρου, τέμνει τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν ἐν τῇ περιαγωγῇ, καὶ γράψει ἐν αὐτῇ γραμμήν τινα. πάλιν δὲ ἐὰν τοῦ α δ



μενούσης τὸ α π δ τρίγωνον περιενεχθῇ τὴν ἐναντίαν τῷ ἡμικυκλίῳ κίνησιν, κωνικὴν ποιήσει ἐπιφάνειαν τῇ α π εὐθείᾳ, ἣ δὴ περιαγομένη συμβαλεῖ τῇ κυλινδρικῇ γραμμῇ κατά τι σημεῖον. ἅμα δὲ καὶ τὸ β περιγράψει ἡμικύκλιον ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ. ἐχέτω δὴ θέσιν κατὰ τὸν τόπον τῆς συμπτώσεως τῶν γραμμῶν τὸ κινούμενον ἡμικύκλιον, ὡς τὴν τοῦ δ κ α. τὸ δὲ

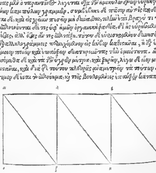
αὐτὸ

αὐτῇ περιαγόμενον τρίγωνον τὴν τοῦ δ λ α. τὸ δὲ τῆς εἰρημένης συμπτώσεως σημεῖον ἔστω τὸ κ. ἔστω δὲ καὶ τὸ διὰ τοῦ β γραφόμενον ἡμικύκλιον τὸ β μ ζ, κοινὴ δὲ αὐτοῦ τομὴ καὶ τοῦ β δ ζ α κύκλου ἔστω ἡ β ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ κ ἐπὶ τὸ τοῦ β δ α ἡμικυκλίου ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω. πεσεῖται δὴ ἐπὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, διὰ τὸ ὀρθὸν ἑστάναι τὸν κύλινδρον. πιπτέτω, καὶ ἔστω ἡ κι. καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ ι ἐπὶ τὸ α ἐπιζευχθεῖσα συμβαλέτω τῇ β ζ κατὰ τὸ θ. ἡ δὲ α λ τῷ β μ ζ ἡμικυκλίῳ κατὰ τὸ μ. ἐπεζεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ κ δ, μ ι, μ θ. ἐπεὶ οὖν ἑκάτερον τῶν δ κ α, β μ ζ ἡμικυκλίων ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ ἡ κοινὴ ἄρα αὐτῶν τομὴ ἡ μ θ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ. ὥστε καὶ πρὸς τὴν β ζ ὀρθή ἐστιν ἡ μ θ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν θ β, θ ζ, τουτέστι τὸ ὑπὸ θ α, θ ι, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ μ θ. ὅμοιον ἐστὶν ἄρα τὸ α μ ι τρίγωνον ἑκατέρῳ τῶν μ ι θ, μ α θ. καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ι μ α. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δ κ α ὀρθή. παράλληλοι ἄρα εἰσὶν αἱ κ δ, μ ι. καὶ ἔσται ἀνάλογον ὡς ἡ δ α πρὸς α κ, τουτέστιν ἡ κ α πρὸς α ι, οὕτως ἡ ι α πρὸς α μ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων. τέσσαρες ἄρα αἱ δ α, α κ, α ι, α μ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι. καὶ ἔστιν ἡ α μ ἴση τῇ γ. ἐπεὶ καὶ τῇ α β. δύο ἄρα δοθεισῶν τῶν α δ, γ, δύο μέσαι ἀνάλογον ηὕρηνται αἱ α κ, α ι.

ΩΣ ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗΣ.

Βασιλεῖ Πτολεμαίῳ Ἐρατοσθένης χαίρειν.

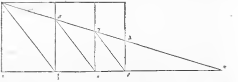
Τῶν ἀρχαίων τινὰ τραγῳδοποιῶν φασιν, εἰσαγαγεῖν τὸν μίνω τῷ γλαύκῳ κατασκευάζοντα τάφον. πυθόμενον δὲ ὅτι πανταχοῦ ἑκατόμπεδος εἴη, εἰπεῖν, μικρόν γ' ἔλεξας βασιλικοῦ σηκὸν τάφου, διπλάσιον ἔστω. τοῦ δὲ κύβου μὴ σφαλῇς, διπλασιάζων ἕκαστον κῶλον ἐν τάχει τάφου, ἐδόκει διημαρτηκέναι. τῶν γὰρ πλευρῶν διπλασιασθεισῶν, τὸ μὲν ἐπίπεδον γίνεται τετραπλάσιον, τὸ δὲ στερεὸν ὀκταπλάσιον. ἐζητεῖτο δὴ καὶ παρὰ τοῖς γεωμέτραις, τίνα ἄν τις τρόπον τὸ δοθὲν στερεὸν διαμένον ἐν τῷ αὐτῷ σχήματι διπλασιάσειεν. καὶ ἐκαλεῖτο τὸ τοιοῦτον πρόβλημα, κύβου διπλασιασμός. ὑποθέμενοι γὰρ κύβον, ἐζήτουν τοῦτον διπλασιάσαι. πάντων δὲ διαπορούντων ἐπὶ πολὺν χρόνον, πρῶτος ἱπποκράτης ὁ χῖος ἐπενόησεν, ὅτι ἐὰν εὑρεθῇ δύο εὐθειῶν γραμμῶν, ὧν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονός ἐστι διπλασία, δύο μέσας ἀνάλογον λαβεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, διπλασιασθήσεται ὁ κύβος, ὥστε τὸ ἀπόρημα αὐτοῦ εἰς ἕτερον οὐκ ἔλασσον ἀπόρημα κατέστρεφεν. μετὰ χρόνον δέ τινάς φασιν δηλίους ἐπιβαλλομένους νόσου κατὰ χρησμὸν διπλασιάσαι τινὰ τῶν βωμῶν ἐπιταχθέντας, ἐμπεσεῖν εἰς τὸ αὐτὸ ἀπόρημα. διαπεμψαμένους δὲ τοὺς παρὰ τῷ πλάτωνι ἐν ἀκαδημίᾳ γεωμέτρας, ἀξιοῦν αὐτοῖς εὑρεῖν τὸ ζητούμενον. τῶν δὲ φιλοπόνως ἐπιδιδόντων ἑαυτοὺς, καὶ ζητούντων, δύο δοθεισῶν δύο μέσας λαβεῖν, ἀρχύτας μὲν ὁ ταραντῖνος λέγεται διὰ τῶν ἡμικυλίνδρων εὑρηκέναι, εὔδοξος δὲ διὰ τῶν καλουμένων καμπύλων γραμμῶν. συμβέβηκε δὲ πᾶσιν αὐτοῖς ἀποδεικτικῶς γεγραφέναι. χειρουργῆσαι δὲ, καὶ εἰς χρείαν πεσεῖν μὴ δύνασθαι, πλὴν ἐπὶ βραχύ τι τοῦ μεναίχμου, καὶ ταῦτα δυσχερῶς. ἐπινενόηται δέ τις ὑφ' ἡμῶν ὀργανικὴ ῥᾳδία, δι' ἧς εὑρήσομεν, δύο τῶν δοθεισῶν οὐ μόνον δύο μέσας, ἀλλ' ὅσας ἄν τις ἐπιτάξῃ. τούτου δὲ εὑρισκομένου δυνησόμεθα καθόλου τὸ δοθὲν στερεὸν παραλληλογράμμοις περιεχόμενον εἰς κύβον καθιστάναι, ἢ ἐξ ἑτέρου εἰς ἕτερον σχηματίζειν, καὶ ὅμοιον ποιεῖν καὶ ἐπαύξειν διατηροῦντας τὴν ὁμοιότητα. ὥς τε καὶ βωμοὺς, καὶ ναοὺς. δυνησόμεθα δὲ καὶ τὰ τῶν ὑγρῶν μέτρα, καὶ ξηρῶν, λέγω δὲ οἷον μετρητὴν, ἢ μεδίμνων εἰς κύβον καθιστάναι, καὶ διὰ τῆς τούτου πλευρᾶς ἀναμετρεῖν τὰ τούτων δεκτικὰ ἀγγεῖα πόσον χωρεῖ. χρήσιμον δὲ ἔσται τὸ ἐπινόημα, καὶ τοῖς βουλομένοις ἐπαύξειν καταπαλτικὰ καὶ λιθοβόλα ὄργανα. δεῖ γὰρ ἀνάλογον ἅπαντα αὐξηθῆναι, καὶ τὰ πάχη καὶ τὰ μεγέθη, καὶ τὰς κατατρήσεις, καὶ τὰς χοινικίδας, καὶ τὰ ἐμβαλλόμενα νεῦρα, εἰ μέλλει καὶ ἡ βολὴ ἀνάλογον ἐπαυξηθῆναι. ταῦτα δὲ οὐ δυνατὰ γενέσθαι ἄνευ τῆς τῶν μέσων εὑρέ-



σεως.

σεως. τὴν δὲ ἀπόδειξιν καὶ τὴν κατασκευὴν τοῦ λεχθέντος ὀργάνου ὑπογέγραφά σοι. δεδόσθωσαν δύο ἄνισοι εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, αἱ αε, δθ. καὶ κείσθω ἐπί τινος εὐθείας τῆς εθ πρὸς ὀρθὰς ἡ αε. καὶ ἐπὶ τῆς εθ τρία συνεστάτω παραλληλόγραμμα ἐφεξῆς, τὰ αζ, ζι, ιθ. καὶ ἤχθωσαν διάμετροι ἐν αὐτοῖς, αἱ αζ, λη, ιθ. ἔσονται δὴ αὗται παράλληλοι. μένοντος δὴ τοῦ μέσου παραλληλογράμμου τοῦ ζι συνωσθήτω, τὸ μὲν αζ ἐπάνω τοῦ μέσου, τὸ δὲ ιθ ὑποκάτω, καθάπερ ἐπὶ τοῦ δευτέρου σχήματος, ἕως οὗ γένηται τὰ α, β, γ, δ κατ' εὐθεῖαν. καὶ διήχθω διὰ τῶν α, β, γ, δ σημείων εὐθεῖα. καὶ συμπιπτέτω τῇ εθ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ κ. ἔσται δὴ ὡς ἡ ακ πρὸς κβ, ἐν μὲν ταῖς αε, ζβ παραλλήλοις, ἡ εκ πρὸς κζ. ἐν δὲ ταῖς αζ, βη παραλλήλοις ἡ ζκ πρὸς κη. ὡς ἄρα ἡ ακ πρὸς κβ, ἡ εκ πρὸς κζ, καὶ ἡ κζ πρὸς κη. πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ βκ πρὸς κγ, ἐν μὲν ταῖς βζ, γη παραλλήλοις ἡ ζκ πρὸς κη. ἐν δὲ ταῖς βη, γθ παραλλήλοις ἡ ηκ πρὸς κθ. ὡς ἄρα ἡ βκ πρὸς κγ, ἡ ζκ πρὸς κη, καὶ ἡ ηκ πρὸς κθ. ἀλλ' ὡς ἡ ζκ πρὸς κη, ἡ εκ πρὸς κζ. καὶ ὡς ἄρα ἡ εκ πρὸς κζ, ἡ ζκ πρὸς κη, καὶ ἡ ηκ πρὸς κθ. ἀλλ' ὡς ἡ εκ πρὸς κζ, ἡ αε πρὸς βζ. ὡς δὲ ἡ ζκ πρὸς κη, ἡ βζ πρὸς γη. ὡς δὲ ἡ ηκ πρὸς κθ, ἡ γη πρὸς δθ. καὶ ὡς ἄρα ἡ αε πρὸς βζ, ἡ βζ πρὸς γη, καὶ ἡ γη πρὸς δθ. ηὕρηνται ἄρα τῶν αε, δθ δύο μέσαι, ἥτε βζ καὶ ἡ γη.

Ταῦτα οὖν ἐπὶ τῶν γεωμετρουμένων ἐπιφανειῶν ἀποδέδεικται. ἵνα δὲ καὶ ὀργανικῶς δυνώμεθα τὰς δύο μέσας λαμβάνειν, διαπήγνυται πλινθίον ξύλινον, ἢ ἐλεφάντινον, ἢ χαλκοῦν ἔχον τρεῖς πινακίσκους ἴσους ὡς λεπτοτάτους. ὧν ὁ μὲν μέσος ἐνήρμοσται, οἱ δὲ δύο ἐπωσοί εἰσιν ἐν χολέδραις, τοῖς δὲ μεγέθεσι καὶ ταῖς συμμετρίαις ὡς ἕκαστοι ἑαυτοὺς πείθουσι. τὰ μὲν γὰρ τῆς ἀποδείξεως ὡσαύτως συντελεῖται. πρὸς δὲ τὸ ἀκριβέστερον λαμβάνεσθαι τὰς γραμμὰς φιλοτεχνητέον, ἵνα ἐν τῷ συνάγεσθαι τοὺς πινακίσκους παράλληλα διαμένῃ πάντα καὶ ἄσχιστα, καὶ ὁμαλῶς συναπτόμενα ἀλλήλοις. ἐν δὲ τῷ ἀναθήματι, τὸ μὲν ὀργανικὸν χαλκοῦν ἐστι, καὶ καθήρμοσται ὑπ' αὐτὴν τὴν στεφάνην τῆς στήλης προσμεμολυβδοχημένον, ὑπ' αὐτοῦ δὲ ἡ ἀπόδειξις συντομώτερον φραζομένη καὶ τὸ σχῆμα, μετ' αὐτὸ δὲ ἐπίγραμμα. ὑπογεγράφθω οὖν σοι καὶ ταῦτα, ἵνα ἔχῃς καὶ ὡς ἐν τῷ ἀναθήματι. τῶν δὲ δύο σχημάτων τὸ δεύτερον γέγραπται ἐν τῇ στήλῃ.



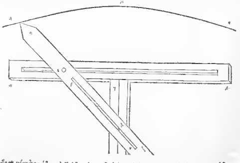
Δύο τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. δεδόσθωσαν αἱ αε, δθ. συνάγω δὴ τοὺς ἐν τῷ ὀργάνῳ πίνακας, ἕως ἂν κατ' εὐθεῖαν γένηται τὰ α, β, γ, δ σημεῖα. νοείσθω δὴ ὡς ἔχει ἐπὶ τοῦ δευτέρου σχήματος. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ακ πρὸς κβ, ἐν μὲν ταῖς αε, βζ παραλλήλοις ἡ εκ πρὸς κζ. ἐν δὲ ταῖς αζ, βη, ἡ ζκ πρὸς κη. ὡς ἄρα ἡ εκ πρὸς κζ, ἡ κζ πρὸς κη. ὡς δὲ αὗται πρὸς ἀλλήλας, ἥτε αε πρὸς βζ, καὶ ἡ βζ πρὸς γη. ὡσαύτως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ὡς ἡ ζβ πρὸς γη, ἡ γη πρὸς δθ. ἀνάλογον ἄρα αἱ αε, βζ, γη, δθ. ηὕρηνται ἄρα δύο τῶν δοθεισῶν δύο μέσαι. ἐὰν δὲ αἱ δοθεῖσαι μὴ ἴσαι ὦσι ταῖς αε, δθ, ποιήσαντες αὐταῖς ἀνάλογον τὰς αε, δθ, τούτων ληψόμεθα τὰς μέσας, καὶ ἐπανοίσομεν ἐπ' ἐκείνας, καὶ ἐσόμεθα πεποιηκότες τὸ ἐπιταχθέν. ἐὰν δὲ πλείους μέσας ἐπιταχθῇ εὑρεῖν, αἰεὶ ἐνὶ πλείους πινακίσκους καταστησόμεθα ἐν τῷ ὀργανίῳ τῶν ληφθησομένων μέσων, ἡ δὲ ἀπόδειξις ἡ αὐτή.

Εἰ κύβον ἐξ ὀλίγου διπλάσιον ὦγαθὲ τεύχειν
 Φράζεαι, τὴν στερεὴν πᾶσαν ἐς ἄλλο φύσιν.
Εὖ μεταμορφῶσαι, τόδε τοι πάρα κἂν σύ γε μάνδρην
 Ἢ † σιρὸν, ἢ κοίλου φρέατος εὐρὺ κύτος.
Τῇδ' ἀναμετρήσαιο μέσας ὅτε τέρμασιν ἄκροις
 Συνδρομάδας δισσῶν ἐντὸς ἕλῃς κανόνων.
Μὴ δὲ σύ γ' ἀρχύτεω δυσμήχανα ἔργα κυλίνδρων,
 Μὴ δὲ μεναιχμείους κωνοτομεῖν τριάδας
Δίζηαι. μὴ δ' εἴ τι θεουδέος εὐδόξοιο,
 Καμπύλον ἐν γραμμαῖς εἶδος ἀναγράφεται.
Τοῖσδε γ' ἐν πινάκεσσι μεσόγραφα μυρία τεύχοις,
 Ῥεῖα κεν ἐκ παύρου πυθμένος ἀρχόμενος.
Εὐαίων πτολεμαῖε πατὴρ ὅτι παιδὶ συνηβῶν
 Πάνθ' ὅσα καὶ μούσαις καὶ βασιλεῦσι φίλα.
Αὐτὸς ἐδωρήσω τὸδ' ἐς ὕστερον οὐράνιε ζεῦ.
 Καὶ σκήπτρων ἐκ σῆς ἀντιάσειε χερός.
Καὶ τὰ μὲν ὣς τελέοιτο, λέγοι δέ τις ἄνθεμα λεύσσων
 Τοῦ κυρηναίου τοῦτ' ἐρατοσθένεος.

† σωρὸν

ΩΣ ΝΙΚΟΜΗΔΗΣ ΕΝ ΤΩ ΠΕΡΙ ΚΟΓΧΟΕΙΔΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ.

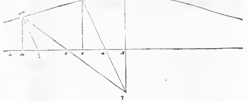
Γράφει δὲ καὶ νικομήδης ἐν τῷ ἐπιγεγραμμένῳ πρὸς αὐτοῦ περὶ κογχοειδῶν συγγράμματι ὀργάνου κατασκευὴν τὴν αὐτὴν ἀποπληροῦντος. ἐφ' ὃ καὶ μεγάλα μὲν σεμνυνόμενος φαίνεται ὁ ἀνὴρ, πολλὰ δὲ τοῖς ἐρατοσθένους ἐπεγγελῶν εὑρήμασιν, ὡς ἀμηχάνοις τε ἅμα καὶ γεωμετρικῆς ἕξεως ἐστερημένοις, ὅτ' ἐκ ἐλλείποις. τῶν τοίνυν περὶ τὸ πρόβλημα πεπονηκότων ἕνεκά τε πρὸς ἐρατοσθένη συγκρίσεως ἕνεκα, καὶ αὐτὸν τοῖς ἤδη γεγραμμένοις, συνάπτομεν δυνάμει γράφοντα οὕτως. Νοεῖν χρὴ κανόνας δύο πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις συμβεβλημένους οὕτως,



ὥστε μίαν ἀποσώζειν αὐτῶν ἐπιφάνειαν. καθάπερ εἰσὶν οἱ ᾱ β, γ̄ δ. ἐν δὲ τῷ ᾱ β σωλῆνα πελεκινοειδῆ, εἰς ὃν χελώνιον διατρέχειν δυνήσεται. ἐν δὲ τῷ γ̄ δ κατὰ τὸ μέρος τὸ πρὸς τὸ δ, καὶ μέσον τὴν διαιροῦσαν εὐθεῖαν τὸ πλάτος αὐτοῦ κυλίνδριον συμφυὲς τῷ κανόνι, καὶ βραχὺ ὑπερέχον

ὑπερέχον τῆς ἄνωθεν ἐπιφανείας αὐτοῦ τοῦ κανόνος. ἄλλον δὲ κανόνα ὡς τὸν εζ μετὰ βραχύ τι διάστημα τοῦ πρὸς τὸ ζ πέρατος ἀνατομὴν ἔχοντα, ὡς τὴν η θ, δυναμένην περιβαίνειν τῷ πρὸς τῷ δ κυλινδρίῳ. πρὸς δὲ τῷ ε ὀπὴν στρογγύλην, ἥ τις ἐγκλείσεται εἰς τὸ μαξόνιον, συμφυὲς τῷ διατρέχοντι χελωναρίῳ ἐν τῷ πελεκινοειδεῖ σωλῆνι, τῷ ὄντι ἐν τῷ αβ κανόνι. ἐναρμοσθέντος τοίνυν τοῦ εζ κανόνος, κατὰ μὲν τὴν η θ ἀνατομὴν, ἐν τῷ πρὸς τὸ ζ κυλινδρίῳ, κατὰ δὲ τὴν ε ὀπὴν ἐν τῷ ἀξονίῳ τῷ συμφυεῖ τῷ χελωναρίῳ, ἐάν τις ἐπιλαβόμενος τοῦ κ ἄκρου τοῦ κανόνος κινῇ αὐτὸν ἐπὶ τὰ πρὸς τὸ α μέρη, ἔπειτα πρὸς τὸ β, τὸ μὲν ε σημεῖον ἀεὶ ἐπὶ τοῦ αβ κανόνος ἐνεχθήσεται. ἡ δὲ η θ ἀνατομὴ ἐπὶ τῷ πρὸς τὸ δ κυλινδρίῳ κινηθήσεται, ἀεὶ τῆς μέσης τοῦ εζ κανόνος εὐθείας ἐν τῇ κινήσει διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ πρὸς τῷ δ κυλίνδρου νοουμένης. τῆς δὲ εκ ὑπεροχῆς τοῦ κανόνος ἀεὶ τῆς αὐτῆς μενούσης. ἐὰν τοίνυν πρὸς τὸ κ ἐπινοήσωμεν τι γραφεῖον ἐφαπτόμενον τοῦ ἐδάφους, γραφήσεταί τις γραμμὴ, οἷα ἐστὶν ἡ λ μ ν, ἥν τινα καλεῖ νικομήδης κογχοειδῆ πρώτην γραμμὴν, καὶ διάστημα μὲν τῆς γραμμῆς τὸ εκ μέγεθος τοῦ κανόνος, πόλον δὲ τὸ δ.

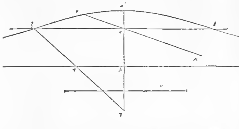
Ταύτῃ δὲ τῇ γραμμῇ συμβαίνον δείκνυσι τὸ ἀεὶ ἐπ' ἔλαττον μὲν συμπορεύεσθαι τῷ αβ κανόνι. καὶ ἐάν τις εὐθεῖα διαχθῇ μεταξὺ τῆς τε γραμμῆς καὶ τοῦ αβ κανόνος, ὅτι πάντως τέμνει τὴν γραμμὴν, καὶ τὸ μὲν πρότερον τῶν συμβαινόντων ἐστὶν εὐκατανόητον, ἐφ' ἑτέρας καταγραφῆς, κανόνος τε νοουμένου τοῦ αβ. πόλου δὲ τοῦ γ, διαστήματος δὲ τοῦ δ ε, γραμμῆς δὲ κογχοειδοῦς τῆς ζ ε η. προσπιπτέτωσαν ἀπὸ τοῦ γ δύο αἱ γ θ, γ ζ ἴσων, δῆλον ὅτι γινομένων τῶν



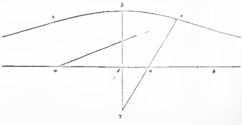
κ θ, λ ζ. λέγω ὅτι ἡ ζ μ κάθετος ἐλάττων τῆς θ ν καθέτου. μείζονος γὰρ οὔσης τῆς ὑπὸ μ λ γ γωνίας τῆς ὑπὸ ν κ γ, λοιπὴ ἡ λοιπῇ εἰς τὰς δύο ὀρθὰς ἡ ὑπὸ μ λ ζ λοιπῆς τῆς ὑπὸ ν κ θ ἐστὶν ἐλάσσων, καὶ διὰ τοῦτο ὀρθῶν οὐσῶν τῶν πρὸς τοῖς μ, ν, μείζων ἐστὶ καὶ ἡ πρὸς τὸ ζ τῆς πρὸς τῷ θ. καὶ ἐὰν τῇ πρὸς τὸ θ ἴσην συστησόμεθα τὴν ὑπὸ μ ζ ξ, ἡ κ θ, τουτέστιν ἡ λ ζ πρὸς θ ν τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν ἡ ξ ζ πρὸς ζ μ. ὥστε ἡ ζ λ πρὸς τὴν θ ν ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὴν ζ μ. καὶ διὰ τοῦτο μείζων ἡ θ ν τῆς ζ μ.

Τὸ δὲ δεύτερον ἦν τὸ τὴν διαγομένην εὐθεῖαν μεταξὺ τοῦ τε αβ καὶ τῆς γραμμῆς τέμνειν τὴν γραμμὴν, καὶ τοῦτο δὲ οὕτω γίνεται γνώριμον. ἡ γὰρ διαγομένη, ἤτοι παράλληλός ἐστι τῇ αβ ἢ οὔ. ἔστω πρότερον παράλληλος ὡς ἡ ζ η θ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ δ η πρὸς η γ, οὕτως ἡ δ ε πρὸς ἄλλην τινὰ τὴν κ. καὶ κέντρῳ τῷ γ, διαστήματι δὲ τῇ κ περιφέρεια γραφεῖσα τεμνέτω τὴν ζ η κατὰ τὸ ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γ ζ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δ η πρὸς η γ, οὕτως ἡ λ ζ πρὸς ζ γ. ἀλλ' ὡς ἡ δ η πρὸς η γ, οὕτως ἦν ἡ δ ε πρὸς τὴν κ, τουτέστι τὴν γ ζ. ἴση ἄρα ἡ δ ε τῇ λ ζ ὅπερ ἀδύνατον, δεῖ γὰρ εἶναι τὸ ζ πρὸς τῇ γραμμῇ. ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ἡ διαγομένη παράλληλος.

καὶ ἔστω ὡς ἡ μξ ν. καὶ ἤχθω διὰ τοῦ η παράλληλος τῇ αβ, ἡ ζη. ἡ ἄρα ζθ συμπεσεῖται τῇ γραμμῇ. ὥστε πολλῷ μᾶλλον ἡ μν. τούτων δὲ ὄντων τῶν παρακολουθημάτων διὰ τοῦ ὀργάνου τὸ χρήσιμον εἰς τὸ προκείμενον δείκνυται οὕτως.



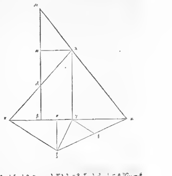
Πάλιν γωνίας δοθείσης τῆς α, καὶ σημείου ἐκτὸς τοῦ γ, διάγειν τὴν γη, καὶ ποιεῖν τὴν κη ἴσην τῇ δοθείσῃ. ἤχθω κάθετος ἀπὸ τοῦ γ σημείου ἐπὶ τὴν αβ, ἡ γθ, καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ τῇ δοθείσῃ ἴση ἔστω ἡ δθ, καὶ πόλῳ μὲν τῷ γ, διαστήματι δὲ τῷ δοθέντι τῷ δθ, κανόνι



δὲ τῷ αβ, γεγράφθω κογχοειδὴς γραμμὴ πρώτη ἡ εδζ. συμβάλλει ἄρα τῇ αη, διὰ τὸ προδειχθέν, συμβαλλέτω κατὰ τὸ η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γη. ἴση ἄρα ἡ κη τῇ δοθείσῃ.

Τούτων δειχθέντων, δεδόσθωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ γλ, λα πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον κατὰ τὸ συνεχὲς εὑρεῖν. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ αβγλ παραλληλόγραμμον, καὶ τετμήσθω δίχα ἑκατέρα τῶν αβ, βγ, τοῖς δ, ε σημείοις, καὶ ἐπιζευχθεῖσα μὲν ἡ δλ ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ γβ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ η. τῇ δὲ βγ πρὸς ὀρθὰς ἡ εζ, καὶ προσβεβλήσθω ἡ γζ ἴση οὖσα τῇ αδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζη, καὶ αὐτῇ παράλληλος ἡ γθ. καὶ γωνίας οὔσης τῆς ὑπὸ τῶν κγθ, ἀπὸ δοθέντος τοῦ ζ, διήχθω ἡ ζθκ, ποιοῦσα ἴσην τὴν θκ τῇ αδ, ἢ τῇ γζ. τοῦτο γὰρ ὡς δυνατόν, ἐδείχθη διὰ τῆς κογχοειδοῦς. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ κλ ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ αβ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ μ, λέγω ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ γλ πρὸς κγ, ἡ κγ πρὸς μα, καὶ

καὶ ἡ μα πρὸς τὴν αλ. ἐπεὶ ἡ βγ τέτμηται δίχα τῷ ε. καὶ πρόσκειται αὐτῇ ἡ κγ. τὸ ἄρα ὑπὸ βκ γ μετὰ τοῦ ἀπὸ γε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εκ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ εζ. τὸ ἄρα ὑπὸ βκγ μετὰ τῶν ἀπὸ γε ζ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ γζ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ κε ζ, τουτέστι τῷ ἀπὸ κζ. καὶ ἐπεὶ ὡς ἡ μα πρὸς αβ, ἡ μλ πρὸς λκ, ὡς δὲ ἡ μλ πρὸς λκ, οὕτως ἡ βγ πρὸς γκ. καὶ ὡς ἄρα ἡ μα πρὸς αβ, οὕτως ἡ βγ πρὸς γκ. καὶ ἔστι τῆς μὲν αβ ἡμίσεια ἡ αδ, τῆς δὲ βγ διπλῆ ἡ γκ. ἐπεὶ καὶ ἡ λγ τῆς αδ. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἡ μα πρὸς αδ, οὕτως ἡ λγ πρὸς γκ. ἀλλ' ὡς ἡ λγ πρὸς γκ, οὕτως ἡ ζθ πρὸς θκ, διὰ τὰς παραλλήλους τὰς λζ, γθ. καὶ συνθέντι ἄρα ὡς ἡ μδ πρὸς δα, ἡ ζκ πρὸς κθ. ἴση δὲ ὑπόκειται καὶ ἡ αδ τῇ θκ. ἐπεὶ καὶ τῇ γζ ἴση ἐστὶν ἡ αδ. ἴση ἄρα καὶ ἡ μδ τῇ ζκ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ μδ, τὸ ἀπὸ ζκ. καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ μδ, ἴσον τὸ ὑπὸ βμα μετὰ τοῦ ἀπὸ δα τῷ δὲ ἀπὸ ζκ, ἴσον ἐδείχθη τὸ ὑπὸ βκγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γζ.



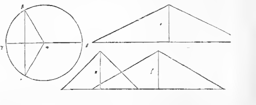
ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ βμα μετὰ τοῦ ἀπὸ αδ, τὸ ὑπὸ βκγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γζ, ὧν τὸ ἀπὸ αδ ἴσον τῷ ἀπὸ γζ. ἴση γὰρ ὑπόκειται ἡ αδ τῇ γζ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ βμα τῷ ὑπὸ βκγ, ὡς ἄρα ἡ μβ πρὸς βκ, ἡ κγ πρὸς αμ. ἀλλ' ὡς ἡ βμ πρὸς βκ, ἡ γλ πρὸς γκ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γλ πρὸς γκ, οὕτως ἡ γκ πρὸς αμ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ λγ πρὸς γκ, ἡ μα πρὸς αλ, καὶ ὡς ἄρα ἡ λγ πρὸς γκ, ἡ γκ πρὸς αμ, καὶ ἡ αμ πρὸς αλ.

ΕΙΣ ΤΟ Β. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Καὶ συνθέντι, ὡς ἡ δθ πρὸς θγ, ἡ γα πρὸς αε. τουτέστι τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. ὡς γὰρ ἐπὶ αὐτῶν τῶν ἐν τῷ ῥητῷ καταγραφῆς. ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ γβα, ἀπὸ τῆς ὀρθῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ βε, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ γα πρὸς αβ, ἡ βα πρὸς αε, καὶ ἡ γβ πρὸς βε. ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ γα πρὸς τὸ ἀπὸ αβ, οὕτως τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ γα πρὸς τὸ ἀπὸ αβ, οὕτως ἡ γα πρὸς αε. ὡς γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. ὡς ἄρα ἡ γα πρὸς αε, οὕτως τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. διὰ δὲ τῶν αὐτῶν δείκνυται, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ γα πρὸς γε, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. διὰ γὰρ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ἐστὶ πάλιν, ὡς ἡ μὲν αγ πρὸς γβ, οὕτως ἡ βγ πρὸς γε. τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ἀπὸ γβ, οὕτως ἡ αγ πρὸς γε, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ἀπὸ γβ, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. καὶ ὡς ἄρα ἡ αγ πρὸς γε, τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε, εἶτα ἐφεξῆς δεικνύναι παρόμενος τῷ βαζ τμήματι τῆς σφαίρας, ἴσον τὸν βκζ κῶνον. ἐκθέμενος κῶνον τὸν ν, βάσιν μὲν ἔχοντα ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ βαζ τμήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, φησὶν ὅτι ὁ ν κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ζαβ στερεῷ τομεῖ, ὡς δέδεικται ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. ἰστέον δὲ ὅτι ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ οὐ τὸν τοιοῦτον τομέα ἀπεδείκνυεν ἴσον ὄντα τῷ ὑπ' ... τοῦ λαμβανομένου, ἀλλὰ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας, καὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἐλάττονος ἡμισφαιρίου, ὅν τινα καὶ κυρίως ἐν τοῖς ὅροις τομέα στερεὸν καλεῖν ἐφαίνετο. ἔφασκεν γὰρ, τομέα δὲ στερεὸν καλέω. ἐπειδὰν σφαῖραν κῶνος τέμνει τὰν κορυφὰν ἔχων πο- τὶ τῷ κέντρῳ τᾶς σφαίρας, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τᾶς τοῦ κώνου ἐπιφανείας τᾶς ἐντὸς τοῦ κώνου. τὸ δὲ νῦν προκείμενον σχῆμα περιέχεται μὲν ὑπὸ κωνικῆς ἐπιφανείας, τὴν κορυφὴν ἐχούσης πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας, καὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ἀλλ' οὐ τῆς ἐντὸς ἀπολαμβανομένης τοῦ κώνου. ὅτι δὲ οὖν τὸ τοιοῦτον σχῆμα ἴσον γίνεται τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ

ἐπιφανείᾳ τῇ σφαιρικῇ τῇ περιεχούσῃ τὸ τμῆμα, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. δειχθήσεται οὕτως διὰ τῶν ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ δεδειγμένων.

Νενοήσθω χωρὶς σφαῖρα, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ τινὶ μὴ διὰ τοῦ κέντρου τῷ περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλῳ. κέντρον δὲ τῆς σφαίρας τὸ α. καὶ νενοήσθω κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ α σημεῖον. ἐκκείσθω δὲ κῶνος ὁ ε, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ὁ ἄρα κῶ-



νος ἴσος ἐστὶ τῇ σφαίρᾳ. τετραπλάσιος γάρ ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτό, ὅπερ ἡ σφαῖρα ἐδείχθη τετραπλασία. ἐκκείσθωσαν δὲ καὶ ἄλλοι δύο κῶνοι οἱ ζ, η, ὧν ὁ μὲν ζ βάσιν ἐχέτω ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κατὰ τὴν βγδ τμήματος, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ὁ δὲ η βάσιν μὲν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κατὰ τὴν βθδ τμήματος, ὕψος δὲ τὸ αὐτό. ὁ ζ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ τομεῖ, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ α, ἐπιφάνεια δὲ σφαιρικὴ ἡ κατὰ τὴν βγδ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ τοῦ ε κώνου βάσις ταῖς τῶν ζ, η κώνων βάσεσι, καί εἰσιν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ε κῶνος, τουτέστιν ἡ σφαῖρα τοῖς ζ, η κώνοις. ἀλλ' ὁ ζ ἴσος ἐδείχθη τῷ περὶ τὴν βγδ στερεῷ τομεῖ, κορυφὴν ἔχοντι τὸ α. λοιπὸς ἄρα ὁ η κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ λοιπῷ τμήματι, βάσιν ἔχων τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κατὰ τὴν βθδ τμήματος, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου.

Εἶτα πάλιν φησίν, ἴσος ἄρα ὁ ν κῶνος, τουτέστιν ὁ βθζα τομεύς, τῷ βθζκ σχήματι. ἐπεὶ γὰρ συνήχθη ὁ ν κῶνος, ἴσος ὢν κώνῳ οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ θκ. ὁ δὲ κῶνος οὗ βάσις μέν ἐστιν ἡ αὐτή, ὕψος δὲ ἡ εκ, ἴσος τῷ τε εἰρημένῳ κώνῳ, καὶ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν εθ. πρὸς ἀλλήλους γάρ εἰσιν ὡς τὰ ὕψη. κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν εθ, λοιπὸν τὸ βθζκ σχῆμα ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν θκ, τουτέστι τῷ ν κώνῳ, τουτέστι τῷ βαθζ τομεῖ.



Ἐπαγαγὼν δὴ τὸ ἐκ τῶν συναχθέντων πόρισμα ἐπὶ τέλει τοῦ θεωρήματος, ἑξῆς δι' ἑτέρας ἀποδείξεως συνάγει τὸ τελευταῖον μέρος τοῦ θεωρήματος, τουτέστιν ὅτι τὸ βαζ τμῆμα σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ βκζ κώνῳ. καὶ προϊών φησιν ὡς ἄρα ἡ κθ πρὸς θγ, ἡ θδ πρὸς δγ. καὶ ὅλη ἡ κδ πρὸς δθ ἐστὶν ὡς ἡ δθ πρὸς δγ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θγ, ἡ θδ πρὸς δγ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, ἡ θγ πρὸς γδ. καὶ συνθέντι, ὡς ἡ κδ πρὸς δθ, ἡ θδ πρὸς δγ. τουτέστιν ἡ κθ πρὸς θα. ἦν γὰρ ὡς ἡ κθ πρὸς θγ, ἡ θδ πρὸς δγ, ἴση δὲ ἡ θγ τῇ θα. καὶ μετ' ὀλίγον, ὡς ἄρα ἡ κθ πρὸς δθ, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ. ἔστιν ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κδ πρὸς τὸ ἀπὸ τῶν κθ δ, οὕτως τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αεγ. νοείσθωσαν γὰρ χωρὶς κείμεναι αἱ κδ, αγ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ. λέγω ὅτι ἐστὶ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ κδ πρὸς τὸ ὑπὸ κθδ, οὕτως τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ὑπὸ

τὸ ὑπὸ αεγ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ. καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς ἡ κδ πρὸς δθ, οὕτως ἡ αγ πρὸς γε, ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ κδ πρὸς τὸ ἀπὸ θδ, ὡς τὸ ἀπὸ αγ, πρὸς τὸ ἀπὸ εγ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ. ἀλλ' ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, οὕτως τὸ ὑπὸ κθδ πρὸς τὸ ἀπὸ θδ, κοινοῦ ὕψους τῆς θδ λαμβανομένης. ὡς δὲ ἡ αε πρὸς εγ, οὕτως τὸ ὑπὸ αεγ πρὸς τὸ ἀπὸ εγ, κοινοῦ πάλιν ὕψους λαμβανομένης τῆς εγ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ κθδ πρὸς τὸ ἀπὸ θδ, οὕτως τὸ ὑπὸ αεγ πρὸς τὸ ἀπὸ εγ. ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ ἀπὸ θδ πρὸς τὸ ἀπὸ δκ, οὕτως τὸ εγ πρὸς τὸ ἀπὸ γα. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ κθδ πρὸς τὸ ἀπὸ κδ, οὕτως τὸ ὑπὸ αεγ πρὸς τὸ ἀπὸ αγ. καὶ ἀνάπαλιν, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΕΙΣ ΤΟ Γ.

Ὡς δὲ οἱ εἰρημένοι κύκλοι πρὸς ἀλλήλους τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὸ ἀπὸ δβ, τουτέστιν ἡ αγ πρὸς γβ. ὡς γὰρ ἐν αὐτῇ τῇ τοῦ ῥητοῦ καταγραφῇ, ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ αδβ κάθετος ἦκται, καὶ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς ἡ δγ μέση ἀνάλογόν ἐστι τῶν τῆς βάσεως τμημάτων. καὶ τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. ὥστε ἐστὶν ὡς ἡ βγ πρὸς δγ, ἡ βδ πρὸς δα. καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ἄρα. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ βγ πρὸς τὸ ἀπὸ γδ, οὕτως ἡ πρώτη ἡ βγ πρὸς τρίτην τὴν γα. καὶ ὡς ἄρα ἡ βγ πρὸς γα, οὕτως τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δα. δοθεὶς δὲ λόγος τῆς αγ πρὸς γβ, ὥστε δοθέν ἐστι τὸ γ σημεῖον. ἐπεὶ γὰρ ἡ σφαῖρα ὑπόκειται δεδομένη, δέδοται ἄρα καὶ ἡ διάμετρος αὐτῆς ἡ αγ. καὶ δέδοται ὁ λόγος τῆς αγ πρὸς γβ. ἐὰν δεδομένον μέγεθος εἰς δεδομένον λόγον διαιρεθῇ, δέδοται ἑκάτερον τῶν τμημάτων, ὥστε δοθεῖσά ἐστιν ἡ αγ, καὶ δοθὲν τὸ α. ἀπὸ γὰρ τῆς κοινῆς τομῆς ἐστι θέσει δεδομένων γραμμῶν, δέδοται ἄρα καὶ τὸ γ.

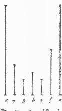
ΕΙΣ ΤΟ Δ.

Καὶ διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον διὰ τῆς κατασκευῆς, ὡς ἡ χδ πρὸς δκ, ἡ κβ πρὸς βρ, καὶ ἡ δχ πρὸς χβ. ἐν γὰρ τῷ πρὸ τούτου συνήγετο οὕτως. ἐπεί ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ κδ, δχ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ρχ πρὸς χβ. διελόντι ὡς ἡ κδ πρὸς δχ, ἡ ρβ πρὸς βχ. ἐναλλάξ, ὡς ἡ κδ, τουτέστιν ἡ κβ πρὸς βρ, ἡ δχ πρὸς χβ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ λχ πρὸς χδ, οὕτως συναμφότερος ἡ κβ, βχ πρὸς χβ. διελόντι καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ λδ πρὸς δκ, ἡ δχ πρὸς χβ. ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ δχ πρὸς χβ, ἡ κβ πρὸς βρ. ὡς ἄρα ἡ λδ πρὸς δκ, ἡ δχ πρὸς χβ, καὶ ἡ κβ πρὸς βρ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ ρλ πρὸς ὅλην κλ, ἐστὶν ὡς ἡ κλ πρὸς λδ. ὡς γὰρ ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ὡς ἄρα ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ κλ πρὸς τὸ ἀπὸ κδ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ρλ πρὸς λκ, ἡ κλ πρὸς λδ. καὶ ὡς ἄρα ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, οὕτως τὸ ἀπὸ ρλ πρὸς τὸ ἀπὸ λκ, οὕτως τὸ ἀπὸ λκ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ. ἀνάλογον γάρ εἰσιν. ὡς ἄρα ἡ ρλ πρὸς λδ, οὕτως τὸ ἀπὸ λκ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ. κείσθω τῇ κβ ἴση ἡ βζ. ὅτι γὰρ ἐκτὸς τοῦ ρ πεσεῖται, δῆλον. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ χδ πρὸς χβ, οὕτως ἡ κβ πρὸς βρ. μείζων δὲ ἡ δχ τῆς βχ, μείζων ἄρα καὶ ἡ κβ τῆς βρ. ἐκτὸς ἄρα τοῦ ρ πίπτει τὸ ζ.

Ἐπεὶ δὲ λόγος ἐστὶ τῆς δλ πρὸς λχ δοθείς, καὶ τῆς ρλ πρὸς λχ, καὶ τῆς ρλ ἄρα πρὸς λδ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ γὰρ ὡς συναμφότερος ἡ κβ, βχ πρὸς βχ, τουτέστιν ἡ ζχ πρὸς χβ, οὕτως ἡ λχ πρὸς χδ. ἀναστρέψαντι ὡς ἡ χζ πρὸς ζβ, οὕτως ἡ χλ πρὸς λδ. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἡ βζ πρὸς ζχ, ἡ λδ πρὸς λχ. δέδοται δὲ ὁ τῆς βζ πρὸς ζχ λόγος. ἐπειδὴ ἡ μὲν ζβ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς δεδομένης σφαίρας. ἡ δὲ βχ τῶν βχ πλευρῶν αὐτῆς δεδομένων, καθ' ὑπόθεσιν τετμημένης τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ διὰ τῆς αγ ἐπιπέδου. καὶ τῆς δβ πρὸς ὀρθὰς οὔσης τῇ αγ δέδοται. καὶ διὰ τοῦτο καὶ ὅλη ἡ χζ καὶ ὁ τῆς χζ πρὸς ζβ. ὥστε καὶ ὁ τῆς λχ πρὸς κδ λόγος ἐστὶ δοθείς. πάλιν ἐπειδὴ δέδοται ὁ λόγος τῶν τμημάτων, καὶ ὁ τοῦ λαγ κώνου πρὸς αεγ κῶνον λόγος ἐστὶ δοθείς. ὥστε καὶ ὁ τῆς λχ πρὸς χε. πρὸς ἀλλήλους γάρ εἰσιν ὡς τὰ ὕψη, καὶ ὅλης ἄρα τῆς ελ πρὸς τὴν λχ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ οὖν ἑκατέρας τῶν ρλ, λδ πρὸς τὴν λχ λόγος ἐστὶ δοθείς, καὶ τῆς ρλ ἄρα πρὸς λδ λόγος ἐστὶ δοθείς. τὰ γὰρ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχοντα δεδομένον, καὶ πρὸς ἄλληλα λόγον ἕξει δεδομένον. ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς ρλ πρὸς λχ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ρλ πρὸς λδ, καὶ ἡ λδ πρὸς λχ. Ὅτι μὲν ἡ σύνθεσις τῶν λόγων λαμβάνεται τῆς λδ μέσης λαμβανομένης, ὡς κἂν τῇ στοιχειώσει ἐλαμβάνετο φανερόν. ἐπεὶ δὲ τὸ λεγόμενον ἀδιαρθρώτως, καὶ οὐχ οὕτως ὥστε τὴν γνῶσιν ἀναπεπληρῶσθαι λέλεκται,

Περὶ συνθέσεως λόγων.

κται, ὡς ἔστιν εὑρεῖν ἐντυγχάνοντας πάππῳ τε καὶ θέωνι καὶ ἀρπαδίῳ, ἐν πολλοῖς συντάγμασιν οὐκ ἀποδεικτικῆς, ἀλλ' ἐπαγωγῇ τὸ λεγόμενον παριστῶσιν, οὐδὲν ἄτοπον πρὸς βραχὺ διατρίψαντας τῷ λόγῳ, τὸ σαφέστερον παραστῆσαι. φημὶ τοίνυν, ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμῶν, ἤτοι μεγεθῶν μέσος τις ὅρος ληφθῇ, ὁ τῶν ἐξ ἀρχῆς ληφθέντων ἀριθμῶν λόγος, σύγκειται ἐκ τοῦ λόγου ὃν ἔχει ὁ πρῶτος πρὸς τὸν μέσον, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ μέσος πρὸς τὸν τρίτον, ὑπομνηστέον δὴ πρότερον πῶς ἐλέγετο λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι. ὡς γὰρ ἐν τῇ στοιχειώσει, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα, πηλικότητος δηλονότι λεγομένης τοῦ ἀριθμοῦ, οὗ παρώνυμός ἐστιν ὁ διδόμενος λόγος, ὡς φασίν ἄλλοι τε καὶ νικόμαχος ἐν τῷ πρώτῳ τῷ περὶ μουσικῆς, καὶ ἡρώνας ἐν τῷ ὑπομνήματι τῷ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν εἰσαγωγήν. τουτέστιν δὲ εἰπεῖν καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὸν ἑπόμενον ὅρον τοῦ λόγου, ὃ ποιοῦντος τὸν ἡγούμενον. καὶ κυριώτερον μὲν ἐπὶ τῶν πολλαπλασίων ἡ πηλικότης ἂν λαμβάνοιτο ἐπὶ δὲ τῶν ἐπιμορίων, ἢ ἐπιμερῶν, οὐκ ἔτι τὴν πηλικότητα δυνατὸν λαμβάνεσθαι, ἀδιαιρέτου μενούσης τῆς μονάδος, ὡς τὸ ἐπ' ἐκείνων διαιρετέον τὴν μονάδα. εἰ καὶ μὴ κατὰ τὸ προσῆκον τῇ ἀριθμητικῇ, ἀλλὰ τῇ λογιστικῇ τυγχάνει. διαιρεῖται δὲ ἡ μονὰς ἐπὶ τὸ μόριον, ἢ τὰ μόρια ἀφ' ὧν ὠνόμασται ὁ λόγος, ὥς τε εἶναι ὡς ἐν σαφεστέρῳ τῷ λέγειν, τοῦ μὲν ἡμιολίου λόγου πηλικότητα πρὸς τῇ μονάδι, καὶ τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος. τοῦ δὲ ἐπιτρίτου πρὸς τῇ μονάδι τὸ τρίτον, ὥς τε καθὰ καὶ ἀνωτέρω εἴρηται τὴν πηλικότητα τοῦ λόγου ἐπὶ τὸν ἑπόμενον ὅρον, πολλαπλασιαζομένην ποιεῖν τὸν ἡγούμενον. τὸ γὰρ ἐννέα πρὸς τὰ ἓξ ἡμιολίου πηλικότης, ὃ ἡ μονὰς καὶ τὸ ἥμισυ πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τὸν ϛ ποιεῖ τὸν θ, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων δὲ τὸ αὐτὸ ἔξεστι κατανοεῖν. τούτων δὴ προσαφηνισθέντων ἐπανακτέον ἐπὶ τὸ προτεθέν. Ἔστωσαν γὰρ οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ α, β. μέσος δὲ αὐτῶν εἰλήφθω τις ὁ γ. λεκτέον δὴ, ὅτι ὁ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος συνῆπται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν β. εἰλήφθω γὰρ τοῦ μὲν αγ λόγου πηλικότης ὁ δ, τοῦ δὲ γβ ὁ ε. ὁ δ ἄρα ε τὸν δ πολλαπλασιάσας, τὸν ζ ποιείτω. λέγω ὅτι ὁ ζ πηλικότης ἐστὶ τοῦ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγου, τουτέστιν ὅτι ὁ ζ τὸν β πολλαπλασιάσας τὸν α ποιεῖ. ὁ γὰρ β τὸν ζ πολλαπλασιάσας, τὸν η ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ β τὸν μὲν ζ πολλαπλασιάσας τὸν η πεποίηκεν, τὸν δὲ ε πολλαπλασιάσας τὸν γ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ζ πρὸς τὸν ε, ὁ η πρὸς τὸν γ. πάλιν ἐπεὶ ὁ δ τὸν μὲν ε πολλαπλασιάσας τὸν ζ πεποίηκεν, τὸν δὲ γ πολλαπλασιάσας τὸν α πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ε πρὸς τὸν γ, ὁ ζ πρὸς τὸν α. ἐναλλὰξ ὡς ὁ ε πρὸς τὸν ζ, ὁ γ πρὸς τὸν α. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ὁ ζ πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ α πρὸς τὸν γ. ἀλλ' ὡς ὁ ζ πρὸς τὸν ε, ἐδείχθη ὁ η πρὸς τὸν γ. καὶ ὡς ἄρα η πρὸς τὸν γ, ὁ α πρὸς τὸν γ. ἴσος ἄρα ὁ α τῷ η. ἀλλ' ὁ β



τὸν ζ πολλαπλασιάσας, τὸν η πεποίηκεν. καὶ ὁ β ἄρα τὸν ζ πολλαπλασιάσας τὸν α ποιεῖ. ὁ ζ ἄρα πηλικότης ἐστὶ τοῦ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγου. καὶ ἔστιν ὁ ζ τοῦ δ ἐπὶ τὸν ε πολλαπλασιασθέντος, τουτέστι τῆς πηλικότητος τοῦ αγ λόγου ἐπὶ τὴν πηλικότητα τοῦ γβ λόγου. ὁ ἄρα τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος, σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν β, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἵνα δὲ καὶ ἐπὶ ὑποδείγματος φανερὸν γένηται τὸ εἰρημένον, παρεμπιπτέτω τοῦ ιβ, καὶ τοῦ β, μέσος τις ἀριθμὸς ὁ δ. λέγω ὁ τοῦ ιβ πρὸς τὸν β λόγος, τουτέστιν ὁ ἑξαπλάσιος, σύγκειται ἔκ τε τοῦ τριπλασίου τοῦ ιβ πρὸς τὰ δ, καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ δ πρὸς τὰ β. ἐὰν γὰρ τὰς πηλικότητας τῶν λόγων πολλαπλασιάσωμεν ἐπ' ἀλλήλας, τουτέστι τὸν γ ἐπὶ τὸν β, γίνεται ὁ ϛ πηλικότης ὢν τοῦ ιβ πρὸς τὰ β λόγου. καὶ ἔστιν ἑξαπλάσιος, ὅπερ καὶ προέκειτο ὑποδεῖξαι. εἰ δὲ καὶ ὁ μέσος παρεμπίπτων μὴ ὑπάρχῃ τοῦ μὲν μείζονος ἐλάττων, τοῦ δὲ ἐλάττονος μείζων, ἀλλ' ἢ τὸ ἀνάπαλιν, ἢ ἀμφοτέρων μείζων, ἢ ἀμφοτέρων ἐλάττων. καὶ οὕτως ἡ σύνθεσις, ἡ προειρημένη ἀκολουθήσει, τοῦ θ καὶ τοῦ ϛ μέσος τις παρεμπιπτέτω ἀμφοτέρων μείζων ὁ ιβ. λέγω ὅτι ἔκ τε τοῦ ὑπ' ἐπιτρίτου τοῦ θ πρὸς τὸν ιβ λόγου,

καὶ τοῦ

ἢ τοῦ διπλασίου τοῦ ι β πρὸς τὸν ϛ, σύγκειται ὁ ἡμιόλιος τοῦ θ πρὸς τὸν ϛ. ἡ γὰρ πηλικότης τοῦ θ πρὸς τὸν ι β λόγου ἐστὶ τρία τέταρτα, τουτέστιν ἥμισυ καὶ τέταρτον. ἡ δὲ πηλικότης τοῦ ι β πρὸς τὸν ϛ ἐστὶν ὁ β. ἐὰν οὖν πολλαπλασιάσωμεν τὰ β ἐπὶ τὸ ἥμισυ καὶ τέταρτον, γίνεται μονὰς καὶ ἥμισυ, ἥ τις πηλικότης ἐστὶ τοῦ ἡμιολίου λόγου, ὃν ἔχει καὶ ὁ θ πρὸς τὸν ϛ. ὁμοίως δὲ ἐὰν τοῦ θ καὶ τοῦ ϛ μέσος ἐμπέσῃ ὁ δ, ἐκ τοῦ θ πρὸς δ διπλασιεπιτετάρτου, καὶ τοῦ δ πρὸς ϛ ὑφημιολίου, σύγκειται ὁ ἡμιόλιος λόγος. πάλιν γὰρ τὴν πηλικότητα τοῦ διπλασιεπιτετάρτου, τουτέστι β δ΄, ἐπὶ τὴν πηλικότητα τοῦ ὑφημιολίου, τουτέστι τὰ δύο τρίτα, πολλαπλασιάσαντες ἕξομεν τὸ ἓν ἥμισυ, πηλικότητα τοῦ ἡμιολίου ὡς εἴρηται λόγου, καὶ ἐπὶ πάντων ὁμοίως ὁ αὐτὸς ἁρμόσει λόγος. συμφανὲς δὲ ἐκ τῶν εἰρημένων, ὡς ἐὰν δύο δοθέντων ἀριθμῶν, ἤτοι μεγεθῶν, ἐμπέσῃ εἷς μέσος, πλείους δὲ παρεμπέσωσιν ὅροι, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ πάντων τῶν λόγων, ὧν ἔχουσιν οἱ κατὰ τὸ ἑξῆς κείμενοι, ἀρχόμενοι ἀπὸ πρώτου, καὶ λήγοντες εἰς τὸν ἔσχατον ἐν τῇ ἐχομένους τάξει. δύο γὰρ ὅρων τῶν α, β παρεμπιπτέτωσαν πλείους ἑνὸς οἱ γ, δ. λέγω ὅτι ὁ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος, σύγκειται ἐκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ δ πρὸς τὸν β. ἐπεὶ γὰρ ὁ τοῦ α πρὸς τὸν β σύγκειται ἐκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ δ πρὸς τὸν β, ὡς ἀνωτέρω εἴρηται. ὁ δὲ τοῦ α πρὸς τὸν δ λόγος σύγκειται ἐκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν δ. ὁ ἄρα τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος, συνῆπται ἐκ τε τοῦ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ δ πρὸς τὸν β. ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν δειχθήσεται.

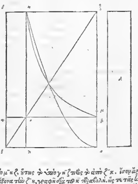


Ἔτι γε τοῦ ῥητοῦ φησίν, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ρ λ πρὸς λ δ, ἐδείχθη τὸ ἀπὸ β δ πρὸς τὸ ἀπὸ δ χ. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ὡς ἡ ρ λ πρὸς λ δ, τὸ ἀπὸ κ λ πρὸς τὸ ἀπὸ δ λ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ κ λ πρὸς τὸ ἀπὸ λ δ, οὕτως τὸ ἀπὸ β δ πρὸς τὸ ἀπὸ δ χ. ἐδείχθη γάρ, ὡς ἡ κ λ πρὸς λ δ, ἡ β δ πρὸς δ χ, διὰ τὸ συνθέντι. ὡς ἄρα ἡ ρ λ πρὸς λ δ, τὸ ἀπὸ β δ πρὸς τὸ ἀπὸ δ χ. πεποιήσθω δὲ ὡς ἡ ρ λ πρὸς λ χ, ἡ β ζ πρὸς ζ θ. τὸ θ σημεῖον ὅπως ποτὲ μὲν ἐὰν τεθῇ ὅσον πρὸς τὴν ἀκολουθίαν τῆς ἀποδείξεως, κατ' οὐδὲν ἐμποδίζεται τῷ λόγῳ. ὅτι δὲ καθὰ γε τῇ καταγραφῇ κεῖται ἀεὶ μεταξὺ τῶν β, ρ πίπτει, οὕτω δῆλον. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ λ κ πρὸς δ κ, τουτέστι πρὸς κ β, οὕτως ἡ κ ρ πρὸς ρ β. καὶ ὡς ἄρα εἷς πρὸς ἕνα, οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα, ὡς ἡ λ ρ πρὸς ρ κ, ἡ κ ρ πρὸς ρ β. μείζονα δὲ λόγον ἔχει ἡ λ ρ πρὸς ρ χ, ἤπερ ἡ λ ρ πρὸς ρ κ. καὶ ἡ λ ρ ἄρα πρὸς ρ χ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κ ρ πρὸς ρ β, τουτέστιν ἡ ζ β πρὸς ζ ρ. ἐὰν ἄρα ποιήσωμεν ὡς ρ λ πρὸς λ χ, οὕτως τὴν β ζ πρὸς τινά, ἔσται πρὸς μείζονα τῆς ζ ρ. φανερὸν δὲ αὐτόθεν ὅτι ἡ ζ θ τῆς θ β μείζων ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ὡς ἡ λ δ πρὸς δ κ, ἡ δ χ πρὸς χ β, καὶ ἡ κ β πρὸς β ρ. μείζων δὲ ἡ δ χ τῆς χ β, μείζων ἄρα καὶ ἡ λ δ τῆς δ κ, καὶ ἡ κ β τῆς β ρ. ὥστε καὶ ἡ λ δ τῆς β ρ. καὶ ἡ λ χ τῆς χ ρ μείζων ἐστίν, ὥστε καὶ ἡ θ ζ τῆς θ β. λοιπὸν ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ β δ, τουτέστι τὸ δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ δ χ, οὕτως ἡ ζ χ πρὸς ζ θ. ἐπεὶ γὰρ τοῦ τῆς β ζ πρὸς θ ζ ὁ αὐτὸς ἐδείχθη ὁ συγκείμενος ἐκ τοῦ ἀπὸ β δ πρὸς τὸ ἀπὸ δ χ, καὶ τῆς β ζ πρὸς ζ χ. ὁ δὲ τοῦ τῆς β ζ πρὸς ζ θ ἐστί, καὶ ὁ συγκείμενος ἐκ τοῦ τῆς β ζ πρὸς ζ χ, καὶ τοῦ τῆς ζ χ πρὸς ζ θ λόγου. καὶ ὁ συγκείμενος ἄρα ἐκ τοῦ ἀπὸ β δ πρὸς τὸ ἀπὸ δ χ, καὶ τοῦ τῆς β ζ πρὸς ζ χ ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ τῆς β ζ πρὸς ζ χ, καὶ τοῦ τῆς χ ζ πρὸς ζ θ. ἐὰν οὖν τὸν γε ἑκατέροις τοῖς λόγοις κοινὸν ἀφέλωμεν τὸν τῆς β ζ πρὸς ζ χ, λοιπὸς ὁ τοῦ ἀπὸ β δ πρὸς τὸ ἀπὸ δ χ λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς χ ζ πρὸς ζ θ. καὶ δεῖ δοθεῖσαν τὴν δ ζ τέμνειν κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὴν χ ζ πρὸς δοθεῖσαν, τουτέστι τὴν ζ θ, οὕτως τὸ δοθέν, τουτέστι τὸ ἀπὸ β δ πρὸς τὸ ἀπὸ δ χ. τοῦτο δὲ οὕτως ἁπλῶς μὲν λεγόμενον ἔχει διορισμόν. προστιθεμένων δὲ τῶν προβλημάτων τῶν γε ἐνθάδε ὑπαρχόντων, τουτέστι τοῦ τε διπλασίαν εἶναι τὴν δ β τῆς β ζ, καὶ μείζονα τὴν β ζ τῆς ζ θ, ὡς κατὰ τὴν ἀνάλυσιν οὐκ ἔχει διορισμόν, καὶ ἔσται πρόβλημα τοιοῦτον. δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν δ β, β ζ, καὶ διπλασίας οὔσης τῆς δ β τῆς β ζ, καὶ σημείου ἐπὶ τῆς β ζ τοῦ θ, τεμεῖν τὴν δ β κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὸ ἀπὸ δ β πρὸς τὸ ἀπὸ δ χ, τὴν χ ζ πρὸς ζ θ. ἑκάτερα δὲ ταῦτα ἐπὶ τέλει ἀναλυθήσεται, καὶ συντεθήσεται. ἐπὶ τέλει μὲν τὸ προ-

ρηθὲν ἐπηγγείλατο δεῖξαι, ἐν οὐδενὶ δὲ τῶν ἀντιγράφων εὑρεῖν. ὅθεν καὶ τὸ ἐπάγγελμα, ὅθεν καὶ Διονυσόδωρον μὲν εὑρίσκομεν μὴ τῶν αὐτῶν ἐπιτυχόντα, ἀδυνατήσαντα δὲ ἐπιβαλεῖν τῷ καταλειφθέντι λήμματι, ἐφ' ἑκατέραν ὁδὸν τοῦ ὅλου προβλήματος ἐλθεῖν, ἥν τινα ἑξῆς γράψομεν. Διοκλῆς μέντοι καὶ αὐτὸς ἐν τῷ περὶ πυρείων αὐτῷ συγγεγραμμένῳ βιβλίῳ, ἐπηγγέλθαι νομίζων τὸν Ἀρχιμήδην, μὴ πεποιηκέναι δὲ τὸ ἐπάγγελμα, αὐτὸς ἀναπληροῦν ἐπεχείρησε. καὶ τὸ ἐπιχείρημα ἑξῆς γράψομεν. ἔστι γὰρ καὶ αὐτὸ οὐδεμίαν μὲν ἔχον πρὸς τὰ παραλειπόμενα λόγον. ὁμοίως δὲ τῷ Διονυσοδώρῳ δι' ἑτέρας ἀποδείξεως κατασκευάζον τὸ πρόβλημα. ἐν τινι μέντοι παλαιῷ βιβλίῳ, οὐδὲ γὰρ τῆς εἰς πολλὰ ζητήσεως ἀπέστημεν, ἐντετύχαμεν θεωρήμασι γεγραμμένοις, οὐκ ὀλίγην τὴν ἐκ τῶν πταισμάτων ἔχουσιν ἀσάφειαν περί τε τὰς καταγραφὰς πολυτρόπως ἡμαρτημένοις. τῶν μέντοι ζητουμένων, εἶχον τὴν ὑπόστασιν, ἐν μέρει δὲ τὴν Ἀρχιμήδει φίλην Δωρίδα γλῶσσαν ἀπέσωζον, καὶ τοῖς συνήθεσι τῷ ἀρχαίῳ τῶν πραγμάτων ὀνόμασιν ἐγέγραπτο. τῆς μὲν παραβολῆς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς ὀνομαζομένης, τῆς δ' ὑπερβολῆς ἀμβλυγωνίου κώνου τομῆς. ὡς ἐξ αὐτῶν διανοεῖσθαι, μὴ ἄρα καὶ αὐτὸς εἴη τὰ ἐν τῷ τέλει ἐπηγγελμένα γράφεσθαι. ὅθεν σπουδαιότερον ἐντυγχάνοντες, αὐτὸ μὲν τὸ ῥητὸν ὡς γέγραπται διὰ πλῆθος, ὡς εἴρηται τῶν πταισμάτων δυσχερὲς εὑρόντες, τὰς ἐννοίας κατὰ μικρὸν ἀποσυλήσαντες κοινοτέρα καὶ σαφεστέρα κατὰ τὸ δυνατὸν λέξει γράφομεν. καθόλου δὲ πρῶτον τὸ θεώρημα γραφήσεται, ἵνα τὸ λεγόμενον ὑπ' αὐτοῦ σαφηνισθῇ περὶ τῶν † διορισμένων. εἶτα καὶ τοῖς ἀναλελυμένοις ἐν τῷ προβλήματι προσαρμοσθήσεται.

† Διορισμῶν

Εὐθείας δοθείσης τῆς α β, καὶ ἑτέρας τῆς α γ, καὶ χωρίου τοῦ δ, προκείσθω λαβεῖν ἐπὶ τῆς α β σημεῖον ὡς τὸ ε. ὥστε εἶναι ὡς τὴν α ε πρὸς α γ, οὕτω τὸ δ χωρίον πρὸς τὸ ἀπὸ ε β γεγονέτω, καὶ κείσθω ἡ α γ πρὸς ὀρθὰς τῇ α β. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γ ε διήχθω ἐπὶ τὸ ζ. καὶ ἤχθω διὰ τοῦ γ τῇ α β παράλληλος ἡ γ η, διὰ δὲ τοῦ β τῇ α γ παράλληλος ἡ ζ η β, συμπίπτουσα ἑκατέρα τῶν γ ε, γ η. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ η θ παραλληλόγραμμον, καὶ διὰ τοῦ ε ὁποτέρᾳ τῶν γ θ, η ζ παράλληλος ἤχθω ἡ κ ε λ. καὶ τῷ δ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ γ η μ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ε α πρὸς α γ, οὕτως τὸ δ πρὸς

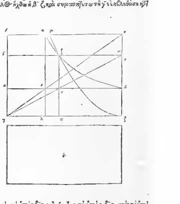


τὸ ἀπὸ ε β. ὡς δὲ ἡ ε α πρὸς α γ, οὕτως ἡ γ η πρὸς η ζ. ὡς δὲ ἡ γ η πρὸς η ζ, οὕτως τὸ ἀπὸ γ η πρὸς τὸ ὑπὸ γ η ζ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ γ η πρὸς τὸ ὑπὸ γ η ζ, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ ε β, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ κ ζ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ἀπὸ γ η πρὸς τὸ δ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ γ η μ, οὕτως τὸ ὑπὸ γ η ζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζ κ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ γ η πρὸς τὸ ὑπὸ γ η μ, οὕτως ἡ γ η πρὸς η μ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γ η πρὸς η μ, οὕτως τὸ ὑπὸ γ η ζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζ κ. ἀλλ' ὡς ἡ γ η πρὸς η μ, τῆς η ζ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γ η ζ πρὸς τὸ ὑπὸ μ η ζ. ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ γ η ζ πρὸς τὸ ὑπὸ μ η ζ, οὕτως τὸ ὑπὸ γ η ζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζ κ. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ μ η ζ τῷ ἀπὸ ζ κ. ἐὰν ἄρα περὶ ἄξονα τὴν ζ η, γραφῇ διὰ τοῦ η παραβολή. ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν η μ, ἥξει διὰ τοῦ κ. καὶ ἔσται θέσει δεδομένη, διὰ τὸ δεδομένην εἶναι τὴν η μ τῷ μεγέθει, περιέχουσαν μετὰ τῆς η γ δεδομένης δοθὲν τὸ δ. τὸ ἄρα κ ἅπτεται θέσει δεδομένης παραβολῆς. γεγράφθω οὖν, ὡς εἴρηται. καὶ ἔστω ὡς ἡ η κ. πάλιν ἐπειδὴ τὸ θ λ χωρίον

ἴσον

ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γ β, τουτέστι τὸ ὑπὸ θ κ λ τῷ ὑπὸ α β ζ. ἐὰν διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς θ γ, γ ζ γραφῇ ὑπερβολὴ, ἥξει διὰ τοῦ κ, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ η θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. καὶ ἔσται θέσει δεδομένη, διὰ τὸ καὶ ἑκατέραν τῶν θ γ, γ ζ, ἔτι μὴν καὶ τὸ β τῇ θέσει δεδόσθαι. γεγράφθω ὡς εἴρηται, καὶ ἔστω ὡς ἡ κ β. τὸ ἄρα κ ἅπτεται θέσει δεδομένης ὑπερβολῆς. ἥπτετο δὲ καὶ θέσει δεδομένης παραβολῆς. δέδοται ἄρα τὸ κ, καὶ ἔστιν ἀπ' αὐτοῦ κάθετος ἡ κ ε, ἐπὶ θέσει δεδομένην τὴν α β. δέδοται ἄρα τὸ ε. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ε α πρὸς τὴν δοθεῖσαν τὴν α γ, οὕτως δοθὲν τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ ε β. δύο ἄρα στερεῶν ὧν βάσεις τὸ ἀπὸ ε β, καὶ τὸ δ, ὕψη δὲ αἱ ε α, α γ, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ὥστε ἴσα ἐστὶ τὰ στερεά. τὸ ἄρα ἀπὸ ε β ἐπὶ τὴν ε α, ἴσον ἐστὶ τῷ δοθέντι τῷ δ, ἐπὶ δοθεῖσαν τὴν γ α. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ β ε ἐπὶ τὴν ε α μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν ὁμοίως λαμβανομένων ἐπὶ τῆς β α, ὅταν ἡ διπλασία ἡ β ε τῆς ε α, ὡς δειχθήσεται. δεῖ ἄρα τὸ δοθὲν ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς β ε ἐπὶ τὴν ε α.

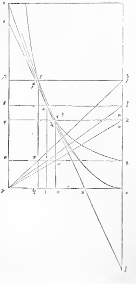
Συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ α β, ἄλλη δέ τις δοθεῖσα ἡ α γ, τὸ δὲ δοθὲν χωρίον τὸ δ. καὶ δέον ἔστω τεμεῖν τὴν α β, ὥστε εἶναι ὡς τὸ ἓν τμῆμα πρὸς τὴν δοθεῖσαν τὴν α γ, οὕτως τὸ δοθὲν τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος. εἰλήφθω τῆς α β τρίτον μέρος ἡ α ε, τὸ ἄρα δ ἐπὶ τὴν α γ, ἤτοι μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς β ε ἐπὶ τὴν ε α, ἢ ἴσον, ἢ ἔλασσον. εἰ μὲν οὖν μεῖζόν ἐστιν, οὐ συντεθήσεται, ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει δέδεικται. εἰ δὲ ἴσον ἐστὶ, τὸ ε σημεῖον ποιήσει τὸ πρόβλημα. ἴσων γὰρ ὄντων τῶν στερεῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ε α πρὸς α γ, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ β ε. εἰ δὲ ἔλασσόν ἐστι τὸ δ ἐπὶ τὴν α γ, τοῦ ἀπὸ β ε ἐπὶ τὴν ε α, συντεθήσεται οὕτως. κείσθω ἡ α γ πρὸς ὀρθὰς τῇ α β, καὶ διὰ τοῦ γ τῇ α β παράλληλος ἤχθω ἡ γ ζ. διὰ δὲ τοῦ β τῇ α γ παράλληλος ἤχθω ἡ β ζ, καὶ συμπιπτέτω τῇ γ ε ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ η. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ζ θ παραλληλόγραμμον, καὶ διὰ τοῦ ε τῇ ζ η παράλληλος ἤχθω ἡ κ ε λ. ἐπεὶ οὖν τὸ δ ἐπὶ τὴν α γ, ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ β ε ἐπὶ τὴν ε α. ἐστὶν ὡς ἡ ε α πρὸς α γ, οὕτως τὸ δ πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ἀπὸ τῆς β ε, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς η κ. ἔστω οὖν ὡς ἡ ε α πρὸς α γ, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ η μ. καὶ τῷ δ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ γ ζ ν. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ε α πρὸς α γ, οὕτως τὸ δ, τουτέστι τὸ ὑπὸ γ ζ ν πρὸς τὸ ἀπὸ η μ. ἀλλ' ὡς ἡ ε α πρὸς α γ, οὕτως ἡ γ ζ πρὸς ζ η, ὡς δὲ ἡ γ ζ πρὸς ζ η, οὕτως τὸ ἀπὸ γ ζ πρὸς τὸ ὑπὸ γ ζ η. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ γ ζ πρὸς τὸ ὑπὸ γ ζ η, οὕτως τὸ ὑπὸ γ ζ ν πρὸς τὸ ἀπὸ η μ. καὶ ἐναλλὰξ, ὡς τὸ ἀπὸ γ ζ πρὸς τὸ ὑπὸ γ ζ ν, οὕτως τὸ ὑπὸ γ ζ η πρὸς τὸ ἀπὸ η μ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ γ ζ πρὸς τὸ ὑπὸ γ ζ ν, οὕτως ἡ γ ζ πρὸς ζ ν. ὡς δὲ ἡ γ ζ πρὸς ζ ν, τῆς ζ η κοινοῦ ὕψους



λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γ ζ η πρὸς τὸ ὑπὸ ν ζ η. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ γ ζ η πρὸς τὸ ὑπὸ ν ζ η, οὕτως τὸ ὑπὸ γ ζ η πρὸς τὸ ἀπὸ η μ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ η μ τῷ ὑπὸ η ζ ν. ἐὰν ἄρα διὰ τοῦ ζ περὶ ἄξονα τὴν ζ η γράψωμεν παραβολὴν, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν ζ ν, ἥξει διὰ τοῦ μ. γεγράφθω, καὶ ἔστω ἡ μ ξ ζ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ θ λ τῷ α ζ, τουτέστι τὸ ὑπὸ θ κ λ τῷ ὑπὸ α β ζ, ἐὰν διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς θ γ, γ ζ γράψωμεν ὑπερβολὴν, ἥ-

ξει διὰ τοῦ κ, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ η θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. γεγράφθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ βκ, τέμνουσα τὴν παραβολὴν κατὰ τὸ ξ. καὶ ἀπὸ τοῦ ξ ἐπὶ τὴν αβ κάθετος ἤχθω ἡ ξοπ. καὶ διὰ τοῦ ξ τῇ αβ παράλληλος ἤχθω ἡ ρξσ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ βκ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ θγ, γζ, καὶ παράλληλοι ἠγμέναι εἰσὶν αἱ ρξπ, ταῖς αβζ. ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ρξπ τῷ ὑπὸ αβζ, ὥστε καὶ τὸ ρο τῷ οζ. ἐὰν ἄρα ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ τὸ σ ἐπιζευχθῇ, ἥξει διὰ τοῦ ο. ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ γοσ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ οα πρὸς αγ, οὕτως ἡ οβ πρὸς βσ, τουτέστιν ἡ γζ πρὸς ζσ. ὡς δὲ ἡ γζ πρὸς ζσ, τῆς ζν κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γζν πρὸς τὸ ὑπὸ σζν. καὶ ὡς ἄρα ἡ οα πρὸς αγ, οὕτως τὸ ὑπὸ γζν πρὸς τὸ ὑπὸ σζν. καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ γζν, τὸ δ χωρίον. τῷ δὲ ὑπὸ σζν, ἴσον τὸ ἀπὸ σξ, τουτέστι τὸ ἀπὸ βο, διὰ τὴν παραβολήν. ὡς ἄρα ἡ οα πρὸς αγ, οὕτως τὸ δ χωρίον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βο. εἴληπται ἄρα τὸ ο σημεῖον, ποιοῦν τὸ πρόβλημα.

Ὅτι διπλασίας οὔσης τῆς βε τῆς εα, τὸ ἀπὸ τῆς βε ἐπὶ τὴν εα μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν ὁμοίως λαμβανομένων ἐπὶ τῆς βα, δειχθήσεται οὕτως. ἔστω γὰρ ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει πάλιν δοθεῖσα εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς τῇ αβ, ἡ αγ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γε ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ διὰ τοῦ β παραλλήλῳ, ἠγμένῃ τῇ αγ κατὰ τὸ ζ. καὶ διὰ τῶν γ ζ παράλληλοι τῇ αβ ἤχθωσαν αἱ θζ, γη. καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ γα ἐπὶ τὸ θ. καὶ ταύτῃ παράλληλος διὰ τοῦ ε ἤχθω ἡ κελ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως τὸ ὑπὸ γημ πρὸς τὸ ἀπὸ εβ. τὸ ἄρα ἀπὸ βε ἐπὶ τὴν εα, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γημ ἐπὶ τὴν αγ, διὰ τὸ δύο στερεῶν ἀντιπεπονθέναι τὰς βάσεις τοῖς ὕψεσι. λέγω οὖν, ὅτι τὸ ὑπὸ γημ ἐπὶ τὴν αγ, μέγιστόν ἐστι πάντων ὁμοίως ἐπὶ τῆς βα λαμβανομένων. γεγράφθω γὰρ διὰ τοῦ η περὶ ἄξονα τὴν ζη παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν ημ. ἥξει δὴ διὰ τοῦ κ, ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει δέδεικται. καὶ συμπεσεῖται ἐκβαλλομένη τῇ θγ παραλλήλῳ οὔσῃ τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς, διὰ τὸ ἕβδομον καὶ εἰκοστὸν θεώρημα τοῦ πρώτου βιβλίου τοῦ ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω κατὰ τὸ ν. καὶ διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς νγη, γεγράφθω ὑπερβολή. ἥξει ἄρα διὰ τοῦ κ, ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει εἴρηται. ἐρχέσθω οὖν ὡς ἡ βκ. καὶ ἐκβληθείσῃ τῇ ζη ἴση κείσθω ἡ ηξ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ξκ. καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ο. φανερὸν ἄρα ὅτι ἐφάπτεται τῆς παραβολῆς

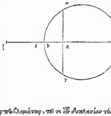


διὰ

διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ τετάρτου καὶ τριακοστοῦ θεωρήματος τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ἐπεὶ οὖν διπλῆ ἐστιν ἡ β ε τῆς ε α, οὕτως γὰρ ὑπόκειται, τουτέστιν ἡ ζ κ τῆς κ θ. καί ἐστιν ὅμοιον τὸ ο θ κ τρίγωνον τῷ ξ ζ κ τριγώνῳ, διπλασία ἐστὶ καὶ ἡ ξ κ τῆς κ ο. ἔστι δὲ καὶ ἡ ξ κ τῆς κ π διπλῆ, διὰ τὸ καὶ τὴν ξ ζ τῆς ξ η. καὶ παράλληλον εἶναι τὴν π η τῇ κ ζ. ἴση ἄρα ἡ ο κ τῇ κ π, ἡ ἄρα ο κ π ψαύουσα τῆς παραβολῆς, καὶ μεταξὺ οὖσα τῶν ἀσυμπτώτων δίχα τέμνεται. ἐφάπτεται ἄρα τῆς ὑπερβολῆς, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ τρίτου θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ἐφήπτετο δὲ καὶ τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ αὐτὸ κ. ἡ ἄρα παραβολὴ τῆς ὑπερβολῆς ἐφάπτεται κατὰ τὸ κ. νενοήσθω οὖν καὶ ἡ ὑπερβολὴ προσεκβαλλομένη ὡς ἐπὶ τὸ ρ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς α β τυχὸν σημεῖον τὸ σ, καὶ διὰ τοῦ σ τῇ κ λ παράλληλος ἤχθω ἡ τ σ υ. καὶ συμβαλλέτω τῇ ὑπερβολῇ κατὰ τὸ τ, καὶ διὰ τοῦ τ τῇ γ η παράλληλος ἤχθω ἡ φ τ χ. ἐπεὶ οὖν διὰ τὴν ὑπερβολὴν καὶ τὰς ἀσυμπτώτους, ἴσον ἐστὶ τὸ φ υ τῷ γ β, κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ γ σ, ἴσον γὰρ τὸ φ σ τῷ σ η, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ τὸ χ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἥξει διὰ τοῦ σ. ἐρχέσθω, καί ἐστω ὡς ἡ γ σ χ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ψ χ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ χ η μ διὰ τὴν παραβολὴν, τὸ ἀπὸ τ χ ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ χ η μ. γεγονέτω οὖν τῷ ἀπὸ τ χ ἴσον τὸ ὑπὸ χ η ω. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ σ α πρὸς α γ, οὕτως ἡ γ η πρὸς η χ. ἀλλ' ὡς ἡ γ η πρὸς η χ τῆς η ω κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γ η ω πρὸς τὸ ὑπὸ χ η ω. καὶ πρὸς τὸ ἴσον αὐτῷ, τὸ ἀπὸ χ τ, τουτέστι τὸ ἀπὸ β σ ἐπὶ τὴν σ α ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γ η ω ἐπὶ τὴν γ α, τὸ δὲ ὑπὸ γ η ω ἐπὶ τὴν γ α ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ γ η μ ἐπὶ τὴν γ α, τὸ ἄρα ἀπὸ β σ ἐπὶ τῆς σ α ἔλαττον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ β ε ἐπὶ τῆς ε α. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ πάντων τῶν σημείων τῶν μεταξὺ λαμβανομένων τῶν ε, β. ἀλλὰ δὴ εἰλήφθω μεταξὺ τῶν ε, α σημεῖον τὸ ς. λέγω ὅτι καὶ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς β ε ἐπὶ τὴν ε α μεῖζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ β ς ἐπὶ τὴν ς α. τῶν γὰρ αὐτῶν κατεσκευασμένων ἤχθω διὰ τοῦ ς τῇ κ λ παράλληλος ἡ ψ ς ρ. καὶ συμβαλέτω τῇ ὑπερβολῇ κατὰ τὸ ρ. συμβαλεῖ γὰρ αὐτῇ διὰ τὸ παράλληλος εἶναι τῇ ἀσυμπτώτῳ. καὶ διὰ τοῦ ρ παράλληλος ἀχθεῖσα τῇ α β ἡ α ρ β. συμβαλέτω τῇ η ζ ἐκβαλλομένῃ κατὰ τὸ β. καὶ ἐπεὶ πάλιν διὰ τὴν ὑπερβολὴν ἴσον ἐστὶ τὸ γ ψ καὶ τῷ α η, ἡ ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ τὸ β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, ἥξει διὰ τοῦ ς. ἐρχέσθω, καί ἐστω ὡς ἡ γ ς β. καὶ ἐπεὶ πάλιν διὰ τὴν παραβολὴν ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ α β τῷ ὑπὸ β η μ, τὸ ἄρα ἀπὸ ρ β ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ β η μ. γεγονέτω τὸ ἀπὸ ρ β ἴσον τῷ ὑπὸ β η ω. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ς α πρὸς α γ, οὕτως ἡ γ η πρὸς η β. ἀλλ' ὡς ἡ γ η πρὸς η β τῆς η ω κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γ η ω πρὸς τὸ ὑπὸ β η ω. τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ ρ β, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ β ς. τὸ ἄρα ἀπὸ β ς ἐπὶ τὴν ς α, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γ η ω ἐπὶ τὴν γ α. καὶ μεῖζον τὸ ὑπὸ γ η μ τοῦ ὑπὸ γ η ω. μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ β ε ἐπὶ τὴν ε α, τοῦ ἀπὸ β ς ἐπὶ τὴν ς α. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ πάντων τῶν σημείων τῶν μεταξὺ τῶν ε, α λαμβανομένων. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ πάντων τῶν μεταξὺ τῶν ε, β λαμβανομένων. πάντων ἄρα τῶν ἐπὶ τῆς α β ὁμοίως λαμβανομένων, μέγιστον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς β ε ἐπὶ τὴν ε α, ὅταν ἡ διπλασία ἡ β ε τῆς ε α. Ἐπιστῆσαι δὲ χρὴ καὶ τοῖς ἀκολουθοῦσι κατὰ τὴν εἰρημένην καταγραφήν. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται τὸ ἀπὸ β σ ἐπὶ τὴν σ α, καὶ τὸ ἀπὸ β ς ἐπὶ τὴν ς α ἔλασσον τοῦ ἀπὸ β ε ἐπὶ τῆς ε α. δυνατόν ἐστι καὶ τοῦ δοθέντος χωρίου ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἐλάσσονος ὄντος τοῦ ἀπὸ τῆς β ε ἐπὶ τῆς ε α κατὰ δύο σημεῖα τῆς α β τεμνομένης ποιεῖν τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα. τοῦτο δὲ γίνεται, εἰ νοήσαιμεν περὶ διάμετρον τὴν χ η γραφομένην παραβολὴν. ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν η ω. ἡ γὰρ τοιαύτη παραβολὴ πάντως ἔρχεται διὰ τοῦ τ. καὶ ἐπειδὴ ἀνάγκη αὐτὴν συμπίπτειν τῇ γ ν παραλλήλῳ οὔσῃ τῇ διαμέτρῳ, δῆλον ὅτι τέμνει τὴν ὑπερβολὴν, καὶ κατ' ἄλλο σημεῖον ἀνώτερον τοῦ κ, ὡς ἐνταῦθα κατὰ τὸ ρ. καὶ ἀπὸ τοῦ ρ ἐπὶ τὴν α β κάθετος ἀγομένη, ὡς ἐνταῦθα ἡ ρ ς τέμνει τὴν α β κατὰ τὸ ς. ὥστε τὸ ς σημεῖον ποιεῖν τὸ πρόβλημα, καὶ ἴσον γίνεσθαι τὸ ἀπὸ β σ ἐπὶ τὴν σ α, τῷ ἀπὸ β ς ἐπὶ τὴν ς α, ὡς ἐστι διὰ τῶν προειρημένων ἀποδείξεων ἐμφανές. ὥστε δυνατοῦ ὄντος ἐπὶ τῆς β α δύο σημεῖα λαμβάνειν, ποιοῦντα τὸ ζητούμενον, ἔξεστιν ὁπότερον τις βούλοιτο λαμβάνειν, ἢ τὸ μεταξὺ τῶν ε, β. ἢ τὸ μεταξὺ τῶν ε, α. εἰ μὲν γὰρ τὸ μεταξὺ τῶν ε, β ὡς εἴρηται τῆς διὰ τῶν η, τ σημείων γραφομένης παραβολῆς κατὰ δύο σημεῖα τεμνούσης τὴν ὑπερβολὴν τὸ μὲν ἐγγύτερον τοῦ η, τουτέστι τοῦ ἄξονος τῆς παραβολῆς εὑρήσει τὸ μεταξὺ τῶν ε, β, ὡς ἐνταῦθα τὸ τ εὑρίσκει τὸ σ. τὸ δὲ ἀπώτερον τὸ μεταξὺ τῶν ε, α ὡς ἐνταῦθα τὸ ρ εὑρίσκει τὸ ς.

Καθόλου μὲν οὖν οὕτως ἀναλέλυται καὶ συντέθειται τὸ πρόβλημα. ἵνα δὲ καὶ τοῖς ἀρχι-

μηδείοις ῥήμασιν ἐφαρμοσθῇ, νενοήσθω ὡς ἐν αὐτῇ τῇ τοῦ ῥητοῦ καταγραφῇ, διάμετρος μὲν τῆς σφαίρας ἡ δβ. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ βζ, καὶ ἡ δεδομένη ἡ ζθ. κατεσκευάσαμεν ἄρα φησὶν εἰς τὸ τὴν δζ τεμεῖν κατὰ τὸ χ. ὥστε εἶναι ὡς τὴν χζ πρὸς τὴν δοθεῖσαν, οὕτως τὸ δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δχ. τοῦτο δὲ ἁπλῶς μὲν λεγόμενον ἔχει διορισμόν. εἰ γὰρ τὸ δοθὲν ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν μεῖζον ἐτύγχανεν τοῦ ἀπὸ τῆς δβ ἐπὶ τὴν βζ, ἀδύνατον ἦν τὸ πρόβλημα ὡς δειχθήσεται. εἰ δὲ ἴσον, τὸ β σημεῖον ἐποίει τὸ πρόβλημα, καὶ οὕτως δὲ οὐδὲν ἦν πρὸς τὴν ἐξ ἀρχῆς ἀρχιμήδους πρόθεσιν. ἡ γὰρ σφαῖρα οὐκ ἐτέμνετο εἰς τὸν δοθέντα λόγον. ἁπλῶς γὰρ λεγόμενον εἶχεν πρὸς διορισμόν. προστιθεμένων δὲ τῶν προβλημάτων τῶν ἐνθάδε ὑπαρχόντων, τουτέστι τοῦ τε διπλασίαν εἶναι τὴν δβ τῆς ζβ, καὶ τοῦ μείζονα εἶναι τὴν βζ τῆς ζθ, οὐκ ἔχει διορισμόν. τὸ γὰρ ἀπὸ δβ τὸ δοθὲν ἐπὶ τὴν ζθ τὴν δοθεῖσαν ἔλαττόν ἐστι, τοῦ ἀπὸ τῆς δβ ἐπὶ τῆς βζ. διὰ τὸ τὴν βζ τῆς ζθ μείζονα εἶναι, οὕπερ ὑπάρχοντος ἐδείξαμεν δυνατόν, καὶ οὕτως πρόκειται τὸ πρόβλημα. κατανοεῖν δὲ χρὴ καὶ τοῖς ὑπ' ἀρχιμήδους λεγομένοις συμφώνως ἔχουσιν τοῖς ὑφ' ἡμῶν ἀναλελυμένοις. πρότερον μὲν γὰρ μετὰ τὴν ἀνάλυσιν αὐτοῦ καθόλου τὸ εἰς ὃ κατήντησεν λέγων, φησί. δοθεῖσαν τὴν δζ τεμεῖν δεῖ κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὸ χζ πρὸς δοθεῖσαν, οὕτως τὸ δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δχ. εἶτα εἰπὼν ὡς καθόλου μὲν τὸ λεγόμενον ἔχει διορισμόν. προστεθέντων δὲ τῶν ὑπ' αὐτοῦ εὑρεθέντων προβλημάτων, τοῦ τε εἶναι διπλασίαν τὴν δβ τῆς βζ. καὶ μείζονα τὴν βζ τῆς ζθ. μὴ ἔχειν διορισμὸν μερικώτερον, ἐπαναλαμβάνει τὸ πρόβλημα. καὶ φησίν. ὅτι καὶ ἔσται πρόβλημα τοιοῦτον. δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν δβ, βζ, καὶ διπλασίας οὔσης τῆς δβ τῆς βζ, καὶ σημείου ἐπὶ τῆς βζ τοῦ θ, τεμεῖν τὴν δβ κατὰ τὸ χ, οὐκ ἔτι ὡς πρότερον τὴν δζ εἰπών, ἀλλὰ τὴν δβ δεῖν τεμεῖν διὰ τὸ ὡς ἀνωτέρω ἡμεῖς ἀπεδείξαμεν εἰδέναι αὐτόν, ὡς δύο σημεῖα ἐστὶ τὰ λαμβανόμενα ἐπὶ τῆς δζ, καὶ ποιοῦντα τὸ πρόβλημα, ἓν μὲν τὸ μεταξὺ τῶν δ, β. ἕτερον δὲ τὸ μεταξὺ τῶν β, ζ. ὧν τὸ μεταξὺ τῶν δ, β ἦν τὸ πρὸς τὴν ἐξ ἀρχῆς πρόθεσιν χρήσιμον.



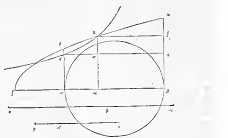
Ταῦτα μὲν οὖν ἀκόλουθα τοῖς ἀρχιμήδους ῥήμασι, κατὰ τὸ δυνατὸν σαφῶς ἀπεγραψάμεθα. ἐπεὶ δὲ ὡς προείρηται καὶ διονυσόδωρος οὐδαμῶς τοῖς ἐπὶ τέλει γραφομένοις παρ' ἀρχιμήδους ἐπηγγελμένοις ἐντυχών, ἀτονήσας δὲ ὥσπερ προσευρεῖν τὰ μὴ ἐκτεθέντα, ἐφ' ἑτέραν ὁδὸν βαδίζων τοῦ ὅλου προβλήματος, οὐκ ἀχαρὶν εὑρέσεως συνέγραψε τὸ πρῶτον ἀναγκαῖον, ᾠήθημεν δεῖν καὶ αὐτὸν τούτοις ὑποσυνάψαι διορθωσάμενοι κατὰ δύναμιν. καὶ γὰρ αὐτὸς ἐκ πολλῆς ἀμελετησίας τῶν ἀνθρώπων τὰ πολλὰ τῶν ἀποδείξεων τῷ πλήθει τῶν πλασμάτων ἠφανισμένην ἔχων ἐν πᾶσιν οἷς ἡμεῖς ἐνετύχαμεν ἀντιγράφοις ἐφόρετο.

ΩΣ ΔΙΟΝΥΣΟΔΩΡΟΣ.

Την δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα αὐτῆς πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν δοθέντα. ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα, ἧς διάμετρος ἡ αβ. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος, ὃν ἔχει ἡ γδ πρὸς δε. δεῖ δὴ τεμεῖν τὴν σφαῖραν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὴν αβ, ὥστε τὸ τμῆμα οὗ κορυφὴ τὸ α, πρὸς τὸ τμῆμα οὗ κορυφὴ τὸ β λόγον ἔχειν, ὃν ἔχει ἡ γδ πρὸς δε. ἐκβεβλήσθω ἡ βα ἐπὶ τὸ ζ. καὶ κείσθω τῆς αβ ἡμίσεια ἡ αζ. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ γε πρὸς εδ, ἐχέτω ἡ ζα πρὸς αη, καὶ ἔστω ἡ αη πρὸς ὀρθὰς τῇ αβ. καὶ τῶν ζα, αη μέση ἀνάλογον εἰλήφθω ἡ αθ. μείζων ἄρα ἡ αθ τῆς αη. καὶ περὶ ἄξονα τὴν ζβ διὰ τοῦ ζ γεγράφθω παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν αη. ἥξει ἄρα διὰ τοῦ θ. ἐπειδὴ τὸ ὑπὸ ζαη ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ αθ. γεγράφθω οὖν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ζθκ. καὶ διὰ τοῦ β ἀνήχθω παρὰ

τὴν

τὴν α θ ἐκ β α, καὶ τεμνέτω τὴν παραβολὴν κατὰ τὸ κ, καὶ διὰ τοῦ γ. περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ζ β κ, γεγράφθω ὑπερβολή. τεμεῖ δὴ τὴν παραβολὴν μεταξὺ τῶν θ, κ, τεμνέτω κατὰ τὸ λ. καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὴν α β κάθετος ἤχθω ἡ λ μ. καὶ διὰ τῶν ε, λ τῇ α β παράλλη-



λοι ἤχθωσαν αἱ η ν, λ ξ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ η λ, ἀσύμπτωτοι δὲ α β κ, ἐπὶ παράλληλοι ταῖς α η ν, αἱ μ λ ξ, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ α η ν τῷ ὑπὸ μ λ ξ, διὰ τὸ η θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ἀλλ᾽ ἡ μὲν η ν τῇ α β ἴση ἐστὶν, ἡ δὲ λ ξ τῇ μ β, τὸ ἄρα ὑπὸ λ μ β ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ η α β. καὶ διὰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον εἶν τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ λ μ πρὸς η α, οὕτως ἡ α β πρὸς β μ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ λ μ πρὸς τὸ ἀπὸ η α, οὕτως τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ β μ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν παραβολὴν τὸ ἀπὸ λ μ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ζ μ α η, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζ μ πρὸς μ λ, ἡ μ λ πρὸς α η. καὶ ὡς ἄρα ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης. ὡς ἄρα ἡ ζ μ πρὸς α η, οὕτως τὸ ἀπὸ λ μ πρὸς τὸ ἀπὸ η α. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ λ μ πρὸς τὸ ἀπὸ α η, οὕτως ἐδείχθη τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ β μ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ β μ, οὕτως ἡ ζ μ πρὸς α η. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ β μ, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α β, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ β μ. καὶ ὡς ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α β, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ β μ, οὕτως ἡ ζ μ πρὸς α β. ὁ ἄρα κῶνος βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α β, ὕψος δὲ τὴν α η, ἴσος ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ β μ, ὕψος δὲ τὴν ζ μ. ὧν γὰρ κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις ταῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσὶν ἐκεῖνοι. ἀλλ᾽ ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α β, ὕψος δὲ τὴν ζ α, πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτὴν, ὕψος δὲ τὴν α η, ἐστὶν ὡς ἡ ζ α πρὸς α η, τουτέστιν ἡ γ ε πρὸς ε δ. ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ὡς τὰ ὕψη. καὶ ὁ κῶνος ὁ ἄρα βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α β, ὕψος δὲ τὴν ζ α, πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ β μ, ὕψος δὲ τὴν ζ μ, ἐστὶν ὡς ἡ γ ε πρὸς ε δ. ἀλλ᾽ ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α β, ὕψος δὲ τὴν ζ α, ἴσος ἐστὶ τῇ σφαίρᾳ. ὁ δὲ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ β μ, ὕψος δὲ τὴν ζ μ, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, οὗ κορυφὴ μέν ἐστι τὸ β, ὕψος δὲ ἡ β μ, ὡς ἑξῆς δειχθήσεται. καὶ ἡ σφαῖρα ἄρα πρὸς τὸ εἰρημένον τμῆμα λόγον ἔχει, ὃν ἡ γ ε πρὸς ε δ. καὶ διελόντι τὸ τμῆμα, οὗ κορυφὴ τὸ α, ὕψος δὲ ἡ α μ πρὸς τὸ

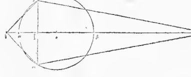
τμῆ

τμήματος κορυφὴ τὸ β, ὕψος δὲ ἡ βμ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ γδ πρὸς δε. τὸ ἄρα διὰ τῆς λμ ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον ὀρθὸν πρὸς τὴν αβ, τέμνει τὴν σφαῖραν εἰς τὸν δοθέντα λόγον, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ὅτι δὲ ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ βμ, ὕψος δὲ τὴν ζμ, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ β, ὕψος δὲ ἡ βμ, δειχθήσεται οὕτως. γεγονέτω γὰρ ὡς ἡ ζμ πρὸς μα, οὕτως ἡ ομ πρὸς μβ. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ τὴν ομ, ἴσος ἐστὶ τμήματι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ζμ πρὸς μα, οὕτως ἡ ομ πρὸς μβ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ζμ πρὸς μο, οὕτως ἡ αμ πρὸς μβ, ἀλλ' ὡς ἡ αμ πρὸς μβ, οὕτως τὸ ἀπὸ πμ πρὸς τὸ ἀπὸ μβ. καὶ οὕτως ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ πμ, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ μβ. ὡς ἄρα ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ πμ, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ μβ, οὕτως ἡ μζ πρὸς μο. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ μβ, ὕψος δὲ τὴν ζμ, ἴσος ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ πμ, ὕψος δὲ τὴν μο. ἀντιπεπόνθασι γὰρ αὐτῶν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ὥστε καὶ τῷ τμήματι ἴσος ἐστί.

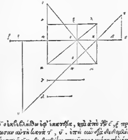
ΩΣ ΔΙΟΚΛΗΣ ΕΝ ΤΩ ΠΕΡΙ ΠΥΡΙΩΝ.

Γράφει δὲ καὶ ὁ Διοκλῆς ἐν τῷ περὶ πυρίων, προλέγων τάδε. ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου Ἀρχιμήδης ἀπέδειξεν, ὅτι πᾶν τμῆμα σφαίρας ἴσον ἐστὶ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ εὐθεῖαν τινὰ λόγον ἔχουσαν πρὸς τὴν ἀπὸ τῆς τοῦ τμήματος κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ ἡ τοῦ ἐναλλὰξ τμήματος κάθετος πρὸς τὴν τοῦ ἐναλλὰξ τμήματος κάθετον. οἷον ἐὰν ᾖ σφαῖρα ἡ αβγ, καὶ τμηθῇ ἐπιπέδῳ τινὶ τῷ περὶ διάμετρον τὴν γδ κύκλῳ. καὶ διαμέτρου οὔσης τῆς αβ, κέντρου δὲ τοῦ ε. ποιήσωμεν ὡς συναμφότερον τὴν εα, αζ πρὸς ζα. οὕτως τὴν ηζ πρὸς ζβ. ἔτι τε ὡς συναμφότερον τὴν εβ, βζ πρὸς ζβ, οὕτως τὴν θζ πρὸς ζα, ἀποδέ-



δεικται ὅτι τὸ μὲν γβδ τμῆμα τῆς σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ὁ περὶ διάμετρον τὴν γδ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ζη. τὸ δὲ γαδ τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ἡ αὐτή, ὕψος δὲ ἡ θζ. προτεθέντος οὖν αὐτῷ τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν δοθέντα, κατασκευάσας τὰ εἰρημένα φησί. λόγος ἄρα δοθεὶς καὶ τοῦ κώνου, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν γδ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ζθ, πρὸς τὸν κῶνον οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ἡ αὐτή, ὕψος δὲ ἡ ζη. καὶ γὰρ τοῦτο ἀποδέδεικται, οἱ κῶνοι οἱ ἐπὶ τῆς ἴσης βάσεως ὄντες, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη. λόγος ἄρα τῆς θζ πρὸς ζη δοθείς. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ θζ πρὸς ζα, οὕτως συναμφότερος ἡ εβζ πρὸς τὴν ζβ. διελόντι ὡς ἡ θα πρὸς αζ, οὕτως ἡ εβ πρὸς ζβ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ηβ πρὸς ζβ, οὕτως ἡ αὐτὴ εὐθεῖα πρὸς τὴν ζα. γέγονεν οὖν πρόβλημα τοιοῦτον. θέσει οὔσης εὐθείας τῆς αβ, καὶ δύο δοθέντων σημείων τῶν α, β, καὶ δοθείσης τῆς εβ, τεμεῖν τὴν αβ κατὰ τὸ ζ, καὶ προσθεῖναι τὰς θα, βη. ὥστε λόγον εἶναι τῆς θζ πρὸς ζη δοθέντα, ἔτι τε εἶναι ὡς μὲν τὴν θα πρὸς αζ, οὕτως τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πρὸς ζβ. ὡς δὲ τὴν ηβ πρὸς βζ, οὕτως τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν πρὸς ζα. τοῦτο δὲ ἑξῆς δέδεικται. ὁ γὰρ Ἀρχιμήδης μακρότερον αὐτὸ δείξας, καὶ οὕτως εἰς πρόβλημα ἕτερον ἀπήγαγε, ὃ οὐκ ἀποδείκνυσιν ἐν τοῖς περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου.

Θέσει δεδομένης εὐθείας τῆς α β, καὶ δύο δοθέντων σημείων τῶν α, β, καὶ λόγου τοῦ ὃν ἔχει ἡ γ πρὸς τὴν δ, τεμεῖν τὴν α β κατὰ τὸ ε, καὶ προσθεῖναι τὰς ζ α, η β. ὥστε εἶναι ὡς τὴν γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὴν ζ ε πρὸς τὴν ε η. ἔτι τε εἶναι ὡς τὴν ζ α πρὸς α ε, οὕτως δοθεῖσάν τινα εὐθεῖαν πρὸς τὴν β ε. ὡς δὲ τὴν η β πρὸς β ε, οὕτως τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πρὸς τὴν ε α. γεγονέτω, καὶ τῇ α β πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ θ α κ, λ β μ, καὶ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴση κείσθω ἑκατέρα τῶν α κ, β μ. καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ κ ε, μ ε, ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ λ, θ. ἐπεζεύχθω δὲ καὶ ἡ κ μ. καὶ διὰ τοῦ ε τῇ κ α παράλληλος ἤχθω ἡ ξ ε ο π. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ζ α πρὸς α ε, οὕτως ἡ μ β πρὸς β ε. ὑπόκειται γάρ. ὡς δὲ ἡ μ β πρὸς β ε, οὕτως ἡ θ α πρὸς α ε, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων. ὡς ἄρα ἡ ζ α πρὸς α ε, οὕτως ἡ θ α πρὸς α ε. ἴση ἄρα ἡ ζ α τῇ θ α. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ β η τῇ β λ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ θ α ε πρὸς συναμφότερον τὴν λ β ε, οὕτως συναμφότερος ἡ κ α ε πρὸς συναμφότερον τὴν λ β ε. ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς α ε πρὸς ε β. τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς λ β ε, καὶ συναμφοτέρου τῆς θ α ε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς κ α ε, καὶ συναμφοτέρου τῆς μ β ε. κείσθω τῇ κ α ἴση ἑκατέρα τῶν α ς, β c. ἐπεὶ οὖν συναμφότερος μὲν ἡ θ α ε ἴση ἐστὶ τῇ ζ ε, συναμφότερος δὲ ἡ λ β ε ἴση τῇ ε η, συναμφότερος δὲ ἡ κ α ε ἴση τῇ ς ε, συναμφότερος δὲ ἡ μ β ε τῇ ε c. καὶ ἐδείχθη τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς θ α ε, καὶ συναμφοτέρου τῆς λ β ε, ἴσον τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς κ α ε, καὶ συναμφοτέρου τῆς μ β ε. τὸ ἄρα ὑπὸ ζ ε η ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ς ε c. διὰ δὴ τὸ τὸ ε μεταξὺ τῶν α, ζ πίπτειν, τὸ ἐπ' ἀμφότερα τὸ η πεσεῖται, καὶ τὸ ἀνάπαλιν. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως ἡ ζ ε πρὸς ε η. ὡς δὲ ἡ ζ ε πρὸς ε η, οὕτως τὸ ὑπὸ ζ ε η πρὸς τὸ ἀπὸ ε η. ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ζ ε η πρὸς τὸ ἀπὸ ε η. τὸ δὲ ὑπὸ ζ ε η ἴσον ἐδείχθη τῷ ὑπὸ ς ε c. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ς ε c πρὸς τὸ ἀπὸ ε η. κείσθω τῇ β ε ἴση ἡ ε ο, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ β ο ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα, καὶ ἀπὸ τῶν c, ς πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσαι αἱ c τ, ς υ, συμβαλλέτωσαν αὐτῇ κατὰ τ, υ. ἐπεὶ οὖν διὰ δεδομένου τοῦ β, πρὸς θέσει δεδομένην τὴν α β, ἦκται ἡ τ υ, δεδομένην ποιοῦσαν γωνίαν τὴν ὑπὸ ε β ο ἡμίσειαν ὀρθῆς, δέδοται ἡ τ υ τῇ θέσει. καὶ ἀπὸ δεδομένων τῶν c, ς θέσει ἠγμέναι αἱ c τ, ς υ τέμνουσιν αὐτὴν κατὰ τὰ τ, υ. δοθέντα ἄρα ἐστὶ τὰ τ, υ. δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ τ υ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν τῶν ε ο β, c τ υ τριγώνων ὁμοιότητα ἐστὶν ὡς ἡ τ β πρὸς β ο, οὕτως ἡ c β πρὸς β ε. καὶ συνθέντι ἐστὶν, ὡς ἡ τ ο πρὸς ο β, οὕτως ἡ c ε πρὸς ε β. ἀλλ' ὡς ἡ β ο πρὸς ο υ, οὕτως ἡ β ε πρὸς ε ς. δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ τ ο πρὸς ο υ, οὕτως ἡ c ε πρὸς ε ς. ἀλλ' ὡς ἡ τ ο πρὸς ο υ, οὕτως τὸ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ο υ. ὡς δὲ ἡ c ε πρὸς ε ς, οὕτως τὸ ὑπὸ c ε ς πρὸς τὸ ἀπὸ ε ς. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ο υ, οὕτως τὸ ὑπὸ c ε ς πρὸς τὸ ἀπὸ ε ς. καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ὑπὸ c ε ς, οὕτως τὸ ἀπὸ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ε ς. τὸ δὲ ἀπὸ ο υ τοῦ ἀπὸ ε ς διπλάσιον. ἐπειδὴ καὶ τὸ ἀπὸ ο β τοῦ ἀπὸ β ε. καὶ τὸ ὑπὸ τ ο υ ἄρα τοῦ ὑπὸ c ε ς ἐστὶ διπλάσιον. τὸ δὲ ὑπὸ c ε ς πρὸς τὸ ἀπὸ ε η ἐδείχθη λόγον ἔχειν ὃν ἔχει ἡ γ πρὸς τὴν δ. καὶ τὸ ὑπὸ τ ο υ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ε η λόγον ἔχει, ὃν ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ. τὸ δὲ ἀπὸ ε η ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ξ ο. ἑκατέρα γὰρ τῶν ε η, ξ ο ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ λ β ε. τὸ ἄρα ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ξ ο λόγον ἔχει, ὃν ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ, καὶ δέδοται ὁ τῆς διπλασίας τῆς γ πρὸς τὴν δ λόγος. δέδοται ἄρα καὶ ὁ τοῦ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ξ ο λόγος. ἐὰν ἄρα ποιήσωμεν ὡς τὴν διπλασίαν τῆς γ, οὕτως τὴν τ υ πρὸς ἄλλην τινὰ ὡς τὴν φ, καὶ περὶ τὴν τ υ γράψωμεν ἔλλειψιν ὥστε τὰς καταγομένας ἐν τῇ ὑπὸ ξ ο β γωνίᾳ, τουτέστιν ἐν ἡμισείᾳ ὀρθῆς, δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν φ ἐλλείποντα ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ τ υ φ, ἥξει διὰ τοῦ ξ, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ



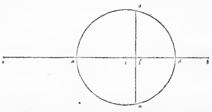
εἰκοστοῦ θεωρήματος τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. γεγράφθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ υξ τ. τὸ ἄρα ξ σημεῖον ἅπτεται θέσει δεδομένης ἐλλείψεως. καὶ ἐπεὶ διαγώνιός ἐστιν ἡ λκ τοῦ νμ παραλληλογράμμου, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ νξω τῷ ὑπὸ αβμ. ἐὰν ἄρα διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς θκμ γράψωμεν ὑπερβολήν, ἥξει διὰ τοῦ ξ. καὶ ἔσται θέσει δεδομένη διὰ τὸ καὶ τὸ β σημεῖον τῇ θέσει δεδόσθαι, καὶ ἑκατέραν τῶν αβ, βμ (καὶ διὰ τοῦτο τὰς θκμ ἀσυμπτώτους) γεγράφθω. καὶ ἔστω ὡς ἡ ξβ, τὸ ἄρα ξ σημεῖον ἅπτεται θέσει δεδομένης ὑπερβολῆς. ἥπτετο δὲ καὶ θέσει δεδομένης ἐλλείψεως. δέδοται ἄρα τὸ ξ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ κάθετος ἡ ξε. δέδοται ἄρα τὸ ε. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ ζα πρὸς αε. καὶ δέδοται ἡ αε, δέδοται ἄρα καὶ ἡ αζ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δέδοται καὶ ἡ ηβ.

Συντεθήσεται δὲ οὕτως. ὡς γὰρ τῆς ἐπὶ αὐτῆς καταγραφῆς, ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἣν δεῖ τεμεῖν ἡ αβ. ἡ δὲ δοθεῖσα ἑτέρα ἡ ακ. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς γ πρὸς τὴν δ. ἤχθω τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἡ βμ ἴση οὖσα τῇ ακ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ κμ. καὶ τῇ μὲν κα ἴση κείσθω ἡ αρ, τῇ δὲ ἡ βς. ἀπὸ τῶν ρ, ς πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ρυ, ςτ. καὶ πρὸς τῷ β σημείῳ συνεστάτω ἡμίσεια ὀρθῆς ἡ ὑπὸ αβο, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ βο ἐφ' ἑκάτερα τεμνέτω τὰς ςτ, ρυ κατὰ τὰ τ, υ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ δ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς γ, οὕτως ἡ τυ πρὸς τὴν φ, καὶ περὶ τὴν τυ γεγράφθω ἔλλειψις, ὥστε τὰς καταγομένας ἐν ἡμισείᾳ ὀρθῆς δύνασθαι τὰ παρακείμενα παρὰ τὴν φ, ἐλλείποντα ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ τυ φ. διὰ δὲ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ακ, κμ γεγράφθω ὑπερβολὴ ἡ βξ, τέμνουσα τὴν ἔλλειψιν κατὰ τὸ ξ, καὶ ἀπὸ τοῦ ξ ἐπὶ τὴν αβ κάθετος ἤχθω ἡ ξε, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ω. διὰ δὲ τοῦ ξ τῇ αβ παράλληλος ἤχθω ἡ λξν, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ κα, μβ ἐπὶ τὰ λ, θ. καὶ ἡ με ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ κν κατὰ τὸ θ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ βξ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ θκ, κμ, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ νξω τῷ ὑπὸ αβμ, διὰ τὸ η θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. καὶ διὰ τοῦτο εὐθεῖά ἐστιν ἡ κελ. κείσθω οὖν τῇ μὲν θα ἴση ἡ αζ, τῇ δὲ λβ ἴση ἡ βη. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ, οὕτως ἡ φ πρὸς τὴν τυ. ὡς δὲ ἡ φ πρὸς τὴν τυ, οὕτως τὸ ὑπὸ τον πρὸς τὸ ἀπὸ ξο, διὰ τὸ κα θεώρημα τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ὡς ἄρα ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ τον πρὸς τὸ ἀπὸ ξο. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ τβ πρὸς βο, οὕτως ἡ σβ πρὸς βε. καὶ συνθέντι ὡς ἡ το πρὸς οβ, οὕτως ἡ σε πρὸς εβ. ἀλλ' ὡς ἡ βο πρὸς ου, οὕτως ἡ βε πρὸς ερ. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ το πρὸς ου, οὕτως ἡ σε πρὸς ερ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τον πρὸς τὸ ἀπὸ ου, οὕτως τὸ ὑπὸ σερ πρὸς τὸ ἀπὸ ερ. ἐναλλὰξ ὡς τὸ ὑπὸ τον πρὸς τὸ ὑπὸ σερ, οὕτως τὸ ἀπὸ ου πρὸς τὸ ἀπὸ ερ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ ου τοῦ ἀπὸ ερ διπλάσιον, διὰ τὸ καὶ τὸ ἀπὸ βο τοῦ ἀπὸ βε. ἴση γάρ ἐστιν ἡ βε τῇ εο, ἡμισείας ὀρθῆς οὔσης ἑκατέρας τῶν πρὸς τοῖς β, ο. καὶ τὸ ὑπὸ τον ἄρα διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ σερ. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ τον πρὸς τὸ ἀπὸ ξο, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση. ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ρες πρὸς τὸ ἀπὸ ξο. ἴση δὲ ἡ ξο τῇ εκ, διὰ τὸ ἑκατέραν αὐτῶν ἴσην εἶναι συναμφοτέρῳ τῇ λβε. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ θαε πρὸς συναμφότερον τὴν μβε, οὕτως συναμφότερος ἡ καε πρὸς συναμφότερον τὴν λβε. ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς αε πρὸς εβ. τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς θαε, καὶ συναμφοτέρου τῆς λβε, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς καε, καὶ συναμφοτέρου τῆς μβε. ἀλλὰ συναμφοτέρῳ μὲν τῇ θαε ἴση ἐστὶν ἡ ζε. συναμφοτέρῳ δὲ τῇ λβε, ἴση ἡ εη. συναμφοτέρῳ τῇ καε ἴση ἡ ρε. συναμφοτέρῳ δὲ τῇ μβε, ἴση ἡ ες. τὸ ἄρα ὑπὸ ζεη ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ρες. ἀλλ' ὡς ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ρες πρὸς τὸ ἀπὸ εξ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ζεη πρὸς τὸ ἀπὸ εκ. ἀλλ' ὡς τὸ ὑπὸ ζεη πρὸς τὸ ἀπὸ εκ, οὕτως ἡ ζε πρὸς εκ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως ἡ ζε πρὸς εκ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ θα πρὸς αε. ἴση δὲ ἡ θα τῇ ζα. ὡς ἄρα ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ ζα πρὸς αε. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ὡς ἡ κα πρὸς αε, οὕτως ἡ ηβ πρὸς βε. εὐθείας ἄρα δοθείσης τῆς αβ, καὶ ἑτέρας τῆς ακ, καὶ λόγου τοῦ τῆς γ πρὸς τὴν δ, εἴληπται ἐπὶ τῆς αβ τυχὸν σημεῖον τὸ ε, καὶ προσετέθησαν εὐθεῖαι αἱ ζα, ηβ, καὶ γέγονε τῷ δοθέντι λόγῳ ἡ ζε πρὸς εη. ἔτι τε ἐστὶν ὡς ἡ δοθεῖσα ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ ζα πρὸς αε. ὡς δὲ αὐτὴ ἡ δοθεῖσα ἡ κα πρὸς αε, οὕτως ἡ ηβ πρὸς βε, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

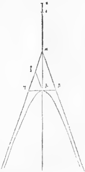
Τούτων δεδειγμένων δυνατόν ἐστι τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν εἰς τὸν δοθέντα λόγον τεμεῖν οὕτως. ἔστω γὰρ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος, ὃν δεῖ ἔχειν τὰ τμή-

ματα

ματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα, ὃ τῆς γ πρὸς τὴν δ, κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἔστω τὸ ε, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς αβ σημεῖον τὸ ζ, καὶ προσκείσθωσαν αἱ ηα, θβ. ὥστε εἶναι ὡς τὴν γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὴν ηζ πρὸς τὴν ζθ. ἔτι τε εἶναι, ὡς μὲν τῆς ηα πρὸς αζ, οὕτως δοθεῖσαν τὴν εβ πρὸς βζ. ὡς δὲ τὴν θβ πρὸς βζ, οὕτως τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν τὴν εα πρὸς αζ. τοῦτο γὰρ ὡς δυνατόν ποιεῖν προδέδεικται. καὶ διὰ τοῦ ζ τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ κλζ. καὶ διὰ τῆς κλ ἐπίπεδον ἐκβληθὲν ὀρθὸν πρὸς τὴν αβ τεμνέτω τὴν σφαῖραν. λέγω ὅτι τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλ-



ληλα λόγον ἔχει τὸν τῆς γ πρὸς τὴν δ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ηα πρὸς αζ, οὕτως ἡ εβ πρὸς βζ. καὶ συνθέντι, ὡς ἄρα ἡ ηζ πρὸς ζα, οὕτως συναμφότερος ἡ εβ, βζ πρὸς βζ. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν κλ, ὕψος δὲ τὴν ζη, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτὴν, ὕψος δὲ τὴν ζα. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ θβ πρὸς βζ, οὕτως ἡ εα πρὸς αζ. καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς ἡ θζ πρὸς βζ, οὕτως συναμφότερος ἡ εα, αζ πρὸς αζ. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν κλ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ζθ, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτὴν, ὕψος δὲ τὴν βζ. ἐπεὶ οὖν οἱ εἰρημένοι κῶνοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη, τουτέστιν ὡς ἡ θζ πρὸς ζη, τουτέστιν ἡ γ πρὸς τὴν δ, καὶ τὰ τμήματα ἄρα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν δοθέντα, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Ὡς δὲ δεῖ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου περὶ τὰς δοθείσας ἀσυμπτώτους γράψαι ὑπερβολὴν, δεί-ξομεν οὕτως. ἐπειδὴ οὐκ αὐτόθεν κεῖται γὰρ τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις. ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ γα, αβ τυχοῦσαν γωνίαν περιέχουσαι τὴν πρὸς τῷ α, καὶ δεδόσθω σημεῖόν τι τὸ δ. καὶ προκείσθω διὰ τοῦ δ περὶ ἀσυμπτώτους τὰς γα, αβ γράψαι ὑπερβολὴν. ἐπεζεύχθω ἡ αδ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ε. καὶ κείσθω τῇ δα ἴση ἡ αε, καὶ διὰ τοῦ δ τῇ αβ παράλληλος ἤχθω ἡ δζ καὶ κείσθω τῇ αζ ἴση ἡ ζγ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γδ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ β, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς γβ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ δε η, καὶ ἐκβληθείσης τῆς αδ γεγράφθω περὶ αὐτὴν διὰ τοῦ δ ὑπερβολὴ, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τῇ εη ὑπερβάλλοντα, ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ δεη.

λέγω ὅτι τῆς γεγραμμένης ὑπερβολῆς ἀσύμπτωτοι εἰσὶν αἱ γα, αβ. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν

ἡ δζ

ἡ δζ τῇ βα, καὶ ἴση ἡ γζ τῇ ζα, ἴση ἄρα καὶ ἡ γδ τῇ δβ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν γβ τετραπλάσιον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν γδ. καὶ ἔστι τὸ ἀπὸ γβ ἴσον τῷ ὑπὸ δε κ. ἑκάτερον ἄρα τῶν ἀπὸ γδ, δβ, τέταρτον μέρος ἐστὶ τοῦ ὑπὸ δε καὶ ἄλλους. αἱ ἄρα γα, αβ ἀσύμπτωτοί εἰσι τῆς ὑπερβολῆς, διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων.

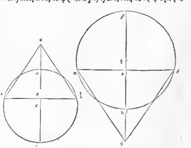
ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ Δ.

Ἐν δὲ τῇ συνθέσει προσεκβάλλων τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας τὴν δβ, καὶ ἀριθμένος τῇ ἡμίσειαν αὐτῆς ἴσην τῇ ζβ. καὶ τεμὼν αὐτὴν εἰς τὸν δοθέντα λόγον κατὰ τὸ θ, καὶ ὧν τῆς δβ λαβὼν τὸ χ οὕτως, ὥστε εἶναι ὡς τὴν χζ πρὸς θζ, οὕτως τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, τὰ αὐτὰ κατασκευάζων τοῖς πρότερον φησι, ὅτι γεγονέτω ὡς συναμφότερος ἡ κδχ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ρχ πρὸς χβ. καὶ τίθησι τὸ ρ μεταξὺ τῶν β, ζ, ὅτι δὲ τοῦτο οὕτως ἔχει δεικτέον. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ κδχ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ρχ πρὸς χβ. διελόντι ὡς ἡ κδ πρὸς δχ, ἡ ρβ πρὸς χβ. ἐναλλὰξ ὡς ἡ κβ πρὸς ρβ, ἡ δχ πρὸς βχ, μείζων δὲ ἡ δχ τῆς χβ, μείζων ἄρα καὶ ἡ κβ τῆς βρ, τουτέστιν ἡ ζβ τῆς βρ, ὥστε τὸ ρ ἐντὸς τοῦ ζ πεσεῖται. ὅτι δὲ καὶ ἐκτὸς τοῦ θ. δειχθήσεται ὁμοίως τοῖς ἐν τῇ ἀναλύσει προελθούσης πάσης τῆς συνθέσεως τοῦ θεωρήματος. συνάγεται γὰρ ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ρχ πρὸς χλ, ἡ ζθ πρὸς θβ, ὥστε καὶ συνθέντι. καὶ διὰ τοῦτο γὰρ ἀκόλουθος τοῖς ἄνω εἰρημένοις καὶ ἐνταῦθα ἡ λέξις.

Καὶ δι' ἴσου ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ. τεταραγμένην ἀναλογίαν ἐν τοῖς στοιχείοις ἐμάθομεν τριῶν ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος, ὅταν ᾖ ὡς μὲν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον. ὡς δὲ ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι ἐν τοῖς πρώτοις, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον. κἀνταῦθα οὖν δέδεικται ὡς μὲν ἡγούμενον ἡ ρλ πρὸς ἑπόμενον τὴν λδ, οὕτως ἡγούμενον ἡ χζ πρὸς ἑπόμενον τὴν ζθ. ὡς δὲ ἑπόμενον ἡ δλ πρὸς ἄλλο τι τὴν δχ, οὕτως ἄλλο τι ἡ εζ πρὸς ἡγούμενον τὴν χζ. ἕπεται ἄρα καὶ δι' ἴσου ὡς δέδεικται ἐν τῷ πέμπτῳ τῶν στοιχείων, ὡς ρλ πρὸς δχ, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζθ.

ΕΙΣ ΤΟ Ε.

Καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ εζκ τμῆμα τῷ θκλ τμήματι, ὅμοιος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ εζω κῶνος τῷ ψθκ κώνῳ. νενοήσθωσαν γὰρ χωρὶς κείμεναι αἱ καταγραφαὶ καὶ ἐπεζευγμέναι αἱ εκ, πζ, εο, οζ, θλ, λκ, θξ, ξκ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιά ἐστι τὰ εζκ, θκλ τμήματα, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ επζ, θλκ γωνίαι, ὥστε καὶ αἱ ἡμίσειαι αὐτῶν. καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς φ, υ. καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἐστιν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα τὸ πφζ τρίγωνον τῷ λυκ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ πφ πρὸς φζ, οὕτως ἡ λυ πρὸς υκ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσογωνίων ὄντων τῶν φζο, υκξ τριγώνων. ἔστιν ὡς ἡ ζφ πρὸς φο, ἡ κυ πρὸς υξ. δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ πφ πρὸς φο, ἡ λυ πρὸς υξ. καὶ συνθέντι ὡς ἡ πο πρὸς οφ, ἡ λξ πρὸς ξυ, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση, ὡς ἡ σο πρὸς οφ, ἡ ρξ πρὸς ξυ. καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἡ σοφ πρὸς φο, τουτέστιν ἡ ωφ πρὸς φπ, οὕτως συναμφότερος ἡ ρξυ πρὸς ξυ. τουτέστιν ἡ ψυ πρὸς υλ. ἀλλ' ὡς ἡ πφ πρὸς φζ ἡ λυ πρὸς υκ. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ωφ πρὸς φζ, ἡ ψυ πρὸς



υκ, καὶ τῶν ἑπομένων τὰ διπλάσια, ὡς ἄρα ἡ ωφ πρὸς εζ ἡ ψυ πρὸς θκ, τῶν ἄρα εζω, ψθκ κώνων

κώνων ἀνάλογόν εἰσιν οἱ ἄξονες καὶ διάμετροι τῶν βάσεων. ὅμοιοι ἄρα εἰσὶν οἱ κῶνοι, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λόγος δὲ τῆς ωφ πρὸς τὴν εζ δοθείς. ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὰ τμήματα τῆς σφαίρας δεδομένα, καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων, καὶ τὰ ὕψη τῶν τμημάτων, ὥστε δέδοται ἡ εζ καὶ ἡ πφ. καὶ ἡ ἡμίσεια ἄρα τῆς εζ ἡ εφ δοθήσεται, ὥστε καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ὑπὸ πφο. ἐὰν δὲ δοθὲν παρὰ δοθεῖσαν παραβληθῇ πλάτος ποιεῖ δοθεῖσαν, δοθεῖσα ἄρα ἡ φο, ἀλλὰ καὶ ἡ φπ. ὅλη ἄρα ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας δοθεῖσά ἐστι, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡμίσεια αὐτῆς δέδοται ἡ σο, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ οφ. δέδοται ἄρα καὶ ὁ τῆς σο πρὸς οφ λόγος. καὶ συνθέντι ὡς συναμφοτέρου τῆς σφ πρὸς τὴν οφ λόγος δοθείς ἐστι, τουτέστι τῆς ωφ πρὸς φπ. καὶ δέδοται ἄρα καὶ ἡ ωφ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ εζ, δέδοται ἄρα καὶ ὁ τῆς ωφ πρὸς εζ λόγος. τὰ αὐτὰ δὲ ἂν ῥηθείη καὶ ἐπὶ τοῦ αβγ τμήματος. καὶ συναχθήσεται ὁ τῆς χτ πρὸς αβ λόγος δοθείς, καὶ διὰ τὸ δοθεῖσαν εἶναι τὴν αβ, δοθεῖσά ἐστι καὶ ἡ χτ.

Ὅτι δὲ αὖ τὰ τμήματα δεδομένα ἦν, καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν δοθήσονται, πρόδηλον μέν. ἵνα δὲ καὶ τοῦτο ἀκολούθως τῇ στοιχειώσει τῶν δεδομένων δοκῇ συνάγεσθαι, λεχθήσεται. ἐπειδὴ δέδοται τὰ τμήματα τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει, δέδοται καὶ ἡ εζ, καὶ ἡ ἐν τῷ τμήματι γωνία, ὥστε καὶ ἡ ἡμίσεια αὐτῆς, καὶ ἐὰν νοήσωμεν ἐπιζευγνυμένην τὴν επ, δεδομένης τῆς πρὸς τῷ φ ὀρθῆς, δεδομένη ἔσται καὶ ἡ λοιπή. καὶ τὸ επφ τρίγωνον τῷ εἴδει. ὥστε καὶ ὁ τῆς εφ πρὸς φπ λόγος δοθείς ἐστι. καὶ δέδοται ἡ εφ ἡμίσεια οὖσα τῆς εζ, δέδοται ἄρα καὶ ἡ φπ. ἔνεστι δὲ καὶ ἄλλως λέγειν. ἐπειδὴ δέδοται ἡ εζ τῇ θέσει, καὶ ἀπὸ δεδομένου τοῦ φ, διχοτομία γάρ ἐστι τῆς εζ, πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ φπ τῇ θέσει. δέδοται δὲ καὶ ἡ περιφέρεια τοῦ τμήματος τῇ θέσει, δέδοται ἄρα τὸ π. ἦν δὲ καὶ τὸ φ δεδομένον. δέδοται ἄρα καὶ ἡ φπ. ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ψυ πρὸς χτ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς βα πρὸς τὸ ἀπὸ θκ, οὕτως ἡ κθ πρὸς δ. ἐπεὶ γὰρ γέγονεν ὡς ἡ ψυ πρὸς θκ, ἡ χτ πρὸς δ, ἐναλλὰξ ἡ ψυ πρὸς χτ ἡ κθ πρὸς δ. ἀλλ' ὡς ἡ ψυ πρὸς χτ, τὸ ἀπὸ ἡ β πρὸς τὸ ἀπὸ θκ. ἴσων γὰρ ὄντων τῶν κώνων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ὡς δὲ αἱ βάσεις πρὸς ἀλλήλας, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ θκ, ἡ θκ πρὸς τὴν δ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ αβ πρὸς θκ, ἡ ς πρὸς δ. ἐπειδὴ ὁ τῷ λόγῳ τοῦ ἀπὸ τῆς βα πρὸς τὸ ἀπὸ θκ, ὁ αὐτὸς ἐδείχθη ὁ τῆς βα πρὸς ς, καὶ ὁ τῆς κθ πρὸς δ. καὶ ὁ τῆς βα ἄρα πρὸς ς, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς κθ πρὸς δ. ὥστε ἐναλλάξ ἐστιν ὡς ἡ βα πρὸς θκ, ἡ ς πρὸς δ.

ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ Ε.

Ἐπειδὴ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ αβ, θκ, ς, δ, ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ ηβ πρὸς τὸ ἀπὸ θκ, ἡ θκ πρὸς δ. καθόλου γὰρ ἐὰν ὦσι τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ἡ δευτέρα πρὸς τὴν τετάρτην. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν, ἡ τρίτη πρὸς τὴν τετάρτην, ἐναλλὰξ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, ἡ δευτέρα πρὸς τὴν τετάρτην. ἀλλ' ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, ἡ δευτέρα πρὸς τὴν τετάρτην.

ΕΙΣ ΤΟ ς.

Ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ κλμ τῷ αβγ τμήματι, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ρλ πρὸς ρν, ἡ βπ πρὸς πθ. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῶσιν αἱ μν, γθ, ἐπεὶ ὅμοια ἐστι τὰ τμήματα, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ πρὸς τοῖς β, λ γωνίαι. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τοῖς μ, γ ὀρθαί, καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ, καὶ ἰσογώνιά ἐστι τὰ τρίγωνα. ἔστιν ὡς ἡ θβ πρὸς θγ, οὕτως ἡ λν πρὸς μν. ἀλλ' ὡς ἡ θγ πρὸς θπ, ἡ μν πρὸς νρ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν γθπ, μνρ τριγώνων. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ βθ πρὸς θπ, ἡ λν πρὸς νρ. ὥστε καὶ ἀνάπαλιν καὶ συνθέντι, ὡς ἡ βπ πρὸς πθ, οὕτως ἡ λρ πρὸς ρν. λόγος δὲ τῆς εζ πρὸς βγ δοθείς, δοθεῖσα ἑκατέρα. ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὰ τμήματα τῶν σφαιρῶν, δεδομέναι εἰσὶ καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων, καὶ τὰ ὕψη τῶν τμημάτων. ὥστε ἐπεὶ δέδοται ἡ αγ, δέδοται καὶ ἡ ἡμίσεια αὐτῆς ἡ γπ. δέδοται δὲ καὶ ἡ βπ, καὶ ὀρθὴν γωνίαν περιέχουσι. δέδοται ἄρα καὶ ἡ βγ διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ ἡ εζ δοθεῖσά ἐστιν. ὥστε καὶ ὁ τῆς βγ πρὸς εζ λόγος δοθείς ἐστιν.

ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ ς.

Ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ ἐπὶ τῶν κμ, αγ τμήματα κύκλων. ἐὰν γὰρ ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει ἐπιζευχθῶσιν αἱ γθ, μν, ἐπεὶ ὀρθαί εἰσιν αἱ πρὸς τοῖς γ, μ, καὶ κάθετοι αἱ γπ, μρ, μέσαι ἀνάλογον εἰσὶν τῶν τῆς βάσεως τμημάτων. ὥστε ἐστὶν ὡς ἡ πρώτη ἡ βπ πρὸς τὴν τρίτην τὴν πθ,

οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης τῆς πβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τῆς βγ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ λρ πρὸς ρν, οὕτως τὸ ἀπὸ λρ πρὸς τὸ ἀπὸ ρμ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ βπ πρὸς πθ, ἡ ρλ πρὸς ρν. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ βπ πρὸς τὸ ἀπὸ πγ, οὕτως τὸ ἀπὸ λρ πρὸς τὸ ἀπὸ ρμ. καὶ ὡς ἄρα ἡ πβ πρὸς πλρ, πρὸς ρμ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσι. ἰσογώνια ἄρα τὰ τρίγωνα. ἴσαι ἄρα πρὸς τοῖς β, λ γωνίαι, καὶ αἱ διπλασίους αὐτῶν αἱ ἐν τοῖς τμήμασιν. ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ τμήματα.

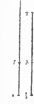
ΕΙΣ ΤΟ Ζ.

Λόγος ἄρα δεδομένος συναμφοτέρου τῆς εδ, δζ πρὸς δζ. ἐπεὶ γὰρ συναμφότερος ἡ εδ, δζ πρὸς δζ λόγον ἔχει δεδομένον. ἐὰν μέγεθος πρός τι μόριον ἑαυτοῦ λόγον ἔχει δεδομένον, καὶ πρὸς τὸ λοιπὸν λόγον ἕξει δεδομένον, ὥστε συναμφότερος ἡ εδ, δζ πρὸς εδ λόγον ἔχει δεδομένον. ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν εδ, δζ πρὸς συναμφότερον τὴν εδζ λόγον ἔχει δεδομένον, καὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχουσι δεδομένον. δέδοται ἄρα ὁ τῆς εδ πρὸς δζ λόγος. καὶ δέδοται ἡ εδ, δέδοται γὰρ ἡ διάμετρος. δέδοται ἄρα καὶ ἡ δζ. λοιπὴ ἄρα ἡ ζβ δοθήσεται, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ δζβ, τουτέστι τὸ ἀπὸ αζ. τουτέστιν ἡ αζ, δοθεῖσα ἔσται. καὶ ὅλη ἄρα ἡ αγ. καὶ ἄλλως δὲ λέγοις ἄν, ὅτι ἡ αγ δοθεῖσά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ δέδοται ἡ διάμετρος ἡ δβ τῇ θέσει. δέδοται δὲ καὶ τὸ ζ, ὡς ἤχθη, καὶ ἀπὸ δεδομένου τοῦ ζ πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ αγ, δέδοται ἡ αγ τῇ θέσει. ἀλλὰ καὶ ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια. δοθέντα ἄρα τὰ α, γ. καὶ αὐτὴ ἡ αζγ δοθεῖσά ἐστι.

Καὶ ἐπεὶ συναμφότερος μὲν ἡ εδζ πρὸς δζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ εδβ πρὸς δβ. ἐπεὶ γὰρ ἡ εδ μείζων ἢ ἡμίσεια ἐστὶ τῆς δζ, συναμφότερος ἄρα ἡ εδζ τῆς δζ μείζων ἐστὶν ἢ ἡμιόλια. συναμφότερος δὲ ἡ εδ, δβ τῆς δβ ἡμιόλια, μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἡ εδζ πρὸς δζ, ἤπερ ἡ εδβ πρὸς δβ. ἢ καὶ ἄλλως, ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ δβ τῆς δζ, ἐλάττων δέ τις ἡ εδ, ἡ εδ ἄρα μείζονα λόγον ἔχει πρὸς δζ, ἤπερ ἡ εδ πρὸς δβ συνθέντι συναμφότερος ἡ εδζ πρὸς δζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ εδβ πρὸς δβ, ἡ σύνθεσις τοῦ θεωρήματος σαφὴς διὰ τῶν ἐνταῦθα εἰρημένων.

ΕΙΣ ΤΟ Η.

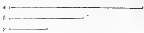
Η θζ πρὸς ζκ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ διπλασίονα τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ αδ. τουτέστιν ἡ βζ πρὸς ζδ. ἐπεὶ γὰρ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς κάθετος ἦκται ἡ αζ τῶν πρὸς τῇ καθέτῳ τριγώνων ὁμοίων ὄντων, ἔστιν ὡς ἡ ζβ πρὸς βα, ἡ αβ πρὸς βδ. καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. καὶ τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται. ὡς ἄρα ἡ ζβ πρὸς βδ, τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βδ. ἀλλ' ὡς ἡ βδ πρὸς δζ, οὕτως τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δα. ὡς γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. καὶ δι' ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ δα, οὕτως ἡ βζ πρὸς δζ. συναχθείη δ' ἂν τὸ αὐτὸ καὶ ἄλλως οὕτως. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ βζ πρὸς ζδ, οὕτως τὸ ὑπὸ ζβδ πρὸς τὸ ὑπὸ βδζ, τῆς βδ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ δβζ ἴσον τῷ ἀπὸ βα. τὸ δὲ ὑπὸ βδζ ἴσον τῷ ἀπὸ δα. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ δα, οὕτως ἡ βζ πρὸς δζ.



Καὶ ἐπεὶ ἡ θζ πρὸς ζκ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ἡ θβ πρὸς βκ. καθόλου γὰρ ἐὰν ὦσι δύο μεγέθη ἄνισα, καὶ προστεθῇ αὐτοῖς ἴσα, τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλασσον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ συντεθὲν πρὸς τὸ συντεθέν. ἔστωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ αβ, γδ. καὶ προσκείσθωσαν αὐταῖς ἴσαι αἱ βε, δζ. λέγω ὅτι ἡ αβ πρὸς γδ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αε πρὸς γζ. ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ αβ τῆς γδ, ἡ αβ ἄρα πρὸς βε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γδ πρὸς τὴν βε, τουτέστι πρὸς δζ. ὥστε καὶ συνθέντι ἡ αε πρὸς εβ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γζ πρὸς τὴν δζ, διὰ τὰ προδεδειγμένα.

Ἔλαττον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν θζκ τοῦ ἀπὸ ζκ. ἐὰν γὰρ ὦσι τρεῖς εὐθεῖαι συνεχεῖς, ὡς αἱ α, β, γ, ὥστε

γ, ὥστε τὴν α πρὸς τὴν β ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἤπερ τὴν β πρὸς τὴν γ. τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων τῶν α, γ, ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μέσης τῆς β. ἐὰν γὰρ ποιήσωμεν, ὡς τὴν α πρὸς τὴν β, οὕτως τὴν β πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται πρὸς μείζονα τῆς γ, ἤπερ δεῖ ἐλαττῶσαι τὸν τῆς β πρὸς γ λόγον, καὶ ἔσται τὸ ὑπὸ τῆς α καὶ τῆς μείζονος τῆς γ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς β, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν α, γ ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς β.



Τὸ ἄρα ὑπὸ θζ κ πρὸς τὸ ἀπὸ ζ κ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ κζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζ κ. ὡς γὰρ ἡ θζ πρὸς ζκ, οὕτως τὸ ὑπὸ θζ κ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ. τὸ δὲ ὑπὸ θζ κ τοῦ ἀπὸ ζκ ἔλασσον. τὸ δὲ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλασσον. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βε τῇ εδ, ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βζ δ τοῦ ὑπὸ τῶν βε δ. τὸ μὲν γὰρ ὑπὸ βδ ε ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ε δ. τὸ δὲ ὑπὸ βζ δ μετὰ τοῦ ἀπὸ ε ζ ἴσον ἐστὶ τῷ αὐτῷ. καὶ δῆλον ὅτι ὅσῳ τῆς διχοτομίας ἐφέστηκεν τὸ ζ μεῖζον, ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ἴσων. μετὰ γὰρ μείζονος τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν, ἴσον γίνεται τὸ ὑπὸ τῶν ἴσων, ὥστε εὐθεῖα ἐὰν εἰς ἄνισα τέμνηται κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῶν ἔγγιον τῆς διχοτομίας, μεῖζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ἀπωτέρω τμημάτων.

Ἡ βζ ἄρα πρὸς β ε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ε δ πρὸς δ ζ. καθόλου γὰρ ἐὰν τέσσαρες ὅροι ὡς οἱ α, β, γ, δ, ε. καὶ ᾖ τὸ ὑπὸ τῶν α δ ε, ἔλασσον τοῦ ὑπὸ β γ, ὁ α πρὸς τὸν β ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ πρὸς δ ε. ἔστω γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν β γ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν α ζ ε. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, ὁ γ πρὸς τὸν ζ ε. ὁ δὲ γ πρὸς τὸν ζ ε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸν ε δ. καὶ ὁ α ἄρα πρὸς τὸν β ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ πρὸς δ ε.



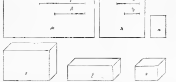
Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ θ β πρὸς β κ, τὸ ἀπὸ θ ν πρὸς τὸ ἀπὸ ν κ. ἐπεὶ γὰρ τῷ ὑπὸ θ β κ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ β ν, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον εἰσὶν ὡς ἡ θ β πρὸς β ν, ἡ ν β πρὸς β κ. καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, ἡ θ β πρὸς β κ. οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης, τουτέστι τὸ ἀπὸ β ν πρὸς τὸ ἀπὸ β κ, ὡς δέδεικται ἀνωτέρω. πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς θ β πρὸς β ν, ἡ ν β πρὸς β κ συντεθέντι ὡς ἡ θ ν πρὸς ν β, ἡ κ ν πρὸς κ β. ἐναλλὰξ ὡς ἡ θ ν πρὸς ν κ, ἡ ν β πρὸς β κ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ θ ν πρὸς τὸ ἀπὸ ν κ, οὕτως τὸ ἀπὸ ν β πρὸς τὸ ἀπὸ β κ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ν β πρὸς τὸ ἀπὸ β κ, οὕτως ἐδείχθη ἡ θ β πρὸς β κ. καὶ ὡς ἄρα ἡ θ β πρὸς β κ, οὕτως τὸ ἀπὸ θ ν πρὸς τὸ ἀπὸ ν κ. τὸ δὲ ἀπὸ θ ζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζ κ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ θ ν πρὸς τὸ ἀπὸ ν κ. πάλιν γὰρ δύο ἀνίσας ταῖς θ ζ, ζ κ προσκείσθω ἡ ν ζ, καὶ διὰ τὸ ἀνωτέρω εἰρημένον ἡ θ ζ πρὸς ζ κ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θ ν πρὸς ν κ, ὥστε καὶ τὰ διπλάσια. τὸ ἄρα ἀπὸ θ ζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζ κ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ θ ν πρὸς τὸ ἀπὸ ν κ, τουτέστιν ἡ θ β πρὸς β κ, τουτέστιν ἡ κ ζ πρὸς ζ κ. ἡ ἄρα θ ζ πρὸς ζ κ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἡμιόλιον τοῦ τῆς κ ζ πρὸς ζ κ. νοείσθωσαν γὰρ χωρὶς κείμεναι εὐθεῖαι, ὡς αἱ α β, γ, δ. ὥστε τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ γ μείζονα λόγον ἔχειν, ἤπερ τὴν γ πρὸς τὴν δ. λέγω ὅτι ἡ α β πρὸς δ μείζονα ἢ ἡμιόλιον λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ γ πρὸς τὴν δ. εἰλήφθω γὰρ τῶν γ, δ μέση ἀνάλογον ἡ ε. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ πρὸς τὴν δ, ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ γ λόγος διπλάσιον ἐστὶν τοῦ τῆς α β πρὸς γ. ὁ δὲ τῆς γ πρὸς τὴν δ διπλάσιον ἐστὶ τοῦ τῆς γ πρὸς ε, καὶ ἡ α β ἄρα πρὸς γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ γ πρὸς ε. γεγονέτω οὖν ὡς ἡ ε πρὸς τὴν γ, ἡ γ πρὸς β ζ καὶ ἐπεὶ τέσσαρες εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογον εἰσὶν αἱ β ζ, γ, ε, δ, ἡ β ζ ἄρα πρὸς δ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ β ζ πρὸς γ, τουτέστιν ἡ γ πρὸς ε. ἔχει δὲ καὶ ἡ γ πρὸς δ διπλασίονα λόγον τοῦ τῆς γ πρὸς ε, ἡ ἄρα β ζ πρὸς δ ἡ-



μιόλιον

ΛΗΜΜΑ ΕΙΣ ΤΟ ΕΞΗΣ.

Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ α, γ, δ, β. λέγω ὅτι ὁ συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ ὑπὸ τῶν α, β πρὸς τὸ ἀπὸ γ μετὰ τοῦ τῆς β πρὸς δ λόγου, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὑπὸ α β ἐπὶ τὴν β πρὸς τὸ ἀπὸ γ ἐπὶ τὴν δ. ἔστω γὰρ τῷ μὲν ὑπὸ α β ἴσος ὁ κ, τῷ δὲ ἀπὸ γ ἴσος ὁ λ. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ β πρὸς δ, οὕτως ὁ λ πρὸς μ. ὁ ἄρα τοῦ κ πρὸς μ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ κ πρὸς λ, τουτέστι τοῦ ὑπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ γ, καὶ τοῦ λ πρὸς μ, τουτέστι τοῦ β πρὸς δ. ὁ δὴ κ τὸν β πολλαπλασιάσας τὸν ν ποιείτω, ὁ δὲ λ τὸν β πολλαπλασιάσας, τὸν ξ ποιείτω, τὸν δὲ δ πολλα-



πλασιάσας, τὸν ο. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν α β ὁ κ ἐστιν, ὁ δὲ κ τὸν β πολλαπλασιάσας τὸν ν πεποίηκεν, ὁ ἄρα ν ἐστὶν ὁ ὑπὸ α β ἐπὶ τὸν β, πάλιν ἐπεὶ ὁ ἀπὸ γ ὁ λ ἐστιν. ὁ δὲ λ τὸν δ πολλαπλασιάσας τὸν ο πεποίηκεν. ὁ ο ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τῆς γ ἐπὶ τὸν δ, ὥστε ὁ τοῦ ὑπὸ α β ἐπὶ τῆς β πρὸς τὸ ἀπὸ γ ἐπὶ τὸν δ λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ν πρὸς ο. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ὁ τῆς κ πρὸς μ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ν πρὸς ο. ἐπεὶ οὖν ἑκάτερος τῶν κ, λ τὸν β πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τὸν ν, ξ πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ κ πρὸς τὸν λ, οὕτως ὁ ν πρὸς ξ. πάλιν ἐπεὶ ὁ λ ἑκάτερον τῶν β, δ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν ξ, ο πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ β πρὸς δ, ὁ ξ πρὸς ο. ἀλλ᾽ ὡς ὁ β πρὸς δ, ὁ λ πρὸς τὸν μ. καὶ ὡς ἄρα ὁ λ πρὸς μ, ὁ ξ πρὸς ο. οἱ ἄρα κ, λ, μ τοῖς ν, ξ, ο ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ σὺν δύο λαμβανόμενοι, καὶ δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ κ πρὸς μ, οὕτως ὁ ν πρὸς ο. καὶ ὁ τῆς κ πρὸς μ λόγος, ὁ αὐτὸς τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ ὑπὸ α β πρὸς τὸν ἀπὸ γ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ β πρὸς δ. ὁ δὲ τῆς ν πρὸς ο λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὑπὸ α β ἐπὶ τῆς β πρὸς τὸ ἀπὸ γ ἐπὶ τῆς δ. ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ ὑπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ γ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ β πρὸς δ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὑπὸ δ β ἐπὶ τῆς β πρὸς τὸν ἀπὸ γ ἐπὶ τὸν δ.

Φανερὸν δὲ, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ α β ἐπὶ τῆς β ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β ἐπὶ τὸν α. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως τὸ ὑπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β, τῆς β κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. ἐὰν δὲ τέσσαρες ὅροι ἀνάλογον ὦσιν. τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. ὁ ἄρα ὑπὸ α β ἐπὶ τῆς β, ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β ἐπὶ τῆς α.

ΕΙΣ ΤΟ ΑΛΛΩΣ ΤΟΥ Η.

Εἴρηται ἐν τοῖς προλαβοῦσιν, ὡς ἐὰν δύο μεγεθῶν ληφθῇ τὸ μέσον, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ πρῶτον πρὸς τὸ μέσον, καὶ τὸ μέσον πρὸς τὸ τρίτον. ὁμοίως δὲ κἂν πλείονα μέσα ληφθῇ, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ τῶν λόγων ὧν ἔχουσι πάντα κατὰ τὸ ἑξῆς πρὸς ἄλληλα τὰ μεγέθη. καὶ ἐνταῦθα οὖν φησί, ὅτι ὁ τοῦ β α δ τμήματος πρὸς τὸ β γ δ τμῆμα λόγος σύγκειται, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ β α δ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν β δ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ α σημεῖον, καὶ ὁ αὐτὸς κῶνος πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτὴν, κορυφὴν δὲ τὸ γ σημεῖον. καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος πρὸς τὸ β γ δ τμῆμα. διὰ τὸ δὴ τοῦ δ α β τμήματος, καὶ τοῦ β γ δ μέσων λαμβανομένων τῶν εἰρημένων κώνων. ἀλλ᾽ ὁ μὲν τοῦ β α δ τμήματος πρὸς τὸν β α δ κῶνον, ὁ τῆς κ θ ἐστὶ πρὸς θ γ, διὰ τὸ πόρισμα τοῦ δευτέρου θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου. ἐλέγετο γὰρ τὸ τμῆμα πρὸς τὸν ἐν αὐτῷ κῶνον.

τοῦ κώνου τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος πρὸς τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος. ὁ δὲ τοῦ Βᾱδ κώνου πρὸς τὸν Βγ̄δ κῶνον, ὁ τῆς ᾱθ ἐστὶ πρὸς θ̄γ. ἐπεὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ὕψη. ὁ δὲ τοῦ Βγ̄δ κώνου πρὸς τὸ Βγ̄δ τμῆμα, ὁ τῆς ᾱθ ἐστὶ πρὸς θ̄ζ, διὰ τὸ ἀνάπαλιν τοῦ εἰρημένου πορίσματος, ὥστε ὁ τοῦ Βᾱδ τμήματος πρὸς τὸ Βγ̄δ τμῆμα λόγος σύγκειται, ἔκ τε τοῦ τῆς κ̄θ πρὸς θ̄γ, καὶ τοῦ τῆς ᾱθ πρὸς θ̄γ, καὶ τοῦ τῆς ᾱθ πρὸς θ̄ζ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ τῆς κ̄θ πρὸς θ̄γ, μετὰ τοῦ τῆς ᾱθ πρὸς θ̄γ, ὁ τοῦ ὑπὸ κθ̄α ἐστὶ πρὸς τὸ ἀπὸ θ̄γ. τὰ γὰρ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ κθ̄α πρὸς τὸ ἀπὸ γ̄θ, μετὰ τοῦ τῆς ᾱθ πρὸς θ̄ζ, ὁ τοῦ ὑπὸ κθ̄α ἐστὶν ἐπὶ τὴν θ̄α, πρὸς τὸ ἀπὸ γ̄θ ἐπὶ τὴν θ̄ζ, ὡς δέδεικται ἐν τῷ προληφθέντι λήμματι. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ κθ̄α ἐπὶ τῆς θ̄α, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ἀπὸ ᾱθ ἐπὶ τὴν θ̄κ. καὶ τοῦτο γὰρ συναποδέδεικται ἐν τῷ προληφθέντι. ὁ ἄρα τοῦ τμήματος πρὸς τὸ τμῆμα λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ ᾱθ ἐπὶ τὴν θ̄κ, πρὸς τὸ ἀπὸ γ̄θ ἐπὶ τὴν θ̄ζ. ἐπεὶ οὖν δεῖ δεῖξαι, ὅτι τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ διπλάσιον τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου, δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ ᾱθ ἐπὶ τὴν θ̄κ, πρὸς τὸ ἀπὸ γ̄θ ἐπὶ τῆς θ̄ζ, ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ Βᾱδ τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ Βγ̄δ, τουτέστι τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ᾱβ πρὸς τὸ ἀπὸ γ̄β. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ᾱβ πρὸς τὸ ἀπὸ β̄γ, οὕτως ἡ ᾱθ πρὸς θ̄γ. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς προλαβοῦσι θεωρήμασι. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ ᾱθ ἐπὶ τῆς θ̄κ, πρὸς τὸ ἀπὸ γ̄θ ἐπὶ τῆς θ̄ζ ἐλάσσονα, ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς ᾱθ πρὸς θ̄γ. ἀλλὰ τοῦ τῆς ᾱθ πρὸς θ̄γ λόγου διπλάσιός ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ ᾱθ πρὸς τὸ ἀπὸ θ̄γ. ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ ᾱθ ἐπὶ τῆς θ̄κ πρὸς τὸ ἀπὸ γ̄θ ἐπὶ τῆς θ̄ζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ ᾱθ πρὸς τὸ ἀπὸ θ̄γ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ᾱθ πρὸς τὸ ἀπὸ θ̄γ, τῆς θ̄κ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ἀπὸ ᾱθ ἐπὶ τὴν θ̄κ, πρὸς τὸ ἀπὸ γ̄θ ἐπὶ τὴν θ̄κ. καὶ ἄρα δειχθῆναι, ὅτι τὸ ἀπὸ ᾱθ ἐπὶ τὴν θ̄κ, πρὸς τὸ ἀπὸ γ̄θ ἐπὶ τὴν θ̄ζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ αὐτὸ τὸ ἀπὸ ᾱθ ἐπὶ τὴν θ̄κ, πρὸς τὸ ἀπὸ γ̄θ ἐπὶ τὴν θ̄κ. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ γ̄θ ἐπὶ τὴν ζ̄θ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ γ̄θ ἐπὶ τὴν θ̄κ, τουτέστιν ὅτι μείζων ἡ ζ̄θ τῆς θ̄κ. ἐστὶ δὲ τοῦτο φανερόν. ἴσαις γὰρ ταῖς ᾱθ, θ̄γ ἴσαι πρόσκεινται αἱ ζ̄α, γ̄κ.

Ταῦτα εἰπών, αὐτὸς μὲν οὐκ ἐπήγαγεν τὴν σύνθεσιν, ἡμεῖς δ' αὐτὴν προσθήσομεν. ἐπεὶ ἡ ζ̄θ τῆς θ̄κ μείζων ἐστί, τὸ ἀπὸ γ̄θ ἐπὶ τὴν θ̄ζ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ γ̄θ ἐπὶ τὴν θ̄κ, ὥστε τὸ ἀπὸ ᾱθ ἐπὶ τὴν θ̄κ πρὸς τὸ ἀπὸ γ̄θ ἐπὶ τὴν θ̄ζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ αὐτὸ τὸ ἀπὸ ᾱθ ἐπὶ τὴν θ̄κ, πρὸς τὸ ἀπὸ γ̄θ ἐπὶ τὴν θ̄κ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ᾱθ ἐπὶ τὴν θ̄κ, πρὸς τὸ ἀπὸ γ̄θ ἐπὶ τὴν θ̄κ, τὸ ἀπὸ ᾱθ πρὸς τὸ ἀπὸ γ̄θ. τὸ ἄρα ἀπὸ ᾱθ ἐπὶ τὴν θ̄κ, πρὸς τὸ ἀπὸ γ̄θ ἐπὶ τὴν θ̄ζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ᾱθ πρὸς τὸ ἀπὸ θ̄γ. ἀλλ' ὁ τοῦ ἀπὸ ᾱθ πρὸς τὸ ἀπὸ θ̄γ λόγος διπλάσιός ἐστι τοῦ τῆς ᾱθ πρὸς θ̄γ. τὸ ἄρα ἀπὸ ᾱθ ἐπὶ τὴν θ̄κ, πρὸς τὸ ἀπὸ γ̄θ ἐπὶ τὴν θ̄ζ, ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς ᾱθ πρὸς θ̄γ. ἀλλ' ὁ μὲν τῶν τμημάτων λόγος ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ᾱθ ἐπὶ τὴν θ̄κ πρὸς τὸ ἀπὸ γ̄θ ἐπὶ τὴν θ̄ζ. ὁ δὲ τῶν ἐπιφανειῶν ὃν ἔχει ἡ ᾱθ πρὸς θ̄γ, τὸ ἄρα τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου. ἑξῆς δὲ ἀναλύων τὸ ἕτερον μέρος τοῦ θεωρήματος ἐπάγει. φημὶ δὴ ὅτι τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τὸν ἡμιόλιον τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου. ἀλλ' ὁ μὲν τῶν τμημάτων ἐδείχθη ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ᾱθ ἐπὶ τὴν θ̄κ πρὸς τὸ ἀπὸ γ̄θ ἐπὶ τὴν θ̄ζ. ὁ δὲ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου ἡμιόλιός ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ ᾱβ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς β̄γ κύβον. τοῦ γὰρ τῆς ᾱβ πρὸς β̄γ διπλάσιος μέν ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ ᾱβ τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ β̄γ τετράγωνον. τριπλάσιος δὲ ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς ᾱβ πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς β̄γ κύβον, ἀλλ' ὡς ὁ ἀπὸ τῆς ᾱβ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς β̄γ κύβον, οὕτως ὁ ἀπὸ ᾱθ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς θ̄β κύβον, ὡς γὰρ ἡ ᾱβ πρὸς τὴν β̄γ, οὕτως ἡ ᾱθ πρὸς θ̄β, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν αβ̄γ, αβ̄θ τριγώνων. ἐὰν δὲ ὦσι τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ τὰ ὅμοια, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον εἰσίν, ὥστε ὁ ἀπὸ τῆς ᾱθ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς θ̄β κύβον, ἡμιόλιον λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ᾱβ τετράγωνον, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν, ἀλλ' ὡς τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα, οὕτως τὸ ἀπὸ ᾱθ ἐπὶ τὴν θ̄κ, πρὸς τὸ ἀπὸ γ̄θ ἐπὶ τὴν θ̄ζ. φημὶ οὖν ὅτι τὸ ἀπὸ ᾱθ ἐπὶ τὴν θ̄κ, πρὸς τὸ ὑπὸ ἀπὸ ἐπὶ τὴν θ̄ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ ἀπὸ τῆς ᾱθ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς θ̄β κύβον, τουτέστιν ὁ ἀπὸ ᾱθ πρὸς τὸ ἀπὸ

θβ. καὶ ὁ τῆς αθ πρὸς θβ. ὁ γὰρ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ διπλασίων τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ. προσλαβὼν τὸν τῆς αθ πρὸς θβ. ὁ αὐτός ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς αθ κύβῳ πρὸς τὸν ἀπὸ θβ κύβον. ἑκάτερος γὰρ τοῦ αὐτοῦ ἐστι τριπλάσιος. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ προσλαβὼν τὸν τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ τοῦ ἀπὸ αθ ἐστι πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ. ἐπεὶ γὰρ ὁ τῆς αθ πρὸς θβ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς θβ πρὸς θγ, τῆς βθ μέσης ἀνάλογον ὑπαρχούσης. ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ μετὰ τοῦ τῆς βθ πρὸς θγ. ἀλλ' ὁ τῆς βθ πρὸς θγ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ βθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ, τῆς βθ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. ὥστε ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ λόγος, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, μετὰ τοῦ ἀπὸ θβ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ. ἀλλ' ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ λόγος ὁ συγκείμενός ἐστιν ἐκ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ, καὶ τοῦ ἀπὸ βθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ, τοῦ ἀπὸ βθ μέσου λαμβανομένου. ὥστε ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ λόγος, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ ἐπὶ τὴν θκ, τῆς θκ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. φημὶ δὴ ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θκ. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσόν ἐστι. δεικτέον ὅτι τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ βθγ ἐπὶ τὴν θκ, τουτόν ἐστι τὸ δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θκ πρὸς θζ. ἐὰν γὰρ ὦσι τέσσαρες ὅροι ὡς ἐνταῦθα, τὸ ἀπὸ γθ καὶ τὸ ὑπὸ γθβ, καὶ ἡ θκ καὶ θζ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἔλασσον ᾖ τοῦ ὑπὸ τῶν μέσων, ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ τρίτος πρὸς τὸν τέταρτον, ὡς δέδεικται ἀνωτέρω. εὐλόγως ἄρα ἐζήτουν δεῖξαι τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἔλασσον τοῦ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θκ. τουτέστιν τὸ δεῖξαι ὅτι τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θκ πρὸς θζ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ, ἡ γθ πρὸς θβ. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ γθ πρὸς θβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θκ πρὸς θζ. τουτέστιν ἡ κθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ ε τῇ εγ πρὸς ὀρθὰς ἡ εκ. καὶ ἀπὸ τοῦ β κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ βλ. ἐπίλοιπον ἡμῖν δεῖξαι δεῖ, ὅτι ἡ κθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἴση δέ ἐστιν ἡ θζ συναμφοτέρῳ τῇ θα κε. ἡ γὰρ αζ τῇ εκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστί. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ κθ πρὸς συναμφότερον τὴν θα κε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. καὶ ἀφαιρεθείσης ἄρα ἀπὸ τῆς κθ τῆς γθ. ἀπὸ δὲ τῆς κε τῆς ελ ἴσης τῇ βθ δεήσει δειχθῆναι, ὅτι λοιπὴ ἡ γκ πρὸς λοιπὴν συναμφότερον τὴν αθ κλ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἐπεὶ γὰρ δεῖ δειχθῆναι, ὅτι ἡ κθ πρὸς συναμφότερον τὴν θα κε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. καὶ ἐναλλὰξ, ὅτι ἡ κθ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ θα κε πρὸς θβ. τουτέστι πρὸς λε, καὶ διελόντι ἡ κγ πρὸς γθ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ θα κλ πρὸς λε, τουτέστι πρὸς βθ. ἐναλλὰξ, ὅτι ἡ κγ πρὸς συναμφότερον τὴν θα κλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἀλλ' ὡς ἡ γθ πρὸς θβ. οὕτως ἡ θβ πρὸς θα, τουτέστιν ἡ λε πρὸς αθ. ὅτι ἄρα ἡ κγ πρὸς συναμφότερον τὴν θα κλ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ λε πρὸς αθ. καὶ ἐναλλὰξ, ὅτι ἡ γκ, τουτέστιν ἡ κε πρὸς ελ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλ θα πρὸς θα, διελόντι ἡ κλ πρὸς λε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ αὐτὴ ἡ κλ πρὸς θα τουτέστιν ὅτι ἐλάσσων ἡ λε τῆς θα ἐστίν. ἑξῆς δὲ ἡμεῖς τὴν σύνθεσιν προσθήσομεν, ἐπεὶ ἡ λε τῆς αθ ἐλάσσων, ἡ ἄρα κλ πρὸς λε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κλ πρὸς αθ. συνθέντι ἡ κε πρὸς ελ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλ αθ πρὸς αθ. ἡ δὲ λε τῇ βθ ἐστὶν ἴση. ἡ ἄρα κγ πρὸς βθ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλ αθ πρὸς αθ. ἐναλλὰξ, ἡ ἄρα κγ πρὸς συναμφότερον τὴν κλ αθ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ βθ πρὸς θα, τουτέστιν ἡ γθ πρὸς θβ. ἐναλλὰξ ἡ κγ πρὸς γθ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλ αθ πρὸς θβ. συνθέντι ἡ κθ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλ αθ μετὰ τῆς θβ, τουτέστι συναμφότερος ἡ αθ κε πρὸς βθ. ἴση δὲ ἡ κε τῇ αζ. ἡ ἄρα κθ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ζθ πρὸς θβ. ἐναλλὰξ ἡ κθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ὡς δὲ ἡ γθ πρὸς θβ, οὕτως τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ. ἡ ἄρα κθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ, καὶ διὰ τὸ πρότερον εἰρημένον, τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θκ. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θκ, τουτέστι τὸ ἀπὸ

αθ ἐπὶ

αθ ἐπὶ τῆς θκ, πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ, ἐπὶ τὴν θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ, τοῦ ἀπὸ βθ μέσου λαμβανομένου, σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, καὶ τοῦ ἀπὸ βθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ βθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς βθ πρὸς θγ, τουτέστι τῷ τῆς αθ πρὸς βθ. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τῆς θζ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, καὶ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ τῆς αθ κύβου, πρὸς τὸν ἀπὸ θβ κύβον. τουτέστι τοῦ ἀπὸ αβ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ βγ κύβον. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ θζ μείζονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ αβ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ βγ κύβον. ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ λόγος, ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ τῶν τμημάτων λόγῳ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς αβ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς βγ κύβου λόγου, ἡμιόλιος ἐδείχθη τοῦ τῶν ἐπιφανειῶν λόγου. τὸ ἄρα τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἡμιόλιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν.

ΕΙΣ ΤΟ Θ.

Δῆλον δὲ ὅτι ἡ βα τῆς μὲν ακ ἐλάσσων ἐστὶ, ἢ διπλασία δυνάμει. τῆς δὲ ἐκ τοῦ κέντρου μείζων, ἢ διπλασία. ἐπιζευχθείσης γὰρ ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὸ κέντρον τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ ἀμβλείας γινομένης ὑπὸ τῆς βα, τὸ ἀπὸ τῆς αβ μεῖζον ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν περιεχουσῶν ἴσων ὄντων. ὥστε τοῦ ἑνὸς αὐτῶν, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου μεῖζον ἐστὶν, ἢ διπλάσιον. πάλιν δὲ τοῦ ἀπὸ αβ ἴσου ὄντος τοῖς ἀπὸ ακ, κβ. καὶ μείζονος ὄντος τοῦ ἀπὸ ακ τοῦ ἀπὸ κβ, τὸ ἀπὸ αβ τοῦ ἀπὸ ακ ἔλασσον ἐστὶν ἢ διπλάσιον. καὶ ταῦτα μὲν ἐπὶ τοῦ σχήματος, ἐφ' οὗ σημεῖον θ. ἐν δὲ τῷ ἑτέρῳ σχήματι τἀναντία τούτοις εἰκότως λεχθήσεται.

Ἔστω τῇ ελ ἴση ἡ εν. καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν θζ, κῶνος ἔστω κορυφὴν ἔχων τὸ ν σημεῖον. ἴσος δὴ καὶ οὗτος ἐστὶ τῷ κατὰ τὴν θεζ περιφέρειαν ἡμισφαιρίῳ. ἐπεὶ γὰρ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν θζ, ὕψος δὲ τὴν λε, τοῦ μὲν κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν, καὶ ὕψος ἴσον, τριπλάσιός ἐστι, τοῦ δὲ ἡμισφαιρίου ἡμιόλιος. τὸ ἡμισφαίριον διπλάσιον ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ κώνου. ἔστι δὲ καὶ ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν θζ κύκλον. ὕψος δὲ τὴν λν, διπλάσιος τοῦ αὐτοῦ κώνου. καὶ τὸ ἡμισφαίριον ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζθ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν λν.

Τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν αρ, γ μεῖζον ἐστὶ τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ακ, γ, διότι τὴν ἐλάσσονα πλευρὰν τῆς ἐλάσσονος τοῦ ἑτέρου μείζονα ἔχει. εἴρηται γὰρ ἀνωτέρω, ὅτι ἐὰν εὐθεῖα τμηθῇ εἰς ἄνισα, κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῶν ἐγγυτέρων τῆς διχοτομίας τομῆς μεῖζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν τμημάτων ἐπὶ τὴν ἀπωτέρω. τοῦτο δὲ ἐστὶν εἰπεῖν. διότι τὴν ἐλάσσονα πλευρὰν τῆς ἐλάσσονος τοῦ ἑτέρου μείζονα ἔχει. ὅσῳ γὰρ ἐλάσσων ἐστὶ, τοσούτῳ πλέον ἀφέστηκεν ἡ τομὴ τῆς διχοτομίας.

Τὸ δ' ἀπὸ τῆς αρ ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ακ, γξ. ἥμισυ γάρ ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αβ. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῇ ἡ βγ διὰ τὸ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς κάθετον ἤχθαι τὴν βκ, καὶ τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοια εἶναι· τῷ ὅλῳ γὰρ τὸ ὑπὸ γακ ἴσον τῷ ἀπὸ αβ, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῆς ἡμισείας τῆς γα, καὶ ακ, τουτέστι τὸ ὑπὸ γξ ακ ἴσον ἐστὶ τῷ ἡμίσει τοῦ ἀπὸ αβ, τουτέστι τῷ ἀπὸ αρ.

Μεῖζον οὖν ἐστὶ καὶ τὸ συναμφότερον τοῦ συναμφοτέρου. ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ακ, γξ, τῷ ἀπὸ αρ, μεῖζον δὲ τὸ ὑπὸ αρ γ τοῦ ὑπὸ ακ γ. ἐὰν δ' ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα, καὶ ἐκεῖνο μεῖζον, ὃ καὶ ἐξ ἀρχῆς μεῖζον, τῷ ὑπὸ αρ γ προστιθέντος τοῦ ἀπὸ αρ, τῷ δὲ ὑπὸ ακ γ τοῦ ὑπὸ ακ γξ, μεῖζον γίνεται τὸ ὑπὸ αρ γ μετὰ τοῦ ἀπὸ αρ, τοῦ ὑπὸ ακ γ, μετὰ τοῦ ὑπὸ ακ γξ, ἀλλὰ τὸ ὑπὸ αρ γ, μετὰ τοῦ ἀπὸ αρ ἴσον γίνεται τῷ ὑπὸ γαρ, διὰ τὸ δεύτερον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῆς στοιχειώσεως. τὸ δὲ ὑπὸ ακ γ μετὰ τοῦ ὑπὸ ακ γξ ἴσον τῷ ὑπὸ ακ ξ, διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ αὐτοῦ βιβλίου, ὥστε τὸ ὑπὸ γαρ μεῖζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ ακ ξ. τῷ δ' ὑπὸ τῶν ξκ α ἴσον ἐστὶ τὰ ὑπὸ τῶν μκ γ. ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ ξγ πρὸς γκ, ἡ μα πρὸς ακ. ὥστε καὶ συνθέντι ὡς ἡ ξκ πρὸς κγ, οὕτως ἡ μκ πρὸς κα. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ξκ α ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ μκ γ. ἀλλὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ξκ α μεῖζον ἦν τὸ ὑπὸ γαρ. καὶ τὸ ὑπὸ γαρ ἄρα μεῖζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ μκ γ. ὥστε μείζονα λόγον ἔχει ἡ αγ πρὸς γκ, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ. ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες εὐθεῖαι

εἰσὶν αἱ γκ, κμ, γα, αρ. καὶ τὸ ὑπὸ πρώτης τῆς γα καὶ τετάρτης τῆς αρ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ δευτέρας τῆς μκ, καὶ τρίτης τῆς κγ. ἡ πρώτη ἡ γα πρὸς δευτέραν τὴν μκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τρίτη ἡ κγ πρὸς τετάρτην τὴν αρ. καὶ ἐναλλὰξ ἡ γα πρὸς κγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ αγ πρὸς γκ, τοῦτον ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς αγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ. ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς βγ, διὰ τὸ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς κάθετον εἶναι τὴν βγ, γίνεται ὡς ἡ αγ πρὸς γβ, ἡ βγ πρὸς γκ. καὶ διὰ τοῦτο ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, τουτέστιν ἡ αγ πρὸς γκ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς αγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ. ὅμοιον γὰρ τὸ αβκ τῷ αβγ. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ αγ πρὸς γκ, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ. ἡ δὲ αγ πρὸς γκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ. καὶ τὸ ἀπὸ αβ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ βκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἥμισυ· τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ αβ. ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ αρ, πρὸς τὸ ἀπὸ βκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡμίσεια τῆς μκ πρὸς τὴν αρ. τουτέστιν ἡ μκ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς αρ, ἀλλὰ τῷ ἀπὸ αρ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ζλ. ἐπειδὴ ἡ μὲν αβ τῇ εζ ὑπόκειται ἴση, ἡ δὲ εζ τῆς ζλ δύναμει διπλῆ. ἴση γὰρ ἡ ελ τῇ λζ. τῆς δὲ αρ διπλασία ἡ νλ. ἐπεὶ καὶ τῆς λζ. ὥστε τὸ ἀπὸ ζλ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς αρ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ λν. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν θζ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ, ἤπερ ἡ μκ πρὸς νλ. ὥστε μείζων ἐστὶν ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζθ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ ν σημεῖον, τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ μ σημεῖον. ἐὰν γὰρ ποιήσωμεν ὡς τὸν περὶ διάμετρον τῆς ζθ κύκλον πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλον, οὕτως τὴν κμ πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται πρὸς ἐλάσσονα τῆς λν. καὶ ἔσται ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζθ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν εὑρεθεῖσαν ἐλάσσονα εὐθεῖαν, ἴσος μὲν τῷ μβδ διὰ τὸ ἀντιπεπονθέναι τὰς βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἐλάττων δὲ τοῦ νθζ διὰ τὸ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντας πρὸς ἀλλήλους εἶναι ὡς τὰ ὕψη. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ἡμισφαίριον τὸ κατὰ τὴν εζθ περιφέρειαν, μεῖζόν ἐστι τοῦ τμήματος τοῦ κατὰ τὴν αβδ περιφέρειαν.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ εἰς τὸ δεύτερον τῶν Ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἐκδόσεως, παραναγνωσθείσης τῷ Μιλησίῳ μηχανικῷ Ἰσιδώρῳ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ.

Εὐτοκίου πινυτοῦ γλυκερὸς πόνος, ὅν ποτ᾽ ἐκεῖνος
Γράψεν τοῖς φθονεροῖς πολλάκι μεμψάμενος.

Εὐτοκίου

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ

ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΧΙμήδους τοῦ κύκλου μέτρησιν.

Ἀκόλουθον ἂν εἴη τὸν ἐμὸν πληροῦντι σκοπὸν τοῖς σαφηνείας, καὶ βραχυτέρας ἐπιστάσεως δεομένοις, τῶν ὑπὸ ἀρχιμήδους γεγραμμένων ἐντυγχάνοντι, καὶ τὰ ὁπωσοῦν ἐν αὐτοῖς ἐπεξεργασίας δεόμενα, τὸν δυνατὸν τρόπον συνεχῆ ποιεῖν τοῖς πρότερον ὑφ' ἡμῶν ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου γεγραμμένοις, ἔχει ὡς ἀληθῶς ἀξίου τυγχάνοντος τοῦ καὶ τοῖς μείζοσι καὶ πλείονος φροντίδος δεομένοις ἐπιστῆσαι. εἴη δ' ἂν ὡς πρὸς τὸ προκείμενον ἐφεξῆς τὸ γεγραμμένον ἀρχιμήδει βιβλίδιον κύκλου μέτρησιν τὴν ἐπιγραφὴν ἔχον, ἐν ᾧ τὴν πρόθεσιν τἀνδρὸς, ἐξ αὐτῆς τῆς ἐπιγραφῆς γνωρίζομεν. Βούλεται γὰρ ἐπιδεῖξαι τίνι χωρίῳ εὐθυγράμμῳ ἴσος ἂν εἴη κύκλος, πρᾶγμα πάλαι πρὸς τῶν πρὸ αὐτοῦ κλεινῶν φιλοσόφων ἐζητημένον. δῆλον γὰρ ὅτι τί ἂν εἴη τὸ ζητούμενον, ὅπερ ἱπποκράτης τε ὁ χῖος καὶ ἀντιφῶν ζητήσαντες ἐπιμελῶς ἐκείνους ἡμῖν τοὺς παραλογισμοὺς εὑρήκασιν, οὓς ἀκριβοῦς εἰδέναι νομίζω, τούς τε τὴν εὐδήμου γεωμετρικὴν ἱστορίαν ἐπεσκεμμένους, καὶ τῶν ἀριστοτελικῶν μετασχόντας κηρίων. ἀλλ' ἔστι μὲν τοῦτο τὸ βιβλίον, ὥς φησιν ἡρακλείδης ἐν τῷ ἀρχιμήδους βίῳ, πρὸς τὰς τοῦ βίου χρείας ἀναγκαῖον. δείκνυσι γὰρ, ὅτι ἡ περιφέρεια τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλασία, καὶ ἔτι ὑπερέχει, ἔλαττον μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει, μεῖζον δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις. τοῦτο οὖν φησὶ συνεγγὺς δεδεῖχθαι, εὑρῆσθαι μέντοι αὐτῷ διά τινων ἑλίκων εὐθεῖαν ἴσην τῇ δοθείσῃ κύκλου περιφερείᾳ.

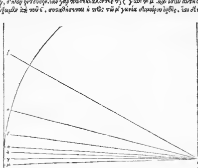
ΕΙΣ ΤΟ Α ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ πρῶτον θεώρημα καὶ τοῖς ἐπὶ ποσὸν μαθημάτων γεγυμνασμένοις, οὐδεμίαν ἔχον ζήτησιν φαίνεται, αὐτοῦ τοῦ ἀρχιμήδους ῥημάτων σαφῶς ἐκτεθειμένων, καὶ τὸ συμπέρασμα πρὸς τὴν πρότασιν ἀκολούθως ἀποσωζόντων. δοκεῖ δέ τι κατακεχρῆσθαι περὶ τὴν ἀπόδειξιν πράγματι μηδέπω δεδειγμένῳ. ἐκθέμενος γὰρ τρίγωνον ὀρθογώνιον φησίν, ἐχέτω τὴν μίαν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἴσην τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, τὴν δὲ λοιπὴν τῇ περιφερείᾳ, ἀλλὰ τῇ περιφερείᾳ κύκλου ἴσην εὐθεῖαν λαβεῖν, οὐδὲ πως αὐτοῦ ἤδη δεδειγμένον ἐστίν, ἀλλ' οὐδὲ ὑπὸ ἄλλου παραδεδομένον. συνορᾶν δὲ ὅμως χρή, ὡς οὐδὲν ἔξω τῶν προσηκόντων ὑπὸ ἀρχιμήδους γράφεται. ἔστι γὰρ τὸ μέγεθος τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, παντί που δῆλον, οἶμαι καὶ τοῦτο τῶν ἐφ' ἓν διεστώτων. ἔστι δὲ καὶ εὐθεῖα τοῦ αὐτοῦ εἴδους. κἂν εἰ μηδέπω οὖν ἐφαίνη δυνατὸν τῇ περιφερείᾳ κύκλου ἴσην εὐθεῖαν πορίσασθαι, ἀλλ' ὅμως εἶναί τινα τῇ φύσει εὐθεῖαν ἴσην αὐτῇ παρ' οὐδενὸς ἐστι ζητούμενον. τὸ γοῦν καὶ παρ' ἀρχιμήδους προτεθὲν τοιοῦτόν ἐστιν. ὅτι τρίγωνον τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον ὡς προείρηται τὰς πλευρὰς, ἴσον ἐστὶ τῷ κύκλῳ, ὥστε τὸ προτεθὲν ἐκθέμενος οὐδεμίαν ἂν καταχρήσεως κρίνοιτο. θαύματος δ' ἂν μᾶλλον κἂν τούτοις δόξειεν τοῖς οὕτως ὑπερμεγέθεσι τῶν ζητημάτων σαφῆ καὶ ῥᾳδίαν τὴν εὕρεσιν ἐπιτιθείς. ὡς δὲ εἴρηται, οὐδεμιᾶς ζητήσεως τῷ πρώτῳ θεωρήματι, τὸ γὰρ π σ ρ τρίγωνον, ὅτι μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ α ζ ο μ σχήματος. καὶ ὅτι ἁπλῶς περὶ τὸν δοθέντα κύκλον, δυνατὸν εὐθύγραμμον περιγράψαι, ὥστε τὰ τμήματα τὰ μεταξὺ τῶν τοῦ κύκλου περιφερειῶν καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ περιγραφομένου εὐθυγράμμου, ἐλάττονα εἶναι τοῦ δοθέντος χωρίου, σαφῶς εἴρηται ἐν τοῖς εἰς τὸ πρῶτον τῶν περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου γεγραμμένοις ἡμῖν.

ΕΙΣ ΤΟ Γ ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐν τούτῳ τῷ θεωρήματι συνεχῶς ἐπιταττόμεθα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τὴν τετραγωνικὴν πλευρὰν εὑρεῖν. τοῦτο δὲ ἀκριβῶς μὲν εὑρεῖν ἐπὶ ἀριθμοῦ μὴ ὄντος τετραγώνου ἀδύνατον. ἀριθμὸν μὲν γὰρ ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαζόμενον ποιεῖ τινα τετράγωνον ἀριθμόν. ὃς δὲ καὶ μόριον ἐφ' ἑαυτὸ γενόμενα, οὐκέτι ἀριθμὸν ποιεῖ πλήρη, ἀλλὰ καὶ μόριον. ὅπως δὲ δεῖ σύνεγγυς τὴν δυναμένην πλευρὰν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εὑρεῖν, εἴρηται μὲν ἥρωνι ἐν τοῖς μετρικοῖς. εἴρηται δὲ πάππῳ καὶ θέωνι καὶ ἑτέροις πλείοσιν, ἐξηγουμένοις τὴν μεγάλην σύνταξιν τοῦ κλαυδίου πτολεμαίου. ὥστε οὐδὲν ἡμᾶς χρὴ περὶ τούτου ζητεῖν, ἐξὸν τοῖς φιλομαθέσιν ἐξ ἐκεί-

νου ἀναλέγεσθαι, καὶ ἡ ὑπὸ γεζ τρίτου ὀρθῆς. ἐὰν γὰρ τὴν τοῦ ἑξαγώνου περιφέρειαν δίχα τεμόντες, καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς πρὸς τῷ γ ἀπολαβόντες ἐπιζεύξωμεν τὴν εζ, καὶ ἡ ὑπὸ γεζ ἔσται τρίτου ὀρθῆς. ἡ γὰρ πρὸς τὸ γ ἀποληφθεῖσα περιφέρεια ἡμίσεια οὖσα τῆς τοῦ ἑξαγώνου δωδέκατόν ἐστι τοῦ κύκλου, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ γεζ γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ οὖσα, δωδέκατόν ἐστι τῶν τεσσάρων ὀρθῶν, τρίτον ἄρα ὀρθῆς. ἡ εζ ἄρα πρὸς ζγ λόγον ἔχει, ὃν τς πρὸς ρνγ. ὅτι διπλῆ ἐστιν ἡ εζ τῆς ζγ, δῆλον ἐντεῦθεν. ἐὰν γὰρ προσεκβαλόντες τὴν ζγ ἐπὶ τὸ μ, καὶ ἴσην αὐτῇ ἀποθέμενοι ἐπιζεύξωμεν τὴν εμ, συσταθήσεται ἡ πρὸς τῷ μ γωνία διμοίρου ὀρθῆς. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ



ε γωνία διμοίρου ὀρθῆς. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ ζ διμοίρου· ἰσόπλευρον ἄρα τρίγωνον. ἥμισυ δή ἐστι τὸ γεζ, καὶ διὰ τὸ τὴν βάσιν τοῦ ἰσοπλεύρου ἴσην οὖσαν τῇ εζ δίχα τέμνεσθαι ὑπὸ τὸ γ, διπλῆ ἐστιν ἡ εζ τῆς γζ. ἡ δὲ εγ πρὸς γζ λόγον ἔχει, ὃν σξε πρὸς ρνγ. ἐπεὶ γὰρ ἡ εζ ὑπόκειται τς, ἐὰν αὐτὰ ἐφ᾽ ἑαυτὰ πολυπλασιάσωμεν γενήσεται $\overset{\theta}{\mathrm{M}}$ ͵γχλς. ἡ δὲ γζ ἐστὶ ρνγ. ὥστε τὸ ἀπ᾽ αὐτῆς ἔσται $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$ ͵γυθ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ εζ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ εγ, γζ, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ἀπὸ εζ ὄντος $\overset{\theta}{\mathrm{M}}$ ͵γχλς, ἀφέλωμεν τὸ ἀπὸ γζ ὑπάρχον $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$ ͵γυθ, καταλειφθήσεται τὸ ἀπὸ εγ $\overset{\zeta}{\mathrm{M}}$ σκζ. ὥστε πλευρὰ τετραγωνικὴ σξε. καὶ ἔτι μόριον ἐλάχιστον καὶ ἀνεπαίσθητον. λείπει γὰρ ἡ τῶν σξε δύναμις τῆς ἀκριβοῦς μονάσιν β. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ εζ τς	ἡ ζγ ρνγ	λοιπὸν τὸ ἀπὸ εγ $\overset{\zeta}{\mathrm{M}}$ σκζ
ἐπὶ τς	ἐπὶ ρνγ	τὰ δὲ σξε ἐφ᾽ $\overset{\zeta}{\mathrm{M}}$ σκε
$\overset{\theta}{\mathrm{M}}$ ͵αω	$\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$ ͵ετ	ἐπεὶ δὴ λείπει ἄρα $\overset{o}{\mathrm{M}}$ β
͵αω λς	͵ζχν	$\overset{\varepsilon}{\mathrm{M}}$ M ͵β ͵α εἰς τὸ ἀκριβὲς
ὁμοῦ $\overset{\theta}{\mathrm{M}}$ ͵γχλς	υνθ	$\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$ ͵β ͵γχτ
	$\overset{\beta}{\mathrm{M}}$ ͵γυθ	͵ατκε.

Τετμήσθω οὖν ἡ ὑπὸ ζεγ δίχα τῇ εη. ἔστιν ἄρα ἡ ζε πρὸς εγ, ἡ ζη πρὸς ηγ, διὰ τὸ τρίτον θεώρημα τοῦ ἕκτου βιβλίου τῆς Εὐκλείδου στοιχειώσεως. καὶ συνθέντι ὡς συναμφότερος ἡ ζε, εγ πρὸς εγ, ἡ ζγ πρὸς γη. καὶ ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ ζε, εγ πρὸς ζγ, ἡ εγ πρὸς γη. συναμφότερος δὲ ἡ εζ, εγ μείζων ἐστὶν ἤπερ φοα. ἡ μὲν γὰρ ζε ὑπόκειται τς, ἡ δὲ εγ σξε καὶ ἔτι μορίου τινός. ὥστε μείζον εἰσὶ τῶν φοα. ἡ δὲ ζγ ἐστὶ ρνγ. συναμφότερος ἄρα ἡ ζε, εγ πρὸς ζγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ φοα πρὸς ρνγ. ὥστε καὶ ἡ εγ πρὸς γη μείζονα λόγον ἔχει,

ἤπερ

ἤπερ φϛα πρὸς ρνγ, ἡ ηε ἄρα πρὸς ηγ δυνάμει λόγον ἔχει, ὃν Μ λδ, θυν πρὸς Μ β, γυθ. συνάχθήσεται δὲ οὕτως. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ἡ εγ πρὸς γη μείζονα λόγον ἔχουσα ἤπερ φϛα πρὸς ρνγ. ἄν τις ὑποθοῖτο τὴν μὲν εγ, φϛα, τὴν δὲ γη, ρνγ, ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ εγ Μ λβ, ϛμα. τὸ δὲ ἀπὸ γη Μ β, γυθ. συναμφότερα δὲ ἴσα ὄντα τῷ ἀπὸ εη, ἔσται Μ λδ, θυν. τούτων πλευρὰ τετραγωνικὴ φϙα η ἔγγιστα. ἐλλείπει γὰρ ὁ ἀπὸ τοῦ φϙα ἴσου τετραγώνου εἰς τὸ ἀκριβὲς Μ κα. ϛ ιε ἔγγιστα. ἡ ἄρα εη πρὸς ηγ, δυνάμει μὲν λόγον ἔχει ὃν Μ λδ, θυν πρὸς Μ β, γυθ. μήκει δὲ ὃν φϙα η ἴσον ἔγγιστα πρὸς ρνγ. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ εγ φϛα	ἡ ηγ, ρνγ	φϙα η
ἐπὶ φϛα	ἐπὶ ρνγ	ἐπὶ φϙα η
Μ κε Μ, εφ	Μ α, ετ	Μ κε, Μ, εφξβ<
Μ γ, εδλο	ε, β φ, ξν.	Μ ε, ηρ ϙια δ
φϛα	τ ρνθ	φϙα η
Μ λβ, ϛμα	= Μ β, γυθ	ξβ ζια δ' υξ δ
	= Μ λδ	θ υηκζ δ ξ δ
Ἐκ τούτων συνάγεται		Ἐλλείπει ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς
τὸ ἀπὸ εη		Μ κα ϛ' ιε ἔγγιστα
Μ λδ, θυν		

Πάλιν δίχα ἡ ὑπὸ ηεγ τῇ θε, διὰ τὰ αὐτὰ ἡ εγ πρὸς γθ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵αρξβ πρὸς ρνγ. γίνεται γὰρ διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας, ὡς ἡ ηε πρὸς εγ, ἡ ηθ πρὸς θγ. καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἡ ηε, εγ πρὸς εγ, ἡ ηγ πρὸς γθ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ ηε, εγ πρὸς ηγ, ἡ εγ πρὸς γθ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν εγ, φϛα, καὶ ἔτι μορίου τινός. ἡ δὲ εη φϙα. καὶ ἔτι μορίου τινός. μείζονες ἄρα εἰσίν, ἤπερ ͵αρξβ η. καὶ ἔστιν ἡ ηγ, ρνγ. συναμφότερος ἄρα ἡ ηε, εγ πρὸς ηγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵αρξβ η πρὸς ρνγ.

Η θε ἄρα πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵αξβ η πρὸς ρνγ. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ἡ εγ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχουσα, ἤπερ ͵αρξβ η πρὸς ρνγ. ἄν τις ὑποθοῖτο αὐτὰς οὕτως ἔχειν, ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ εγ Μ ρλ φλδ< ξ' δ. τὸ δὲ ἀπὸ γθ Μ β, γυθ. τὸ ἄρα ἀπὸ εθ ἴσον ὂν τοῖς ἀπὸ εγ, γθ, ἔσται Μ ρλ, γλμγ< ξ' δ, ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ͵αροβ. λείπεται γὰρ τοῦ ἀκριβοῦς δυνάμεως τὸ ἀπ' αὐτῆς Μ ξϛ. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ εγ ͵αρξβ η	ἡ θγ ρνγ	͵αροβ η
ἐπὶ ͵αρξβ η	ἐπὶ ρνγ	ἐπὶ ͵αροβ η
Μ Μ Μ βρκε	μα ετ	Μ Μ Μ βρμϛ<
Μ Μ ϛριβ<	ε β φρν	Μ Μ ζρκα<
Μ ϛ γχρκζ<	τρνθ	Μ ζ δλρμη< δ
βρρκδ δ	= Μ β, γυθ	βσρμδ δ
ρμε δ ξ' δ	= Μ γλζ< ξ' δ	ρμϛ< ξ' δ
= Μ φλδ< ξ' δ		
τὸ ἀπὸ εθ ἴσον τοῖς		Ἐλλείπει ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς
ἀπὸ εγ γθ ἐστὶ Μ γλμγ< ξ' δ.		Μ λϛ.

Ἐπὶ δίχα ἡ ὑπὸ θεγ τῇ εκ, ἡ εγ ἄρα πρὸς γκ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ͵βτλδ δ' πρὸς ρνγ. πάλιν γὰρ διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς ὑπὸ θεγ γωνίας ἐστὶν ὡς ἡ θε πρὸς εγ, ἡ θκ πρὸς γκ. καὶ συνθέντι ὡς συναμφότερος ἡ θε, εγ πρὸς εγ, ἡ θγ πρὸς γκ. ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ θε, εγ πρὸς θγ, ἡ εγ πρὸς γκ. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἡ θε ͵αροβ η, καὶ ἔτι μορίου τινός. συναμφότερος θγ, ἡ εγ πρὸς γκ. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἡ θε, εγ μείζων ἐστὶ ͵βτλδ δ'. καὶ ὑπόκειται ἡ θγ ρνγ. συναμφότερος ἄρα ἡ θε, εγ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βτλδ δ' πρὸς ρνγ.

Η εκ ἄρα πρὸς τὴν γκ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵βτλθ δ' πρὸς ρνγ. πάλιν γὰρ ἐπεὶ ὑπόκειται ἡ μὲν

ἡ μὲν εγ ͵βτλδ δ΄. ἡ δὲ γκ, ρνγ. ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ εγ $\overset{\phi\mu\delta}{M}$ ͵ηψκγ ις΄. τὸ δὲ ἀπὸ γκ $\overset{\beta}{M}$ ͵γυθ. τούτοις γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ κε. ἔσται ἄρα $\overset{\phi\mu\zeta}{M}$ ͵βρλβ ις΄. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ἔγγιστα ͵βτλθ δ΄. λείπει γὰρ τὸ ἀπ' αὐτῆς τοῦ ἀκριβοῦς $\overset{o}{M}$ μα ∠. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ εγ ͵βτλδ δ΄	κγ κ ρνγ	͵βτλθ δ΄
ἐπὶ ͵βτλδ δ΄	ἐπὶ ρνγ	ἐπὶ ͵βτλθ δ΄
$\overset{\upsilon}{M}$ $\overset{\xi}{M}$ $\overset{\eta}{M}$ ηφ	$\overset{\alpha}{M}$ ετ	$\overset{\upsilon}{M}$ $\overset{\xi}{M}$ $\overset{\eta}{M}$ $\overset{\alpha}{M}$ κφ
$\overset{\xi}{M}$ $\overset{\theta}{M}$ ͵θασοε	͵εβφρν	$\overset{\xi}{M}$ $\overset{\theta}{M}$ ͵θβψοε
$\overset{\eta}{M}$ ͵θλρκζ ∠	͵γρνθ	$\overset{\eta}{M}$ ͵θλςοζ ∠
͵ηασρκ ις α	ὁμοῦ $\overset{\beta}{M}$ ͵γυθ	$\overset{\alpha}{M}$ ͵κβψςοπαβ δ΄
φπγ ∠ ις΄		φπδ ∠ δ΄ ις΄
ὁμοῦ $\overset{\phi\mu\delta}{M}$ ͵ηψκγ ις΄		ὁμοῦ $\overset{\phi\mu\zeta}{M}$ ͵βϟ ∠ ις΄
ἐκ τούτων συνάγεται τὸ		ἐλλείπει ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς
ἀπὸ εκ $\overset{\phi\mu\zeta}{M}$ ͵βρλβ ις.		$\overset{o}{M}$ μα ∠

Ἐπεὶ δίχα ἡ ὑπὸ κεγ τῇ ελ, ἡ εγ ἄρα πρὸς γλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὰ ͵δχογ ∠ πρὸς ρνγ. πάλιν γὰρ διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας ἐστίν, ὡς ἡ κε πρὸς εγ, ἡ κλ πρὸς λγ. καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἡ κε, εγ πρὸς εγ, ἡ κγ πρὸς γλ. ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ κε, εγ πρὸς κγ, ἡ εγ πρὸς λγ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν κε ͵βτλθ δ΄, καὶ ἔτι μορίου τινός. ἡ δὲ εγ ͵βτλδ δ΄, καὶ ἔτι μορίου. συναμφότερος ἄρα ἡ κε, εγ μείζων ͵δχογ ∠΄. καὶ ἔστιν ἡ κγ, ρνγ. συναμφότερος ἄρα ἡ εκ, εγ πρὸς κγ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵δχογ ∠ πρὸς ρνγ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ κε, εγ πρὸς κγ, οὕτως ἡ εγ πρὸς γλ. καὶ ἡ εγ ἄρα πρὸς γλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵δχογ ∠ πρὸς ρνγ. ἐπεὶ δὲ ἡ ὑπὸ ζεγ τρίτον οὖσα ὀρθῆς, δωδέκατον μέρος ἐστὶ τῶν τεσσάρων ὀρθῶν. ταύτης δὲ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ κεγ, εἰκοστοτέταρτον ἂν εἴη. ταύτης δὲ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ θεγ, ὡς τὸ μη ἐστί. ταύτης δὲ ἡμίσεια ἐστὶν ἡ ὑπὸ κεγ. ϟϛ ἄρα ἐστί, ἧς ἡμίσεια οὖσα ἡ ὑπὸ λεγ, ρϟβ ἐστί. κείσθω οὖν φησὶ ἴση αὐτῇ ἡ ὑπὸ γεμ. καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ζγ ἐπὶ τὸ μ. ἡ ἄρα ὑπὸ λεμ διπλασία οὖσα τῆς ὑπὸ λεγ, ϟϛ ἐστὶ τῶν τεσσάρων ὀρθῶν. ὥστε καὶ ἡ λμ πλευρά ἐστι τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου πολυγώνου πλευρὰς ἔχοντος ϟϛ. ἐπεὶ οὖν ἡ εγ πρὸς τὴν γλ δέδεικται μείζονα λόγον ἔχουσα ἤπερ ͵δχογ ∠ πρὸς ρνγ, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν εγ διπλῆ ἡ αγ, τῆς δὲ λγ ἡ λμ, καὶ ἡ αγ ἄρα πρὸς λμ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵δχογ ∠ πρὸς ρνγ. ἀνάπαλιν ἄρα ἡ λμ πρὸς αγ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ρνγ πρὸς ͵δχογ ∠. καὶ ἐπεὶ ἡ λμ πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ πλευρὰς ἔχοντος ϟϛ. ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ πολυγώνου ἐστὶ $\overset{\alpha}{M}$ ͵δχπη. ὁ γὰρ ϟϛ ἐπὶ τὸν ρνγ πολυπλασιαζόμενος τοῦτον ποιεῖ. ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν αγ διάμετρον ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ $\overset{\alpha}{M}$ ͵δχπη πρὸς ͵δχογ ∠. ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ πολυγώνου τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐστὶ τριπλασία, καὶ ἔτι ὑπερέχει $\overset{o}{M}$ χξζ ∠. τοῦτο δὲ ἐλάττονα ἐστὶ τοῦ ἑβδόμου τῆς διαμέτρου μιᾶς μονάδος ἑβδόμῳ μέρει. τὰ γὰρ ἑπταπλάσια τῶν χξζ ∠, ἅπερ ἐστὶ ͵δχοβ ∠, ἐλάττονα ἐστὶ τῆς διαμέτρου $\overset{o}{M}$ α. ἐπεὶ οὖν τὸ πολύγωνον ἔλαττον ἐστὶν ἢ τριπλάσιον, καὶ ἔτι ἑβδόμῳ ὑπερέχον. ἡ δὲ περίμετρος τοῦ κύκλου ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ πολυγώνου. πολλῷ ἄρα ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλασία, καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι ἢ ἑβδόμῳ μέρει.

ΕΙΣ ΤΟ Δ ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἑξῆς δὲ κατασκευάζων τὸ λοιπὸν μέρος τοῦ θεωρήματος φησί. ἔστω κύκλος περὶ διάμετρον τὴν αγ, καὶ τρίτον ὀρθῆς ἡ ὑπὸ βαγ. τοῦτο δὲ ἔσται, ἐὰν ἀπὸ τοῦ γ τὴν τοῦ ἑξαγώνου ἴσην ἀπολαβόντες τὴν γβ ἐπιζεύξωμεν τὴν αβ. ἡ γὰρ ἐπὶ τῆς τοῦ ἑξαγώνου περιφερείας βεβηκυῖα γωνία πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ διμοίρου ἐστὶν ὀρθῆς, πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ τρίτου. ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ αβγ, τρίτου δὲ ἡ ὑπὸ βαγ, διμοίρου ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ αγβ. ἐὰν ἄρα προσεκβάλλοντες τὴν γβ ἐπὶ τὸ β, καὶ ἴσην αὐτῇ ἀπολαβόντες ἀπὸ τοῦ α ἐπιζεύξωμεν, ἰσόπλευρον ἔσται τὸ τρίγωνον, καὶ διὰ τὸ τὴν αβ κάθετον διχοτομεῖν τὴν βάσιν, διπλῆ ἐστὶν ἡ αγ τῆς γβ. ἐὰν οὖν πάλιν λάβωμεν τὴν αγ, ͵αφξ ἔσται ἡ γβ, ψπ. ἐπεὶ τὸ μὲν ἀπὸ αγ ἔσται $\overset{\sigma\mu\gamma}{M}$ ͵γχ. τὸ δὲ ἀπὸ γβ $\overset{\xi}{M}$ ͵ηυ. καὶ ἐὰν ἀφέλωμεν τὸ ἀπὸ γβ ἀπὸ τοῦ αγ, λοιπὸν καταλειφθήσεται τὸ ἀπὸ αβ $\overset{\rho\pi\beta}{M}$ ͵εσ, ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ͵ατνα ἔγγιστα, περιττεύει γὰρ τὸ ἀπ' αὐτῆς τοῦ ἀκριβοῦς

κριβοῦς Μ α. διό φησιν, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἡ α β πρὸς β γ, ἤπερ ͵α τ ν α πρὸς ψ π. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ α γ ͵α φ ξ
ἐπὶ ͵α φ ξ
Μ Μ Μ
Μ Μ Μ
Μ Μ ͵γ χ
ὁμοῦ Μ ͵γ χ.
ἂν ἀφέλωμεν τὸ ἀπὸ β γ ἀπὸ τοῦ α γ, καταλείπονται
Μ ͵ε ς.

ἡ γ β ψ π
ἐπὶ ψ π
Μ Μ ς
Μ ς ς υ
ὁμοῦ Μ ͵ϛ υ

͵α τ ν α
ἐπὶ ͵α τ ν α
Μ Μ Μ α
Μ Μ Μ ͵ε τ
Μ Μ ͵ε β φ ν
͵α τ ν α
ὁμοῦ Μ ͵ε ς α
ὑπερβάλλει τοῦ ἀκριβοῦς Μ α.

Τετμήσθω δίχα ἡ ὑπὸ β α γ τῇ α ζ η. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ β α η τῇ ὑπὸ η γ β. ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς περιφερείας βεβήκασιν, ἀλλὰ καὶ τῇ ὑπὸ η α γ, καὶ ἡ ὑπὸ η γ β ἄρα τῇ ὑπὸ η α γ ἐστὶν ἴση. καὶ κοινὴ ἡ ὑπὸ α η γ ὀρθή. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ η ζ γ λοιπῇ τῇ ὑπὸ α γ η ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ α η γ τρίγωνον τῷ γ η ζ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ α η πρὸς η γ, ἡ γ η πρὸς η ζ. καὶ ἡ α γ πρὸς γ ζ. τῶν γὰρ ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι. ἀλλ' ὡς ἡ α γ πρὸς γ ζ, συναμφότερος ἡ γ α β πρὸς γ β, καὶ ἡ α η πρὸς η γ. ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ β α γ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς α ζ, ἔστιν ὡς ἡ β α πρὸς α γ, ἡ β ζ πρὸς ζ γ. καὶ συνθέντι ὡς συναμφότερος ἡ β α, α γ πρὸς α γ, ἡ β γ πρὸς γ ζ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς συναμφότερος ἡ β α, α γ πρὸς β γ, ἡ α γ πρὸς γ ζ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν α β ἐλάσσων, ἢ ͵α τ ν α. ἡ δὲ α γ ͵α φ ξ, ἡ δὲ β γ, ψ π. συναμφότερος ἄρα ἡ α β, β γ πρὸς β γ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵β ϡ ι α πρὸς ψ π καὶ ἡ α γ ἄρα πρὸς γ ζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵β ϡ ι α πρὸς ψ π. ὡς δὲ ἡ α γ πρὸς γ ζ, ἡ α η πρὸς η γ, καὶ ἡ α η ἄρα πρὸς η γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵β ϡ ι α πρὸς ψ π. διὰ οὖν τοῦτο, ἔσται τὸ Μ ἄρα α η Μ ͵γ ϡ κ α. τὸ δὲ ἀπὸ η γ Μ ͵η υ. καὶ ἔστιν αὐτοῖς ἴσον τὸ ἀπὸ α γ. ἐπεὶ οὖν ἄρα ἔσται Μ ͵β τ κ α. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ͵γ ι γ ∠ δ΄ ἔγγιστα. ὑπερέχει γὰρ τὸ ἀπ' αὐτῆς τοῦ ἀκριβοῦς δυνάμεως Μ τ ξ η ι ς. διὰ ταῦτα οὖν φησιν, ὅτι ἡ α γ πρὸς γ η ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵γ ι γ ∠ δ΄ πρὸς ψ π. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ α η ͵β ϡ ι α
ἐπὶ ͵β ϡ ι α
Μ Μ Μ ͵β
Μ Μ ͵θ λ
Μ ͵θ ξ ι
͵β ϡ ι α
ὁμοῦ Μ ͵γ ϡ κ α

ἡ η γ ψ π
ἐπὶ ψ π
Μ Μ ς
Μ ς ς υ
ὁμοῦ Μ ͵η υ

͵γ ι γ ∠ δ΄
ἐπὶ ͵γ ι γ ∠ δ΄
Μ Μ ͵θ α φ ψ ν
Μ ͵ϛ λ ε β ∠
͵θ λ θ α ∠ ∠ δ΄
͵α φ ς ∠ δ΄ α
ψ ν γ δ΄ η ι ς
ὁμοῦ Μ ͵β χ ω θ ι ς
ὑπερέχει τοῦ ἀκριβοῦς Μ τ ξ η ι ς

τὰ ἀπὸ τῶν α η, η γ Μ ͵β τ κ α

Δίχα ἡ ὑπὸ γ α η τῇ α θ. διὰ οὖν τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας πρὸς τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων, καὶ ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν. καὶ τὸ συνθέντι καὶ ἐναλλάξ, ἔστιν ὡς συναμφότερος ἡ η α γ πρὸς η γ, η α θ πρὸς θ γ. καὶ ὑπόκειται ἡ Μ α η ἐλάσσων ἢ ͵β λ ι α. ἡ δὲ α γ ἐλάσσων ἤπερ ͵γ ι γ ∠ δ΄. συναμφότερος ἄρα ἡ η α, α γ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ ͵ε λ κ δ ∠ δ΄. ἡ δὲ η γ ἐστὶ ψ π. συναμφότερος ἄρα ἡ γ α, α η πρὸς η γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵ε λ κ δ ∠ δ΄ πρὸς ψ π. ὥστε καὶ η α θ πρὸς θ γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵ε λ κ δ ∠ δ΄ πρὸς ψ π. ὥστε ἡ α θ πρὸς θ γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵α ω κ γ πρὸς σ μ. ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας ἐστὶ μέρος ιγ. ἐπεὶ τὰ τούτων τετραπλάσια, η α θ πρὸς θ γ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵α ω κ γ πρὸς σ μ. διὰ τοῦτο γάρ φησιν, ὅτι ἑκατέρα ἑκατέρας ἐστὶ δ΄ ιγ. καὶ ἐπεὶ ἡ α θ ἐστὶ ͵α ω κ γ. τὸ ἄρα ἀπ' αὐτῆς ἐστὶ Μ ͵γ λ κ θ. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ θ γ σ μ ἐπεὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς Μ ͵ζ ν. ἐπεὶ ἔστι τοῖς ἀπὸ α θ, θ γ ἴσον τὸ ἀπὸ α γ. ἔσται ἄρα Μ λ κ θ. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ͵α ω λ η΄ ια΄. τὸ γὰρ ἀπ' αὐτῆς ὑπερέχει τοῦ ἀκριβοῦς Μ τ η α ἐγγύς. ὥστε ἡ α γ πρὸς θ γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵α ω λ η θ΄ ια΄ πρὸς σ μ, οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ α θ ͵α ω κ γ — ἡ θ γ σ μ — ͵α ω λ η θ΄ ια΄

θ — ἐπὶ

ἐπὶ ͵αω κγ
Μ Μ Μ γ
Μ Μ Μ ͵ϛβυ
Μ Μ ͵ϛυξ
γβυξθ
ὁμοῦ Μ ͵γτκθ.
τούτοις ἴσον τὸ ἀπὸ ͵αγ
Μ λκθ ἐστὶ

ἐπὶ σμ
Μ ν
καχ
ὁμοῦ Μ ͵ζχ

ἐπὶ ͵αω λκθ΄ ια΄
Μ Μ Μ ηϙια θ΄ ∠ ια΄
Μ Μ Μ ͵ασυ πκ Μ θ β ια΄
Μ Μ ͵δλσμγ γ β ια΄
κϛυςμξδ
ϙια θ΄ πκ γ γ ωα ϛ θ΄
ια θ βια.
αἰκϛ θρκα
ὁμοῦ Μ ͵ασναγ ορ γ γ γ υς.
ὑπερέχει ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς Μ τκ α ἔγγυς

Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ θ α γ γωνία τῇ κ α. πάλιν οὖν διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας καὶ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων καὶ τὴν ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν, καὶ τὸ συνθέντι καὶ ἐναλλὰξ ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ θ α α γ πρὸς γ θ, ἡ α κ πρὸς κ γ. ἀλλὰ συναμφότερος ἡ θ α, α γ ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ ͵γχξ α θ΄ ια΄. ὑπόκειται ἡ Μ θ α ὑπόκειται ͵αω κγ. ἡ δὲ α γ ͵αω λκθ΄ ια΄. ἔστι δὲ καὶ ἡ θ γ σμ. συναμφότερος ἄρα ἡ θ α, α γ πρὸς θ γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵γχξ α θ΄ ια΄ πρὸς σμ, ὥστε καὶ ἡ α κ πρὸς κ γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵γχξ α θ΄ ια΄ πρὸς σμ. καὶ ἐπὶ τῶν Μ ͵γχξα θ΄ ια΄ τοῖς ια΄ καὶ μ΄ ἐστὶ ͵αζ. τῶν δὲ σμ, ξϛ. ἡ α κ ἄρα πρὸς κ γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵αζ πρὸς ξϛ. καὶ ἔστι τὸ ἀπὸ α κ Μ ͵δλμθ. τὸ δὲ ἀπὸ κ γ ͵δτνϛ, οἷς ἴσον ὂν τὸ ἀπὸ α γ ἐστὶ Μ ηυϛ. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ͵αθϛ ἔγγιστα. ἡ α γ ἄρα πρὸς γ κ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵αθϛ πρὸς ξϛ. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ α κ ͵αζ
ἐπὶ ͵αζ
Μ ζ
ζ μ θ
ὁμοῦ Μ ͵δμθ. ὁμοῦ ͵δτνϛ.
Τούτοις ἴσον τὸ ἀπὸ α γ ἐστὶ Μ ηυ

ἡ κ γ ξϛ
ἐπὶ ξϛ
γχ τξ
τξ λϛ

α θϛ
ἐπὶ ͵αθϛ
Μ θ ρξϛ ∠ ϛ
θ π α α ϛ
ρξϛ ζ. ϛ. α γ λϛ
ὁμοῦ Μ ηυι ζ. γ. λϛ.
ὑπερέχει τοῦ ἀκριβοῦς Μ ιβ. γ λϛ.

Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ κ α γ γωνία τῇ α λ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ κ α, α γ πρὸς κ γ, ἡ α λ πρὸς λ γ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν α κ ἐλάσσων, ἢ ͵αζ. ἡ δὲ α γ ἐλάσσων ἢ ͵αθϛ. ἡ δὲ κ γ, ξϛ. συναμφότερος ἄρα ἡ κ α, α γ πρὸς κ γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βιϛ, ϛ΄ πρὸς ξϛ. καὶ ἡ α λ ἄρα πρὸς λ γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βιϛ, ϛ΄ πρὸς ξϛ. καὶ ἐπεὶ ἡ α λ ὑπόκειται ͵βιϛϛ΄. καὶ τὸ ἀπὸ αὐτῆς Μ ͵δλκηλϛ΄. ἡ δὲ λ γ, ξϛ. καὶ τὸ ἀπὸ αὐτῆς ͵δτνϛ. ἴσον δὲ αὐτοῖς ἐστὶ τὸ ἀπὸ α γ. ἔσται ἄρα Μ ͵θσπ δλϛ. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ἐστὶ ͵βιζ δ΄ ἔγγιστα ὑπερέχει τὸ ἀπὸ αὐτῆς τοῦ ἀκριβοῦς Μ ιγ ϛ΄ κ. ὥστε ἡ α γ πρὸς γ λ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βιζ δ΄ πρὸς ξϛ. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ α λ ͵βιϛϛ΄
ἐπὶ ͵βιϛϛ΄
Μ Μ Μ ͵βτλβ γ΄
Μ ρξα ∠ ϛ΄
Μ ͵βξλϛα
τλγ γ α ∠ ϛ΄ α λϛ
ὁμοῦ Μ ͵δλκηλϛ΄
τούτοις ἴσον τὸ ἀπὸ α γ ἐστὶ
Μ ͵θσπ δλϛ.

ἡ λ γ ξϛ
ἐπὶ ξϛ
γχ τξ
τξ λϛ
ὁμοῦ ͵δτνϛ

͵βιζ δ΄
ἐπὶ ͵βιζ δ΄
Μ Μ Μ ͵δφ
Μ ροβ ∠
Μ ͵δα μθ α ∠ δ΄
φβ ∠ α ∠ δ΄ ιϛ΄
θ σ ϙ ζ ∠ ιϛ΄
πλεονάζει τοῦ ἀκριβοῦς
Μ ιγ ∠ κ΄

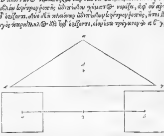
Ἐπεὶ οὖν ἡ α γ πρὸς γ λ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βιζ δ΄ πρὸς ξϛ. ἀνάπαλιν ἄρα ἡ λ γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ξϛ πρὸς ξϛ πρὸς ͵βιζ δ΄. καὶ ἐπεὶ ἡ γ β περιφέρεια ἕκτον ἐστὶ τοῦ κύκλου. ἡ η γ ἄρα ιβ΄ μέρος ἐστὶν, ἡ δὲ θ γ, κδ. ἡ δὲ κ γ, μη. ἡ δὲ λ γ, ϙϛ. ὥστε ἡ λ γ εὐθεῖα πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ ϙϛ πλευρὰς ἔχοντος, καὶ ἐστὶν ἡ λ γ, ξϛ. ἡ ἄρα τοῦ πολυγώνου περίμετρος πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵ϛτλϛ πρὸς ͵βιζ δ΄. τοῦτο γάρ ἐστι τριπλάσια. καὶ ἔτι ὑπερέχει σπδ

δι̅, ἅπερ ἐλάττονα ἐστὶ δέκα ἑβδομηκοστομόνων, ὅ ἐστι $\overset{\mu}{}$, κζ < s´ ἔγγιστα. τὰ δὲ δεκαπλάσια τούτων ϛο̅ζ. πολλῷ ἄρα ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια μείζων ἐστὶν ἢ τριπλάσια, καὶ δέκα ἑβδομηκοστόμονα. ὡς μὲν οὖν ἐνεχώρει οἱ παρ' αὐτοῦ εἰρημένοι ἀριθμοί, μετρίως ἐσαφηνίσθησαν. ἰστέον δὲ ὅτι καὶ ἀπολλώνιος ὁ περγαῖος ἐν τῷ ὠκυτοκίῳ ἀπέδειξεν αὐτὸ δι' ἀριθμῶν ἑτέρων ἐπὶ τὸ σύνεγγυς μᾶλλον ἀγαγών. τοῦτο δὲ ἀκριβέστερον μὲν εἶναι δοκεῖ, οὐ χρήσιμον δὲ πρὸς τὸν ἀρχιμήδους σκοπόν. ἔφαμεν γὰρ αὐτὸν σκοπὸν ἔχειν ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ τὸ σύνεγγυς εὑρεῖν, διὰ τὰς ἐν τῷ βίῳ χρείας, ὥστε οὐδὲ πόρος ὁ νικαεὺς δύναιτο εὐρεθήσεται, μέμψιν ἐπάγων ἀρχιμήδει, ὡς μὴ ἀκριβῶς εὑρόντι ποία εὐθεῖα ἴση ἐστὶν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια, ἐξ ὧν αὐτὸς ἐν τοῖς κηρίοις φησί, τὸν ἑαυτοῦ διδάσκαλον Φίλωνα λέγων, τὸν ἀπὸ γαδάρων εἰς ἀκριβεστέρους ἀριθμοὺς ἀγαγεῖν τῶν ὑπ' ἀρχιμήδους εἰρημένων, τοῦ τε ζ̅ φημὶ καὶ τῶν ι θ´. ἅπαντες γὰρ ἐφεξῆς φαίνονται, τὸν σκοπὸν αὐτοῦ ἠγνοηκότες, κέχρηνται δὲ καὶ τοῖς τῶν μυριάδων πολλαπλασιασμοῖς καὶ μερισμοῖς, οἷς οὐκ εὔκολον παρακολουθεῖν, τῷ μὴ διὰ τῶν μάγνου λογιστικῶν ἠγμένον. εἰ δέ τις ὅλως ἐβούλετο εἰς ἔλαττον αὐτὸ καταγαγεῖν, ἔχρην τοῖς ἐν τῇ μαθηματικῇ συντάξει τοῦ κλαυδίου πτολεμαίου εἰρημένοις ἀκολουθοῦντα, διὰ τῶν μοιρῶν καὶ λεπτῶν καὶ τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν τοῦτο ποιεῖν. καὶ πεποιήκειν ἂν ἐγὼ τοῦτο, εἰ μὴ ὅπερ πολλάκις εἶπον ἐγνώκειν, ὡς οὔτε ἀκριβῶς δυνατὸν διὰ τῶν ἐνταῦθα εἰρημένων εὑρεῖν τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ ἴσην εὐθεῖαν. καὶ εἴ τις τὸ σύνεγγυς καὶ παρὰ μικρὸν προσέχοι, ἀρκεῖ τὰ ὑπ' ἀρχιμήδους ἐνταῦθα εἰρημένα.

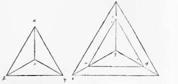
ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΧΙΜΗδους τῆς κύκλου μετρήσεως ἐκδόσεως παραναγνωσθείσης τῷ μιλησίῳ μηχανικῷ ἰσιδώρῳ τῷ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΕΙΣ ΤΟ Α ΤΩΝ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΚΩΝ.

ΤΗΝ ῥοπήν, ὦ γενναιότατε πέτρε, κοινὸν εἶναι γένος βαρύτητος καὶ κουφότητος, ἀριστοτέλης τε λέγει, καὶ πτολεμαῖος τούτῳ ἀκολουθῶν. ὁ δέ γε παρὰ πλάτωνι τίμαιος πᾶσαν ῥοπὴν ἀεὶ βαρύτητος λέγει γίνεσθαι. τὴν γὰρ κουφότητα στέρησιν νομίζει, ὧν ἔξεστι τὰς λέξεις τοῖς φιλομαθέσιν ἀναλέγεσθαι, ἔκ τε τοῦ περὶ ῥοπῶν βιβλίου τοῦ πτολεμαίου συγγεγραμμένου, καὶ ἐκ τῶν ἀριστοτέλους φυσικῶν πραγματειῶν, καὶ ἐκ τοῦ πλάτωνος τιμαίου, καὶ τῶν ταῦτα ὑπομνηματισάντων. ὁ δὲ ἀρχιμήδης ἐν τούτῳ τῷ βιβλίῳ κέντρον ῥοπῆς ἐπιπέδου σχήματος νομίζει, ἀφ' οὗ ἀρτώμενον παράλληλον μένει τῷ ὁρίζοντι, δύο δὲ ἢ πλειόνων ἐπιπέδων κέντρον ῥοπῆς, ἤτοι βαρέους, ἀφ' οὗ ἀρτώμενος ὁ ζυγὸς παράλληλός ἐστι τῷ ὁρίζοντι, οἷον ἔστω τρίγωνον τὸ α β̅ γ, καὶ ἐν τῷ μέσῳ αὐτοῦ σημεῖόν τι τὸ δ̅, ἀφ' οὗ ἀρτώμενον παράλληλον μένει τῷ ὁρίζοντι. δῆλον οὖν ὅτι ἰσορροπήσει τὰ α β̅ γ μέρη ἑαυτοῖς, καὶ οὐδὲ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, μᾶλλον ῥέψει ἐπὶ τὸν ὁρίζοντα. ὁμοίως δὲ καὶ ζυγοῦ ὄντος τοῦ α̅, β̅, καὶ ἀπηρτημένων ἐξ αὐτοῦ τῶν α̅, β̅ μεγεθῶν, ἐὰν ἀρτώμενος ὁ ζυγὸς ἀπὸ τοῦ γ̅ ἰσορροποῦντα ἔχει τὰ α̅, β̅ μέρη, παράλληλος μένει τῷ ὁρίζοντι, καὶ ἔσται κέντρον τῆς ἀρτήσεως τῶν α̅, β̅ μεγεθῶν τὸ γ̅.

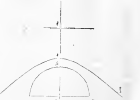


Καλῶς δὲ δοκεῖ ὁ γεμῖνος εἰπεῖν περὶ τοῦ ἀρχιμήδους, ὅτι τὰ ἀξιώματα αἰτήματα λέγει. τὸ γὰρ ἴσα βάρη ἀπὸ ἴσων μηκῶν ἰσορροπεῖν ἀξίωμά ἐστι, καὶ τὰ ἑξῆς. καὶ ἔτι ταῦτα σαφῆ τοῖς μετρίως αὐτὰ ἐπιβεβλημένοις. τῶν δὲ ἴσων καὶ ὁμοίων φησὶν ἐπιπέδων σχημάτων ἐφαρμοζομένων ἐπ' ἄλληλα, καὶ τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐφαρμόζει ἐπ' ἄλληλα, πάντα γὰρ τὰ μέρη αὐτῶν πᾶσιν ἐφαρμόζει. τῶν δὲ ἀνίσων, ὁμοίων δὲ, τὰ κέντρα τῶν βαρέων ὁμοίως ἔσται κείμενα. νοείσθω γὰρ ὡς ἐπὶ τῆς ὑποκειμένης καταγραφῆς τὰ αβγ, δεζ τρίγωνα ἄνισα καὶ ὅμοια, κέντρον δὲ βάρους τῶν μὲν αβγ τὸ κ, τοῦ δὲ δεζ τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ακ, κγ, βκ, δθ, θε, θζ, λέγω ὅτι εἰς ἴσα διαιροῦσι τὰς γωνίας αἱ ἀπὸ τῶν κθ σημείων ἐπιζευχθεῖσαι. γινέσθω γὰρ ὡς ἡ εζ πρὸς βγ, οὕτως ἡ εθ πρὸς θκ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θα. καὶ ἡ ζθ πρὸς θλ. καὶ ἡ δθ πρὸς θμ. μκ, κλ, λμ, ἔσται δὴ ὅμοιον τὸ κλμ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ εθ πρὸς



θκ, ἡ θζ πρὸς θλ, παράλληλός ἐστιν ἡ εζ τῇ κλ. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ μκ τῇ δε, καὶ ἡ λμ τῇ δζ. ὅμοιον ἄρα τὸ δεζ τρίγωνον τῷ κλμ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δε πρὸς μκ, ἡ εζ πρὸς κλ, καὶ ἡ δζ πρὸς μλ. ὑπόκειται δὲ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν αβγ, δεζ τριγώνων, ὡς ἡ δε πρὸς αβ, ἡ βγ πρὸς εζ, καὶ ἡ δζ πρὸς αγ. ἴσαι ἄρα εἰσὶν αἱ αβγ ταῖς μκλ. ὥστε ἐφαρμόζει ἑκάστη ἐπὶ ἑκάστην. ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον τῷ κμλ τριγώνῳ. ὥστε καὶ ἐφαρμόσει τὸ κέντρον τοῦ αβγ ἐπὶ τὸ τοῦ μκλ. τοῦ δὲ κ ἐπὶ τὸ θ ἐφαρμόζοντος, καὶ τῶν αβγ ἐπὶ τὰ μκλ, ἐφαρμόσουσιν καὶ αἱ ακ, βκ, γκ, ἐπὶ τὰς μθ, κθ, λθ, καὶ ἴσας ποιήσουσιν γωνίας πρὸς τοῖς μκλ ταῖς ἐν τῷ αβγ τριγώνῳ, ὥστε καὶ ἐν τῷ δεζ. αἱ αὐταὶ γάρ εἰσιν αἱ ἀπὸ τοῦ θ ἐπί τε τὰ μκλ, καὶ ἐπὶ τὰ δεζ ἐπιζευγνύμεναι.

Παντὸς σχήματος οὗ ἁ περίμετρος ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλά ἐστι, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐντὸς εἶναι δεῖ τοῦ σχήματος. τίνας καλεῖ τὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας γραμμὰς, εἴρηται ἡμῖν σαφῶς ἐν τοῖς περὶ γεγραμμένοις τοῦ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου. ἐπειδὴ δὲ τὸ σχῆμα τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλην ἔχον τὴν περίμετρον, πάντα τὰ μέρη τοῦ ἐπιπέδου ἐντὸς ἔχει καὶ τὰς γωνίας, δῆλον ὅτι καὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐντὸς ἔχει τοῦ σχήματος. ἐπὶ γὰρ τινῶν σχημάτων τὸ κέντρον τοῦ σχήματος ἐκτός ἐστι, καὶ ἐπὶ τῆς περιμέτρου, ἐπὶ μὲν γὰρ τοῦ αβ ἡμικυκλίου κέντρον τοῦ σχήματός ἐστι τὸ η, ἐπὶ δὲ τῆς δεζ ὑπερβολῆς τὸ κέντρον τοῦ σχήματος ἐκτός ἐστι, καθ' ὃ αἱ διάμετροι συμπίπτουσιν ἀλλήλαις, ὡς ἔχει τὸ θ. εἴρηται γὰρ ταῦτα ἐν τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ τῶν ἀπολλωνίου κωνικῶν. ὅμως δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ αβγ σχήματος, καὶ ἐπὶ τοῦ δεζ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος, ἀφ' οὗ δῆλον ὅτι ἀρτώμενον τὸ σχῆμα παράλληλόν ἐστι τῷ ὁρίζοντι, ἐντός ἐστι τῆς περιμέτρου, εἰ γὰρ ἔσται ἐπὶ τῆς περιμέτρου, ἢ ἐκτὸς ῥέψει ἐπὶ θάτερα, οὐχ ὑπόκειται.



ΕΙΣ ΤΟ Β.

Κέντρον τοῦ βάρεος τὸ δ εἰδῶ ἀπὸν. ὅτι γὰρ ἐστὶν ἐπὶ τῆς αβ δέδεικται. εἴρηται γὰρ πρότερον, ὅτι δύο μεγεθῶν κέντρον ἐστὶν, ἀφ' οὗ ἀρτώμενος ὁ ζυγὸς ἰσορροποῦντα ἔχει τὰ μέρη, παράλληλος μένων τῷ ὁρίζοντι, ὥστε ὂν ἐπὶ τῆς αβ ἐστὶ τὸ κέντρον τῶν αβ μεγεθῶν.

ΕΙΣ ΤΟ Ε.

Ἢτοι μεῖζόν ἐστι τὸ αβ τοῦ γ, ὥστε ἰσοῤῥοπεῖν, ἢ οὔ. τοῦτο τὸ ῥητὸν δεῖ ἀκούειν, οὐχ ὡς μείζονος ὑπάρχοντος πάντως τοῦ αβ μεγέθους τοῦ γ, ἀλλὰ μείζονος ὑποκειμένου, ἢ ἐπὶ τὴν ἰσοῤῥοπίαν. δυνατὸν γάρ ἐστι καὶ ἔλασσον μέγεθος τοῦ μείζονος μείζονα ἔχειν τὴν ῥοπὴν διὰ τὸ μῆκος τοῦ ζυγοῦ, μεῖζον ὂν πάντως ἢ ἄνισον ποιεῖν τὸν λόγον. ὥστε καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ αβ ἔλασσον τῆς ὑπεροχῆς, ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ αβ τοῦ γ, ὥστε ἰσοῤῥοπεῖν, ὥστε λοιπὸν τὸ α σύμμετρον εἶναι τῷ γ. δεῖ φησὶν ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ αβ μεγέθους τι τὸ β, ὃ ποιεῖ λοιπὸν τὸ α, τῷ γ σύμμετρον, καὶ μεῖζον τὸ α τοῦ γ ἢ ἐπὶ τὴν ἰσοῤῥοπίαν. τοῦτο δὲ δυνατὸν ποιεῖν, διὰ τῶν ἐν τῇ ἀρχῇ τοῦ δεκάτου τῆς στοιχειώσεως Εὐκλείδου εἰρημένων, καὶ ἐν τῷ τρίτῳ τῶν Θεοδοσίου σφαιρικῶν.

ΕΙΣ ΤΟ ΑΙ.

Καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εζ, ηκ, λμ. παράλληλοι δὴ αὗται παρὰ τὴν βγ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ βο τῇ ψγ, καὶ ἡ δβ τῇ δγ. ἔσται ὡς ἡ δβ πρὸς οβ, ἡ δγ πρὸς ψγ. καὶ διελόντι ὡς ἡ δο πρὸς οβ, ἡ δψ πρὸς ψγ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ δο πρὸς οβ, ἡ αε πρὸς εβ. ἡ γὰρ εο παρὰ τὴν αδ ἐστιν. ὡς δὲ ἡ δψ πρὸς ψγ, ἡ αζ πρὸς ζγ. καὶ ὡς ἄρα ἡ αε πρὸς εβ, ἡ αζ πρὸς ζγ. παράλληλος ἐστιν ἄρα ἡ εζ τῇ βγ. ὁμοίως δὴ δειχθήσονται καὶ αἱ λοιπαί. τὸ δὴ αδγ τρίγωνον πρὸς πάντα τὰ τρίγωνα τὰ ἀπὸ τῶν αμ, μκ, κζ, ζγ ἀναγεγραμμένα, ὅμοια τῷ αδγ, τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ γα πρὸς αμ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς εὐθείας. ἐπεὶ γὰρ ὅμοιά ἐστι τὰ αδγ, αςμ τρίγωνα, πρὸς ἄλληλα, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αγ πρὸς αμ. ἐπεὶ δὲ νῦν ὑπόκειται, ἡ αγ τῆς αμ τετραπλασίων, τὸ αδγ τρίγωνον πρὸς τὸ αςμ λόγον ἔχει, ὃν ιϛ πρὸς ἕν. πρὸς δὲ πάντα τὰ τρίγωνα, τὰ ἀπὸ αμ, μκ, κζ λόγον ἔχει ὃν ιϛ πρὸς τέσσαρα. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὰ τρίγωνα τὰ ἀπὸ τῶν αμ, μκ, κζ, ζγ, ὅμοια τῷ αδγ, οὕτως αὐτὰ τρίγωνα πρὸς τὸ αςμ, τουτέστιν ἡ γα πρὸς αμ. ὅμοια γάρ εἰσι καὶ ἐπὶ ἴσων βάσεων, καὶ διὰ τοῦτο ἴσα, καί εἰσι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις. ἀλλὰ ἡ γα πρὸς αμ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ φρ πρὸς ρθ. ὁ γὰρ τῆς αγ πρὸς αμ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς φρ πρὸς ρπ. εἰ γὰρ νοήσειας ἐκβεβλημένας τὰς ρφ, γδ, καὶ συμπιπτούσας διὰ τὰς παραλλήλους, ἔσται ὡς ἡ φρ πρὸς ρπ, ἡ γδ πρὸς δω. ἀλλ' ὡς ἡ γδ πρὸς δω, ἡ γα πρὸς αμ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γα πρὸς αμ, ἡ φρ πρὸς ρπ. ἡ δὲ φρ πρὸς ρπ μείζονα ἔχει λόγον, ἤπερ ἡ φρ πρὸς ρθ. καὶ ἡ γα ἄρα πρὸς αμ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ φρ πρὸς ρθ. ὅπερ ἀδύνατον. τὰς γὰρ διὰ τοῦ χ εὐθείας παρὰ τὴν δα ἀγομένας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἔσονται πάντα τὰ κέντρα. τουτέστιν ἐπὶ θάτερον μέρος, καὶ ῥέψει δῆλον ὅτι ἐπ' ἐκεῖνο πάντα τὰ μεγέθη, καὶ οὐκ ἰσοῤῥοπήσει, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. ὑπόκειται γὰρ κέντρον τῶν μὲν παραλληλογράμμων τὸ ρ, τῶν δὲ τριγώνων τὸ χ.

ΕΙΣ ΤΟ ΑΛΛΩΣ ΤΟΥ ΓΑ.

Ὁμοίως γὰρ ἐν τῷ κειμένα τὰ θ κ, λ ε τοῖς τριγώνοις. αἵ τε γὰρ αθ ε, κζ α παράλληλοι οὖσαι ὁμοίως διαιροῦσι τὰς γωνίας, καὶ αἱ θλ γ, θκ β αἱ αὐταί εἰσι, ἐν πᾶσι τοῖς τριγώνοις, καὶ λοιπαὶ αἱ κδ, δλ.

ΕΙΣ ΤΟ ΙΓ.

Ἐὰν γὰρ ἐκβάλλῃς τὰς γδ κ, ζε η, βα η, δῆλον ὅτι ἐπὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἔρχονται. ἐκβληθεισῶν γὰρ τῶν βα η, ζε η, καὶ συμπιπτουσῶν ἀλλήλαις ἐπὶ τὸ η. καὶ ἡ βδ ἐκβαλλομένη ἐν τῷ αὐτῷ πεσεῖται. ἔστι δὲ ὡς ἡ βη πρὸς ηα, ἡ ζη πρὸς ηε, καὶ ἡ βζ πρὸς αε, καὶ ἡ ζγ πρὸς εδ. καὶ δηλαδὴ ἡ δη πρὸς δς. ἔσται δὴ τοῦ αβδγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τῆς θμ. ἐπεὶ δὲ ἡ τρίτον μέρος αβθ τῆς βδ. ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἀπὸ τῶν γωνιῶν ἐπὶ τὰς διχοτομίας τῶν πλευρῶν αἱ αε, βζ, γδ. κέντρον ἄρα ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ αβγ τριγώνου τὸ η. καὶ φανερὸν ὅτι πάντα τὰ τρίγωνα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις. καὶ ὅτι αἱ ἐπὶ τὰς διχοτομίας τῶν πλευρῶν ἐπιζευγνύμεναι διὰ τοῦ η ἔρχονται. ἵνα μὴ τὸ αὐτὸ πλείονα κέντρα ᾖ. ἐπεὶ δὲ ἴσαι αἱ αδ, δβ, βε, εγ, γζ, ζα, ἴσα ἔσται καὶ τὰ τρίγωνα ὧν κορυφὴ τὸ η σημεῖον,



μέσον, βάσις δὲ αἱ εἰρημέναι εὐθεῖαι, ὥστε διπλάσιόν ἐστι τὸ αηβ τρίγωνον τοῦ ηβε τριγώνου, ὥστε καὶ ἡ αη τῆς ηε, ἐὰν δὲ διὰ τοῦ η παρὰ τὴν βγ ἀγάγωμεν τὴν θκ, διπλασία ἐστὶν ἡ αθ τῆς θβ, ὥστε καθόλου ἐὰν μία πλευρὰ τριγώνου τμηθῇ, ὥστε τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ μέρος διπλάσιον εἶναι τοῦ πρὸς τῇ βάσει, καὶ διὰ τοῦ ληφθέντος σημείου παράλληλος ἀχθῇ τῇ βάσει, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου.

ΤΩΝ ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΕΙΣ ΤΟ ΠΡΩΤΟΝ βιβλίον τέλος.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΕΙΣ ΤΟ Β ΤΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΚΩΝ ΑΡΧΙμήδους.

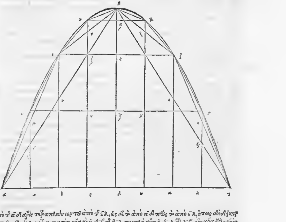
ΑΚΡΙΒΩΣ ἐπεξελθόντες τῷ πρώτῳ, καὶ σαφηνίσαντες τὰ ἐν αὐτῷ δυσθεώρητα, ἀναγκαῖον ἡγούμεθα καὶ τὰ ἐν τῷ δευτέρῳ δυσχερῶς εἰρημένα μετρίως ἐκθέσθαι. φησὶ τοίνυν ἐν τῇ προτάσει τοῦ πρώτου θεωρήματος, ὑποκείσθω τὰ αβ, βγ χωρία περιεχόμενα ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς, ἃ δυνάμεθα παρὰ τὰν δοθεῖσαν παραβαλεῖν. τοῦτο δὲ αὐτόθεν μὲν διὰ τῶν ἐνταῦθα δεδειγμένων οὐκ ἔστιν εὑρεῖν, ἐπεὶ δὲ δέδεικται αὐτῷ, ὡς ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου εἶπεν, ὅτι τὸ τοιοῦτον σχῆμα ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον. τῷ δὲ ἐπιτρίτῳ τοῦ τριγώνου ὑποθέσει εὐθυγράμμῳ ὄντι, δυνάμεθα ἴσον παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραβαλεῖν φανερὸν ὅτι καὶ τοῖς τοιούτοις σχήμασι, τὰ δὲ ἐν τῇ κατασκευῇ εἰρημένα ἅπαντα δῆλά ἐστι διὰ τοῦ τετάρτου θεωρήματος τοῦ πρώτου τούτων τῶν βιβλίων.

ΕΙΣ ΤΟ Β.

Τοῦ δευτέρου θεωρήματος προλέγει τινὰ, δι' ὧν δείκνυσι πῶς δυνατὸν ἐν τῇ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῇ σχῆμα γνωρίμως ἐγγράφεσθαι, καὶ φησὶ ταῦτα δεικτέον ἐν ταῖς τάξεσιν. ἐπειδὴ οὖν ἀσαφές ἐστι τὸ λεγόμενον, ἀναγκαῖον εἰπεῖν βραχέα περὶ αὐτοῦ ἐκ τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν εὑρεθέντα. ἔστω σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ παραβολῆς τῆς αβγ, καὶ εὐθείας τῆς αγ, οὗ διάμετρος ἔστω ἡ βδ. φανερὸν δὴ ὅτι κορυφή ἐστι τοῦ τμήματος τὸ β σημεῖον. κορυφὰς γὰρ ἐκάλει τῶν γραμμῶν ὁ Ἀπολλώνιος τὰ πρὸς ταῖς γραμμαῖς πέρατα τῶν διαμέτρων. ἐὰν δὴ ἐπιζεύξωμεν τὰς αβ, βγ, ἔσται τὸ ἀπὸ αβγ τρίγωνον τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι, καὶ ὕψος ἴσον τὴν ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὴν αβ κάθετον ἀγομένην. οὕτως γὰρ πάντως ἄξων ἐστὶν ἡ βδ. ἐὰν δὴ λαβόντες τὰς κορυφὰς τῶν αβ, βγ τμημάτων τὰς ε, ζ δι' αὐτῶν παραλλήλους ἀγάγωμεν τῇ βδ, ὡς τὰς εη, ζ, ἔσονται αὗται διάμετροι τῶν αβ, βγ τμημάτων. δέδεικται γὰρ ἐπὶ τῆς παραβολῆς, ὅτι πᾶσαι αἱ παρὰ τὴν διάμετρον ἀγόμεναι διάμετροί εἰσι τῆς τομῆς, ἔσονται δὴ τὰ ε, ζ κορυφαὶ τῶν τμημάτων, καὶ αἱ διὰ τῶν ε, ζ ἐφαπτόμεναι παράλληλοι ταῖς αβ, βγ. ἔσται δὴ καὶ ἡ ελζ παρὰ τὴν αβγ. ἐπειδὴ αἱ εθ, ζκ παράλληλοί εἰσι καὶ ἴσαι, διάμετροι οὖσαι τῶν ἴσων τμημάτων, καὶ ἐφαρμόζουσι ἀλλήλαις ὡς ἐν τῷ ς τῶν κωνικῶν δέδεικται. καὶ ἐπεὶ ἡ εθη παράλληλός ἐστι τῇ βδ, ἐστὶν ὡς ἡ βη πρὸς ηα, ἡ δθ πρὸς θα. ἴση δὲ ἡ ηβ τῇ αη. δίχα γὰρ αὐτὴν τέμνει ἡ εη διάμετρος παράλληλον οὖσαν τῇ ἐφαπτομένῃ. ἴση ἄρα καὶ ἡ δθ τῇ θα, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ δκ τῇ κγ ἴση ἐστί. ἴση δὲ ὅλη ἡ αδ τῇ δγ, ἴση ἄρα καὶ ἡ δθ τῇ δκ. καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ ελ τῇ λζ. ὥστε ἀληθῶς λέγει ὅτι ἡ τὰς κορυφὰς τῶν τμημάτων ἐπιζευγνύουσα παράλληλος ἔσται τῇ βάσει τοῦ τμήματος, καὶ δίχα διαιρεθήσεται ὑπὸ τῆς τοῦ τμήματος διαμέτρου. ἐπεζεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ αε, εβ, βζ, ζγ. καὶ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ μ, ν, ξ, ο σημεῖα καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν μ, ν, ξ, ο παρὰ τὴν βδ, αἱ πμρς, τνυφ, χξψω, ϛογλ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ απ, πε, ετ, τβ, βχ, χζ, ζϛ, ϛγ καὶ αἱ τ ρ α χ, καὶ π β γ δ ε ϛ. φανερὸν δὴ ἐκ τῶν προδεδειγμένων, ὅτι ἡ τχ καὶ ἡ εζ καὶ ἡ πϛ παράλληλοί εἰσι τῇ αγ· καὶ ὅτι ἴση ἡ τ ρ α τῇ ρ α χ· καὶ ἡ π σ δ τῇ δ ϛ. λέγω οὖν ὅτι τέμνουσι τὴν βδ εἰς τοὺς ἑξῆς περισσοὺς ἀριθμούς, τουτέστιν οἷον ἐστὶν ἑνὸς ἡ βα, τοιούτων

τριῶν

τριῶν, ἡ δὲ κδ πέντε, καὶ ἡ δ δ ἑπτά. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ αη τῇ ηβ, καὶ παράλληλος ἡ εθ τῇ βδ, ἴση ἄρα καὶ ἡ αθ τῇ θδ, ἡ αδ ἄρα τῆς δθ διπλῆ ἐστιν. ὥστε καὶ τὸ ἐλ, τὸ



ἀπὸ τῆς αδ ἄρα τετραπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ελ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὸ ἀπὸ ελ, οὕτως δέδεικται ἡ βδ πρὸς βλ. τετραπλασία ἄρα καὶ ἡ δβ τῆς βλ. τριπλῆ ἄρα ἡ δλ τῆς λβ. οἵα ἄρα ἐστὶν ἑνὸς ἡ λβ, τοιούτων τριῶν ἐστὶν ἡ κδ. διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ οἵων ἄρα ἡ λβ τεσσάρων, ἡ λδ δώδεκα. καὶ ἐπεὶ ἴση ἡ εν τῇ νβ, καὶ ἡ εζ τῇ ζλ, καὶ ἡ θφ τῇ φδ, διπλασία ἐστὶν ἡ ελ τῆς λζ, τουτέστι τῆς τα. τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ ελ τοῦ ἀπὸ τα, τετραπλασία ἄρα καὶ ἡ λβ τῆς βα. ὥστε τριπλασία ἡ λα τῆς αβ. οἵων ἄρα ἐστὶν ἡ λβ τεσσάρων, τοιούτων ἡ μὲν βα ἑνός, ἡ δὲ αλ τριῶν, ἡ δὲ λδ δώδεκα. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αμ τῇ μν, καὶ ἡ αρ τῇ ρκ, καὶ ἡ ας τῇ σθ, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ας, σθ, θφ, φδ. οἵων ἄρα ἐστὶν ἡ αδ τεσσάρων, τοιούτων ἡ σδ τριῶν, τουτέστιν ἡ πδ. οἵων ἄρα τὸ ἀπὸ αδ δεκαέξ, τοιούτων τὸ ἀπὸ πδ ἐννέα. καὶ οἵων ἄρα ἡ δβ δεκαέξ, ἡ βδ ἐννέα, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ κδ ἑπτά. ἐπεὶ οὖν δέδεικται οἵων ἡ βδ δεκαέξ, τοιούτων ἡ μὲν βα ἑνός, ἡ δὲ αλ τριῶν, ἡ δὲ κδ ἑπτά. καὶ λοιπὴ ἡ δ δ ἐστὶ πέντε. τέμνεται ἄρα ἡ βδ ὑπὸ τῶν παραλλήλων εἰς τοὺς τῶν ἑξῆς περισσῶν ἀριθμῶν λόγους, ἑνὸς λεγομένου τοῦ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ τμήματος. δῆλον οὖν ἐστιν ἐκ τῆς καταγραφῆς, ὅτι αἱ καταγόμεναι ὑπὸ τῶν διαμέτρων εἰς τοὺς ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀριθμούς,* οἷον γάρ ἐστιν ἑνὸς ἡ τα, τοιούτων ἐστὶ δύο ἡ ελ, τριῶν ἡ πδ, τεσσάρων δὲ ἡ αδ. παράλληλοι γὰρ οὖσαι πᾶσαι εἰς ἴσα τέμνουσιν ἀλλήλας. ὁμοίως δὲ καὶ ὑπὸ ἀρχιμήδους τὸ απετεζβχζσγ σχῆμα γνωρίμως ἐγγραφόμενον.

ΕΙΣ ΤΟ Γ.

Τὰ ὅμοια τμήματα τῶν τοῦ κώνου τομῶν ἀπολλώνιος ὥρισεν ἐν τῷ ἕκτῳ βιβλίῳ τῶν κωνικῶν, ἐν οἷς ἀχθεισῶν ἐν ἑκάστῳ παραλλήλων τῇ βάσει, ἴσων τὸ πλῆθος, αἱ παράλληλοι, καὶ αἱ βάσεις πρὸς τὰς ἀποτεμνομένας ἀπὸ τῶν διαμέτρων ταῖς κορυφαῖς ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις εἰσί, καὶ αἱ ἀποτεμνόμεναι πρὸς τὰς ἀποτεμνομένας. καὶ ὅτι αἱ παραβολαὶ πᾶσαι ὅμοιαί εἰσι, τὸ δὲ γνωρίμως ἐγγραφόμενον σχῆμα εἴρηται ἐν τῷ προληφθέντι λήμματι, τὸ δὲ ὅμοιον διαιρεθῆναι

τὰς

τὰς διαμέτρους ἐστὶν, ἵνα τὰ τμήματα αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, τὰ λοιπὰ τοῦ θεωρήματος σαφῆ ἐστιν ἐκ τοῦ προειρημένου σχήματος.

ΕΙΣ ΤΟ Δ.

Ἐγγεγράφθω εὐθύγραμμον εἰς τὸ τμῆμα γνωρίμως, ὥστε τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἐλάσσονα εἶναι τοῦ κ. τοῦτο δὲ φανερόν ἐστιν ἐκ τῶν εἰρημένων ἐν τῷ δεκάτῳ τῆς στοιχειώσεως, καὶ ἐν τῷ πρώτῳ τῶν περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου.

ΕΙΣ ΤΟ Ε.

Καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ θζηι. ἐπεὶ γὰρ ἴσαι εἰσὶν αἱ κζ, λη. ἴσων γάρ εἰσι τμημάτων διάμετροι, καὶ ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ βδ ἄξονος, καὶ ὁμοίως διῄρηνται ὑπὸ τῶν θ, ι κέντρων. ἔστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θζ, ἡ λι πρὸς ιη, καὶ ἐναλλάξ. καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἐστὶν ἡ θζ τῇ ιη, ἔστι δὲ καὶ παράλληλος. παράλληλοι γάρ εἰσι πᾶσαι αἱ διάμετροι τῆς παραβολῆς, παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ θζηι.

ΕΙΣ ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟΝ ΜΕΡΟΣ ΤΟΥ Ε.

Ἔσται δὲ τοῦ μὲν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ακβ, βλγ τμημάτων συγκειμένου μεγέθους κέντρον βάρους τὸ χ, τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ακβ, βλγ τριγώνων τὸ τ. δέδεικται μὲν γὰρ ἐν τῷ προλαβόντι, ὅτι ἡ θι μεταξὺ συνάπτουσα τὰ κέντρα τῶν τμημάτων, διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς βδ κατὰ τὸ χ, παράλληλος οὖσα τῇ ζη, καὶ ἡ ιν διχοτομεῖται κατὰ τὸ τ. ὥστε κέντρον βάρους ἐστὶ τὸ τ τοῦ συγκειμένου μεγέθους ἐκ τῶν ακβ, βλγ τριγώνων. ἐπεὶ οὖν μείζονα λόγον ἔχει τὸ βαγ τρίγωνον πρὸς τὰ ακβ, βλγ τρίγωνα, ἤπερ πρὸς τὰ τμήματα, καὶ τὰ ἑξῆς. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται τοῦ μὲν αβγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρους τὸ ε, τῶν δὲ αβκ, βλγ τριγώνων κέντρον τὸ τ, φανερὸν ὅτι τοῦ ακβλγ εὐθυγράμμου κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶ τῆς τε τμηθείσης κατὰ τὸ ρ κατὰ τὸν ἀντιπεπονθότα λόγον, ὃν ἔχει τὸ αβγ πρὸς τὰ ακβ, βλγ τρίγωνα. ἐπεὶ τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὰ κλβ, βλγ τρίγωνα μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὰ τμήματα. μείζονα γάρ ἐστι τὰ τμήματα τῶν τριγώνων. δῆλον ὅτι ἐὰν τέμωμεν τὴν ετ ἐν τῷ λόγῳ ὃν ἔχει τὸ τρίγωνον πρὸς τὰ τμήματα ἀνώτερον τοῦ ρ πεσεῖται τὸ σημεῖον, ὃ ἔσται κέντρον τοῦ παντὸς τμήματος, διὰ τὴν ἀντιπεπόνθησιν.

ΕΙΣ ΤΟ Ϛ.

Τὸ κέντρον τοῦ τμήματος πάντως ἐν ἐστι, καὶ ἐγγύτερον τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος, ἤπερ τὰ τῶν ἐγγραφομένων εὐθυγράμμων. τοῦ γὰρ αβγ τριγώνου κέντρου τοῦ βάρους ἐστὶν εἰ τύχοι τὸ ε τῆς βδ τμηθείσης οὕτως, ὥστε διπλασίαν εἶναι τὴν εβ τῆς εδ. φανερὸν ὅτι πάντα τὰ κέντρα τῶν ἐγγραφομένων εὐθυγράμμων μεταξὺ πεσοῦνται τῶν βε σημείων. καὶ ὅσῳ δ᾽ ἂν πολυπλευρότερον ἦ, τὸ γνωρίμως ἐγγραφόμενον, τοσούτῳ μᾶλλον συνεγγίζει τῷ β. φανερὸν οὖν ὅτι τὴν μεταξὺ τῶν κέντρων τοῦ γνωρίμως ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου, καὶ τοῦ τμήματος μείζονα μὲν εἶναι τῆς εθ ἀδύνατον, ἐλάσσονα δὲ δυνατὸν οὐ μόνον τῆς βε, ἀλλὰ καὶ πάσης τῆς δοθείσης.

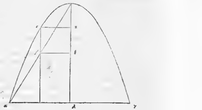
ΕΙΣ ΤΟ Ζ.

Ἐγγεγράφθω γὰρ εἰς τὸ αβγ τμῆμα τὸ ἐν τῷ δεζ τμήματι, ὅμοιον εὐθύγραμμον, τουτέστιν ὁμοίως γνωρίμως. ὁμοίως γὰρ γνωρίμως ἐγγράφεται, ὅταν αἱ τομαὶ τῆς αβγ παραβολῆς ἰσαριθμῶνται τῇ δεζ, ὥστε τὰς πλευρὰς τοῦ ἐν τῷ αβ τμήματι ἐγγεγραμμένου γνωρίμως ἰσοπληθεῖς εἶναι ταῖς ἐν τῷ εζ ἐγγεγραμμένου εὐθυγράμμου. ἐπεὶ γὰρ αἱ κορυφαί εἰσι τὰ βζ σημεῖα τῶν ὁμοίων τμημάτων, ὅμοια ἐστὶ τὰ οὕτως γνωρίμως ἐγγραφόμενα.

ΕΙΣ ΤΟ Η.

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ βθ πρὸς θδ, οὕτως ἡ κμ πρὸς μζ. ὅμοια γὰρ ὄντα τὰ τμήματα ἕξει κέντρα εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τέμνοντα τὰς διαμέτρους. καὶ συνθέντι ὡς ἡ βδ πρὸς δθ, ἡ κζ πρὸς ζμ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ βδ πρὸς κζ, οὕτως ἡ δθ πρὸς μζ. τετραπλασία δὲ ἡ βδ τῆς κζ. τοῦτο γὰρ ἐπὶ τέλει δείκνυται οὕτως σημεῖον θ. ἑξῆς δὲ αὐτὸ ἡμεῖς δείξομεν. ἔστω παραβολὴ ἡ αβγ, ἧς διάμετρος ἡ βδ. καὶ ἤχθω τεταγμένως ἡ αδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αβ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ αβ κατὰ τὸ ζ, καὶ διὰ τοῦ ζ τῇ βδ παράλληλος ἤχθω ἡ εζ. διάμετρος ἄρα ἐστὶ τοῦ αβ τμήματος. καὶ ἀπὸ τῶν ε, ζ τεταγμένως ἤχθωσαν αἱ εη, ζθ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ αζ τῇ βζ, διπλῆ ἐστὶν ἡ αβ τῆς ζβ, καὶ ἡ δβ τῆς βθ, καὶ ἡ αδ τῆς ζθ, τουτέστι τῆς εη. ὥστε τὸ ἀπὸ αδ τοῦ ἀπὸ εη ἐστὶ τετραπλάσιον, καὶ διὰ τοῦτο ἡ δβ τῆς βη ἐστὶ τετραπλασία μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ βδ τῆς

μὲν



μὲν ΒΘ διπλῆ, ἡ ΒΘ τῆς ΒΗ ἐστι διπλῆ, καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΗΒ ἴση, τουτέστι τῇ ΕΖ. διὰ τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι τὸ ΕΗΖΘ. τετραπλασία ἄρα ἡ ΒΔ τῆς ΖΕ.

Καὶ ἐπεὶ τετραπλασίων ἐστὶν ἡ ΒΔ τῆς ΒΣ. καὶ γὰρ τοῦτο δείκνυται. δέδεικται γὰρ ἐν τῷ λήμματι ἡ ΒΔ ἑκατέρας τῶν ΒΗ, ΕΖ τετραπλασία, ὥστε ἡ ΒΗ τῇ ΕΖ ἐστὶν ἴση. καὶ διὰ τοῦτο ἐν τούτῳ ἡ ΒΣ τῇ ΚΖ ἴση, καὶ ἡ ΒΔ ἑκατέρας αὐτῶν τετραπλασία. ἡ ΒΞ ἄρα τῆς ΒΔ τρίτον μέρος. ἐπεὶ γὰρ τετραπλασίων ἡ ΒΔ τῆς ΒΣ. οἵων ἄρα ἡ ΒΔ τεσσάρων, ἡ ΒΣ ἑνός. καὶ οἵων ἄρα ἡ ΒΔ δώδεκα, τοιούτων ἡ ΒΣ τριῶν. τριπλῆ δὲ ἡ ΒΣ τῆς ΣΞ, οἵων ἄρα ἡ ΒΣ τριῶν, ἡ ΞΣ ἑνός, καὶ ὅλη ἡ ΒΞ τεσσάρων. τούτων δὲ ἦν ἡ ΒΔ δώδεκα. ἡ ΒΞ ἄρα τῆς ΒΔ τρίτον μέρος ἐστί. τριπλάσιον δὲ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῶν τμημάτων. δέδεικται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ ἐν τῷ περὶ τῆς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς, ὅτι πᾶν σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου, τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον, ὥστε τὸ ΑΒΓ τμῆμα τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπίτριτόν ἐστι, καὶ διελόντι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῶν ΑΚΒ, ΒΛΓ τμημάτων τριπλάσιον ἐστί, καὶ ἐν τῷ τέλει τῆς ΕΔ τριπλασία. ἡμιολία ἄρα ἐστὶ ἡ ΒΘ τῆς ΘΔ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ἐπεὶ γὰρ τριπλῆ ἐστιν ἡ ΒΔ τῆς ΔΕ. οἵων ἄρα ἡ ΒΔ δεκαπέντε, τοιούτων ἡ ΕΔ πέντε· οἵων δὲ ἡ ΔΕ πέντε, τοιούτων ἡ ΘΕ ἑνός, καὶ ὅλη ἡ ΘΕ, ΔΕ ἕξ. ἑξαπλασία ἡ ΔΘ τῆς ΘΕ. οἵων ἄρα ἡ ΒΔ δεκαπέντε, τοιούτων ἡ ΔΘ ἕξ. καὶ λοιπὴ ἡ ΘΒ ἐννέα, ὥστε ἡμιολία ἐστὶν ἡ ΒΘ τῆς ΘΔ.

ΕΙΣ ΤΟ Θ.

Τὸ ἔνατον θεώρημα πάνυ ὂν ἀσαφὲς ἐκθησόμεθα περιφράζοντες σαφῶς κατὰ τὸ δυνατόν. ἐπεὶ γὰρ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΒ, ΒΕ, καὶ διελόντι, καὶ ἐναλλὰξ αἱ ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί. ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΒΔ, ΔΕ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί, καὶ αἱ ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ, ἔστιν ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον καὶ μέσον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον καὶ μέσον πρὸς ἑπόμενον. ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ ΑΓ, ΓΔ, τουτέστιν ἡ ΑΔ πρὸς ΔΕ, οὕτως συναμφότερος ἡ ΑΒ, ΓΒ πρὸς ΔΒ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ΑΒ, ΓΒ πρὸς ΔΒ, οὕτως ἡ Β συναμφοτέρου τῆς ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὴν Β τῆς ΒΔ. διότι τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΔ πρὸς ΔΕ, οὕτως ἡ Β συναμφοτέρου τῆς ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὴν Β τῆς ΔΒ. πάλιν ἐπειδὴ αἱ ΓΒ, ΒΔ, ΒΕ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν, καὶ αἱ ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ. ἔστι διὰ τὰ πρότερον εἰρημένα, ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΕ, οὕτως συναμφότερος ἡ ΓΒ, ΒΔ πρὸς ΒΕ. ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΕ, ἡ Β συναμφοτέρου τῆς ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὴν Β τῆς ΒΔ. καὶ ὡς ἄρα ἓν πρὸς ἕν, ἅπαντα πρὸς ἅπαντα. ὡς ἄρα ἡ ΑΔ πρὸς ΔΕ, οὕτως τὰ ἡγούμενα πρὸς τὰ ἑπόμενα. ἔστι δὲ ἡγούμενα μὲν ἡ Β συναμφοτέρου τῆς ΑΒ, ΒΓ, καὶ συναμφότερος ἡ ΓΒ, ΒΔ, τουτέστι δύο αἱ ΑΒ, καὶ τρεῖς αἱ ΓΒ, καὶ μία ἡ ΒΔ. ἑπόμενα δὲ ἡ Β τῆς ΒΔ, καὶ ἡ ΒΕ μόνη. ἔστιν οὖν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΕ, ἡ συγκειμένη εὐθεῖα, ἔκ τε τῆς Β τῆς ΑΒ, καὶ Γ τῆς ΓΒ, καὶ τῆς ΔΒ μόνης, πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς Β τῆς ΒΔ, καὶ μόνης τῆς ΕΒ. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς Β τῆς ΑΒ, καὶ τῆς Δ τῆς ΓΒ, καὶ τῆς Δ τῆς ΔΒ, καὶ τῆς Β τῆς ΒΕ, τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς Β τῆς ΑΒ καὶ Γ τῆς ΓΒ, καὶ τῆς ΒΔ μόνης. ἔξωθεν δὲ ἐστιν ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς Β τῆς ΒΔ, καὶ μόνης τῆς ΕΒ. τὸ δὲ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλαττον. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς Β συναμφοτέρου τῆς ΑΒ, ΒΕ, καὶ Δ συναμφοτέρου τῆς ΓΒ, ΒΔ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς Β τῆς ΔΒ, καὶ τῆς ΕΒ μόνης, ἤπερ ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς Β τῆς ΑΒ, καὶ τῆς Γ τῆς ΓΒ, καὶ μόνης τῆς ΔΒ πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς

διπλῆς τῶν βδ, καὶ μόνης τῆς εβ. ἀλλ' ὡς ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς αβ, καὶ γ τῆς γβ, καὶ τῆς βδ μόνης, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν β τῶν βδ, καὶ μόνης τῆς εβ, οὕτως ἐδείχθη ἡ αδ πρὸς δε. καὶ ἡ συγκειμένη ἄρα ἐκ τῶν β συναμφοτέρου τῶν αβ, βε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γβ, βδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τε τῶν β τῶν βδ, καὶ μόνης τῆς εβ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αδ πρὸς δε. ἐὰν ἄρα θελήσωμεν ποιῆσαι τὸν αὐτὸν τῷ αδ πρὸς ἄλλην τινά, ἐλάσσων ἔσται ἐκείνης τῆς δε. ἔστω ἡ δο. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αδ πρὸς δο, ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν β συναμφοτέρου τῶν αβ, βε, καὶ δ συναμφοτέρου τῶν γβ, βδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν β τῶν βδ, καὶ μόνης τῆς εβ. ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ οδ πρὸς δα, ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν β τῶν βδ, καὶ μόνης τῶν εβ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν β συναμφοτέρου τῶν αβ, βε, καὶ τῶν δ συναμφοτέρου τῶν γβ, βδ, καὶ συνθέντι, ὡς ἡ οα πρὸς αδ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν β τῶν αβ, καὶ δ τῶν γβ, καὶ ϛ τῶν βδ, καὶ γ τῶν βε, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν β συναμφοτέρου τῶν αβ, βε, καὶ δ συναμφοτέρου τῶν γβ, βδ. ἥ τε γὰρ βδ ἑξάκις παρελήφθη, τετράκις μὲν ἐν τοῖς προτέροις, δὶς δὲ ἐν τοῖς δευτέροις, καὶ ἡ βε τρεῖς ἐλήφθη, δὶς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις, ἅπαξ δὲ ἐν τοῖς δευτέροις. ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ αδ πρὸς ηθ τὸν αὐτὸν ἔχουσα τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν ε συναμφοτέρου τῶν αβ, βε, καὶ ι συναμφοτέρου τῶν γβ, βδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῶν αβ, καὶ δ τῶν γβ, καὶ ϛ τῶν βδ, καὶ γ τῶν βε. καί ἐστι τεταραγμένη ἀναλογία. δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ οα πρὸς ηθ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν ε συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ ι τῶν γβ, βδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τε τῶν β συναμφοτέρου τῶν αβ, βε, καὶ δ τῆς γβ, βδ. τὸ γὰρ τῶν γεγραμμένης ἀναλογίας οὕτως ἔσται δῆλον. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον ἡ οα, πρὸς ἑπόμενον τὴν αδ, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν β τῆς αβ, καὶ δ τῶν γβ, καὶ ϛ τῶν βδ, καὶ γ τῆς βε, πρὸς ἑπόμενον τὴν συγκειμένην ἐκ τοῦ β συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γβ, δβ. ὥστε ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον ἡ αδ πρὸς ἄλλο τι τὴν ηθ, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν, ἄλλο τι ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς ε συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ ι συναμφοτέρου τῆς γβ, βδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τε τῆς β τῆς αβ, καὶ δ τῆς γβ, καὶ ϛ τῆς βδ, καὶ γ τῆς βε. ἐπεὶ ἡ ε συναμφοτέρου τῆς αβ, βε πρὸς τὴν β τῆς αὐτῆς λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. ἔχει δὲ καὶ ἡ ι συναμφοτέρου τῆς γβ, βδ πρὸς τὴν δ τῆς αὐτῆς λόγον, ὃν πέντε πρὸς δύο. ἐπειδὴ καὶ τὰ πέντε πρὸς δύο, καὶ τὰ δέκα πρὸς τέσσαρα λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. καὶ ἡ συγκειμένη ἄρα ἐκ τῆς ε συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ ι συναμφοτέρου τῆς γβ, βδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ δ τῆς γβ, βδ λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. ὡς δὲ καὶ ἡ αο πρὸς ηθ λόγον ἔχει ὃν πέντε πρὸς δύο. πάλιν ἐπεὶ ἐδείχθη ἐν τοῖς ἀνωτέρω, ὅτι ἡ οδ πρὸς δα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἡ εβ μετὰ τῆς β τῆς βδ πρὸς τὴν ἴσην τῇ συγκειμένῃ ἐκ τε τῆς β συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, μετὰ τὴν δ συναμφοτέρου τῆς γβ, βδ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἑπόμενον ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν, ἡ αδ πρὸς ἄλλο τι τὴν δε, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλο τι ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς αβ, καὶ γ τῆς γβ, καὶ μόνης τῆς δβ πρὸς ἡγούμενον τὴν συγκειμένην ἐκ τε τῆς εβ, καὶ τῆς β τῆς βδ. ἀνομοίως τῶν λόγων τεταγμένων, τουτέστι τεταραγμένης οὔσης τῆς ἀναλογίας, δι' ἴσου ἐστὶν ὡς ἡ οδ πρὸς δε, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς αβ, καὶ τῆς γ τῆς γβ, καὶ μόνης τῆς βδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ δ τῆς γβ, βδ. ὥστε καὶ ἀνάπαλιν ὡς ἡ εδ πρὸς δο, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γβ, βδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τε τῆς β τῆς αβ, καὶ γ τῆς γβ, καὶ μόνης τῆς βδ. καὶ ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ δε πρὸς εο, τὸ ἡγούμενον φημὶ πρὸς τὴν ὑπεροχήν, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, μετὰ τῆς δ τῆς γβ, βδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς γβ μόνης, καὶ γ τῆς βδ, καὶ τῆς β τῆς εβ. ἐν μὲν γὰρ τῷ ἡγουμένῳ ἡ β τῆς αβ, καὶ τῆς βε. ἐν δὲ τῷ ἑπομένῳ ἡ β τῆς αβ μόνης, ὥστε περιλείπεται ἐν ταῖς ὑπεροχαῖς ἡ β τῆς εβ. πάλιν ἐν μὲν τῷ ἡγουμένῳ ἡ δ συναμφοτέρου τῆς γβ, βδ, ἐν δὲ τῷ ἑπομένῳ ἡ γ τῆς γβ, καὶ ἡ βδ μόνη. ὥστε περιλείπεται ἐν ταῖς ὑπεροχαῖς ἡ γβ μόνη, καὶ ἡ γ τῆς βδ. καλῶς οὖν ἐλέχθη, ὅτι ἐστὶν ἀναστρέψαντι ὡς ἡ δε πρὸς εο, ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γβ, βδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τε τῆς γβ, καὶ τῆς γ τῆς δβ, καὶ τῆς β τῆς εβ. ὥστε καὶ ἀνάπαλιν ὡς οε πρὸς εδ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς γβ, μετὰ τῆς γ τῆς βδ, καὶ β τῆς εβ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γβ, βδ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ δβ πρὸς ἄλλο τι τὴν εβ, ἡ αβ πρὸς βγ. καὶ διελόντι ὡς ἡ δε

δε πρὸς εβ, ἡ αγ πρὸς γβ. διὰ τὰ αὐτὰ δή ἐστιν ὡς ἡ γ̄δ πρὸς δβ, οὕτως ἡ δε πρὸς εβ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γ̄ τῆς γ̄δ πρὸς τὴν γ̄ τῆς δβ, οὕτως ἡ β̄ τῆς δε πρὸς τὴν β̄ τῆς εβ. τὰ γὰρ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. καὶ ὡς ἄρα ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δε πρὸς εβ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς αγ, καὶ τῆς γ̄ τῆς γ̄δ, καὶ ἡ β̄ τῆς δε πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς γ̄β, καὶ τῆς γ̄ τῆς β̄δ, καὶ τῆς β̄ τῆς εβ. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον ἡ [..] πρὸς ἑπόμενον τὴν δε, ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς γ̄β, καὶ τῆς γ̄ τῆς β̄δ, καὶ β̄ τῆς β̄ε, πρὸς ἑπόμενον τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ, β̄ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβδ. ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον ἡ δε πρὸς ἄλλο τι τὴν εβ, ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλο τι ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς αγ, καὶ ἡ γ̄ τῆς γ̄δ, καὶ β̄ τῆς δε πρὸς ἡγούμενον τὴν συγκειμένην, ἔκ τε τῆς γ̄β, καὶ γ̄ τῆς δβ, καὶ β̄ τῆς β̄ε. δι' ἴσου ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ, ὡς ἡ δε πρὸς εβ, ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς αγ, καὶ γ̄ τῆς γ̄δ, καὶ ἡ β̄ τῆς δε πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβε, μετὰ τῆς δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβδ. καὶ συνθέντι ὡς ἡ δβ πρὸς β̄ε, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς αγ, καὶ γ̄ τῆς γ̄δ, καὶ β̄ τῆς εδ, καὶ β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ, β̄ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβδ πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβδ. ἀλλὰ ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς αγ, καὶ γ̄ τῆς γ̄δ, καὶ β̄ τῆς δε, καὶ β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ, β̄ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβδ. ἴση δή ἐστι τῇ συγκειμένῃ ἔκ τε τῆς γ̄ τῆς αβ, καὶ ς̄ τῆς γβ, καὶ γ̄ τῆς δβ. ἥ τε γὰρ αβ δὶς παρελήφθη αὐτόθεν, καὶ προσλαβοῦσα τὴν αγ, καὶ ἐκ τῆς δ̄ τῆς γβ μίαν, ποιεῖ τρίτον τὴν αβ. πάλιν ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τῆς δ̄ τῆς γβ μίαν, γίνονται γ̄. προσλαβοῦσαι δὲ τὴν γ̄ τῆς γ̄δ, καὶ γ̄ τῆς δβ, ποιεῖ τὴν ς̄ τῆς γ̄β. πάλιν ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τῆς δβ, γ̄, μένει μόνη ἡ δβ. προσλαβοῦσα δέ τήν τε β̄ τῆς δε, καὶ τὴν β̄ τῆς εβ, ποιεῖ τὴν γ̄ τῆς β̄δ. καλῶς οὖν λέγει, ὅτι ἡ δβ πρὸς εβ τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς γ̄ τῆς αβ, καὶ ς̄ τῆς γ̄β, καὶ γ̄ τῆς δβ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβδ. πάλιν ἐπεὶ αἱ εδ, δγ, γα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί, καὶ διὰ τὸ ἀνάπαλιν τῆς ὑποθέσεως συναμφότερος ἑκάστη τῶν εβ, β̄δ, δβ, β̄γ, β̄α. ἔσται ὡς ἡ εδ πρὸς τὴν μέσην καὶ τὴν ἑπομένην τὰς δγ, γα, τουτέστι τὴν δα, οὕτως συναμφότερος ἡ εβ, β̄δ πρὸς συναμφότερον τὴν δβ, β̄γ, μετὰ συναμφοτέρου τῆς γβ, β̄α. καὶ συνθέντι ἄρα ὡς εα πρὸς αδ, οὕτως συναμφότερος ἡ εβδ, μετὰ συναμφοτέρου τῆς δβγ, καὶ μετὰ συναμφοτέρου τῆς γβα, πρὸς συναμφότερον τὴν δβγ, μετὰ συναμφοτέρου τῆς γβα. ἀλλὰ συναμφότερος ἡ εβδ μετὰ τῆς δβγ, καὶ τῆς γβα, ἴση δή ἐστι συναμφοτέρῳ τῇ εβα, καὶ δὶς συναμφοτέρῳ τῇ δβγ. ἅπαξ γὰρ αἱ ἄκραι παραλαμβάνονται, καὶ δὶς αἱ μέσαι. συναμφότερος δὲ ἡ δβγ μετὰ τῆς γβα, ἴση δή ἐστι συναμφοτέρῳ τῇ αβδ, καὶ δὶς τῇ γβ, διὰ τὴν αὐτὴν αἰτίαν. ὥστε δή ἐστιν ὡς ἡ εα πρὸς αδ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς εβα, καὶ β̄ συναμφοτέρου τῆς δβγ πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε συναμφοτέρου τῆς δβα, καὶ τῆς β̄ τῆς γ̄β. ὥστε καὶ ἡ διπλασία πρὸς τὴν διπλασίαν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ὡς ἄρα ἡ εα πρὸς αδ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς εβα, μετὰ τῆς δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβδ πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβδ. καὶ τῆς δ̄ τῆς γ̄β. ὥστε καὶ ὡς ἡ εα πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς αδ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβδ, πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς συγκειμένης ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβδ, καὶ τῆς δ̄ τῆς γ̄β. ἀλλ' ὡς ἡ αε πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς αδ, οὕτως ἐλήφθη ἡ β̄ε πρὸς ζη. καὶ ὡς ἄρα ἡ εβ πρὸς ζη, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβε, καὶ τῆς δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβδ, καὶ δ̄ τῆς γ̄β. ἐπεὶ οὖν δέδεικται ὡς ἡγούμενον ἡ δβ πρὸς ἑπόμενον τὴν βε, οὕτως ἡγούμενον ἡ γ̄ συναμφοτέρου τῆς αβδ, καὶ μετὰ τῆς ς̄ τῆς γ̄β, πρὸς τὴν β̄ συναμφοτέρου τῆς αβε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβδ. ὡς δὲ ἑπόμενον ἡ εβ πρὸς ἄλλο τι τὴν ζη, οὕτως ἡγούμενον ἡ β̄ συναμφοτέρου τῆς αβε, καὶ ἡ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβδ πρὸς τὰ τρία πέμπτα τοῦ ἑπομένου, τουτέστι τῆς συγκειμένης ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβδ, καὶ τῆς δ̄ τῆς γ̄β. τεταγμένης οὖν οὔσης τῆς ἀναλογίας δι' ἴσου ἐστίν, ὡς ἡ δβ πρὸς ζη, οὕτως ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς γ̄ συναμφοτέρου τῆς αβδ, καὶ ς̄ τῆς γ̄β, πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβδ, καὶ δ̄ τῆς γ̄β. ἡ δὲ συγκειμένη ἐκ τῆς γ̄ συναμφοτέρου τῆς αβδ, καὶ ς̄ τῆς γ̄β πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβδ, καὶ δ̄ τῆς γ̄β, λόγον ἔχει ὃν τρία πρὸς δύο. τὰ δὲ ἑξαπλάσια τῶν αὐτῶν

τετραπλασίων ἡμιόλια ἐστί. πῶς; δὲ τρία πέμπτα τῆς αὐτῆς λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. ἐπειδὴ δὲ τὰ ἡγούμενα τῶν ἑπομένων ἡμιόλια, καὶ λόγον ἔχει πρὸς αὐτά, ὃν τρία πρὸς δύο, ἔχει ἄρα καὶ ὃν τεσσαράκοντα πέντε πρὸς τριάκοντα. ἑκάτερον γὰρ ἑκατέρου ἐστὶ πεντεκαιδεκαπλάσιον. καὶ ἐστὶ τὰ τρία πέμπτα τῶν τριάκοντα δεκαοκτώ. ἔχει ἄρα τεσσαράκοντα πέντε πρὸς δεκαοκτὼ λόγον, ὃν πέντε πρὸς δύο. τὰ γὰρ πέντε καὶ τὰ δύο ἀμφοτέρων ἐσὶν ἐννάκις. ἐπεὶ οὖν δέδεικται ἡ μὲν εα πρὸς ηθ λόγον ἔχουσα, ὃν πέντε πρὸς δύο, ἡ δὲ οβ πρὸς ζη τὸν αὐτὸν λόγον, δύο πεμπτημόρια ἐστὶν ὅλη ἡ ζθ ὅλης τῆς αβ.

ΕΙΣ ΤΟ Γ.

Φανερὸν δή, ὅτι καὶ τοῦ αδεγ τόμου διάμετρός ἐστιν ἡ ζη. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται ἡ ζβ διάμετρος τοῦ τμήματος, καὶ αἱ αγ, δε διχοτομούμεναι ὑπ' αὐτῆς, κατὰ τὸ ζ, η, παράλληλοί εἰσιν τῇ κατὰ τὸ β ἐφαπτομένῃ τῆς τομῆς. καὶ δῆλον ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ὁμοίως αὐταῖς ἀγόμεναι παράλληλοι, εἴτε μεταξὺ αὐτῶν, εἴτε καὶ μεταξὺ τῆς δε, καὶ τῆς β κορυφῆς δίχα τμηθήσονται ὑπὸ τῆς βζ. καὶ διὰ τοῦτο φησὶ διάμετρον εἶναι τοῦ τόμου τὴν ζη. ἀλλ' ὡς μὲν ὁ ἀπὸ ζβ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δη κύβον, οὕτως τὸ ἀπὸ αβγ τμῆμα πρὸς τὸ δβε τμῆμα. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ὑπ' αὐτοῦ, ὅτι τὸ αβγ τμῆμα τοῦ αβγ τριγώνου ἐστὶν ἐπίτριτον, καὶ τὸ δεβ τμῆμα τοῦ δεβ τριγώνου, ἔστιν ὡς τὸ αβγ τμῆμα πρὸς τὸ αβγ τρίγωνον, οὕτως τὸ δεβ τμῆμα πρὸς τὸ δεβ τρίγωνον. καὶ ἀνάλλαξ ὡς τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα, τὸ τρίγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον. ὥστε ἐπὶ τὰ ἡμίση αὐτῶν, ὡς τὸ αβγ τμῆμα πρὸς τὸ δεβ τμῆμα, οὕτως τὸ αζβ τρίγωνον πρὸς τὸ δηβ τρίγωνον. ὥστε καὶ ἐὰν ἀναγράψωμεν τὰ παραλληλόγραμμα διπλάσια τῶν τριγώνων, ἔσται ἰσογώνια διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς δη, αζ. ὥστε καὶ λόγον ἕξει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν τῆς αζ πρὸς δη, καὶ τῆς βζ πρὸς βη. ὁ αὐτὸς γὰρ λόγος ἐστὶ τῶν τετραγώνων καὶ τῶν τμημάτων. τὸ ἄρα τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ τῆς αζ πρὸς δη, καὶ τοῦ τῆς ζβ πρὸς βη. ὁ γὰρ τῆς ζβ πρὸς βη λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αζ πρὸς τὸ ἀπὸ δη τετραγώνου. ὁ ἄρα τοῦ τμήματος πρὸς τὸ τμῆμα λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ ἀπὸ αζ πρὸς τὸ ἀπὸ δη τετράγωνον, καὶ τοῦ τῆς αζ πρὸς δη. σύγκειται δὲ καὶ ὁ τοῦ ἀπὸ αζ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ δη κύβον λόγος ἐκ τῶν αὐτῶν, ὡς δέδεικται ἐν τοῖς χολίοις τοῦ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα, οὕτως ὁ ἀπὸ αζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δη κύβον. καὶ ἐπεὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ τῆς αζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἐκ τε τῆς β τῆς δη, καὶ τῆς αζ, πρὸς τὸν ἀπὸ αζ κύβον, λόγον ἔχει ὃν ἡ β τῆς δη μετὰ τῆς αζ πρὸς ζα. ἐπὶ γὰρ τῶν αὐτῶν βάσεων ὄντα πρὸς ἄλληλα, ἐστὶν ὡς τὰ ὕψη. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ δη πρὸς αζ, ἡ ξν πρὸς νμ. καὶ ὡς ἡ β τῆς δη πρὸς αζ, ἡ β τῆς ξν πρὸς νμ. καὶ συνθέντι ὡς ἡ β τῆς νξ μετὰ τῆς νμ πρὸς νμ, ἡ β τῆς δη μετὰ τῆς αζ πρὸς αζ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ ἀπὸ αζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δη κύβον, οὕτως ὅ τε ἀπὸ μν κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ νξ κύβον, καὶ ἡ μν πρὸς ντ, τέσσαρες εἰσὶν ἀνάλογον. καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης στερεὸν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ὅμοιον, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον. ὥστε ὁ ἀπὸ δη κύβος πρὸς τὸ στερεόν, τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ δη τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην δυθεῖσαν ἐκ τε τῆς β τῆς αζ, καὶ τῆς δη, οὕτως ἡ δη πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς αζ, καὶ τῆς δη. πάλιν γὰρ πρὸς ἄλληλα ἐστὶν ὡς τὰ ὕψη. ὡς δὲ ἡ δη πρὸς τὴν β τῆς αζ μετὰ τῆς δη, οὕτως ἡ τν πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τε τῆς β τῆς ον, καὶ τῆς τν. ἔστι γὰρ ὡς ἡ αζ πρὸς δη, ἡ μν πρὸς νξ, καὶ ἡ ον πρὸς ντ. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἡ δη πρὸς αζ, ἡ τν πρὸς νο. καὶ ὡς ἡ δη μετὰ τῆς β τῆς αζ πρὸς δη, οὕτως ἡ τν μετὰ τῆς β τῆς νο πρὸς νο. γέγονεν οὖν τέσσαρα μεγέθη ἑξῆς ἀλλήλων κείμενα. πρῶτον τὸ στερεὸν τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ αζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς δη, καὶ τῆς αζ. δεύτερον ὁ ἀπὸ τῆς αζ κύβος. καὶ τρίτον ὁ ἀπὸ τῆς δη κύβος. καὶ τέταρτον τὸ στερεὸν τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ τῆς δη τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἐκ τε τῆς β τῆς αζ, καὶ τῆς δη. καὶ ἄλλαι τινὲς δεθεῖσαι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ σὺν δύο λαμβανόμεναι, ἥ τε συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς νξ, καὶ μόνης τῆς μν, καὶ δευτέρα ἡ μν, καὶ τρίτη ἡ ντ, καὶ τετάρτη ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς ον, καὶ τῆς ντ. δι' ἴσου ἄρα γενήσεται, ὡς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ αζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς διπλῆς τῆς δη, καὶ τῆς αζ μόνης, πρὸς τὸ στερεόν, τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ δη τετράγωνον, ὕψος τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς αζ, καὶ μόνης τῆς δη, οὕτως συγκειμένης ἐκ τῆς β τῆς ξν, καὶ μόνης τῆς μν, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς νο, καὶ μόνης τῆς ντ, ἀλλ' ὡς τὰ

εἰρημένα

ἀρημένα στερεὰ πρὸς ἄλλαλα, οὕτως ἐδείχθη ἡ θι πρὸς ικ. καὶ ὡς ἄρα ἡ θι πρὸς ικ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τᾶς Β τᾶς ξν, καὶ μόνης τᾶς μν, πρὸς τὰν Β τᾶς ον, καὶ μόνης τᾶς ντ. καὶ συνθέντι ὡς ἡ θκ πρὸς κι, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ συναμφοτέρας τᾶς μντ, ἐπὶ τὰ Β συναμφοτέρου τᾶς ξνο, πρὸς τὰν συγκειμέναν ἐκ τᾶς Β τᾶς ον, καὶ μόνης τᾶς ντ, ἐπὶ τὰ ἡγουμένων τὰ ε. ὡς ἡ κζ πρὸς κι, οὕτως ἡ ε συναμφοτέρου τᾶς μντ, καὶ ι συναμφοτέρας τᾶς ξνο, πρὸς τὰν συγκειμέναν ἐκ τᾶς ε τᾶς νο, καὶ μόνης τᾶς ντ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ζκ πρὸς ζη, οὕτως αὐτῆς δύο πέμπτα. ἑκάτερα γὰρ τῶν ηθ ζκ δύο πεμπτημόρια ἐστὶ τᾶς ηζ. ἐπεὶ δὲ τὸ μέσον πεμπτημόριον ἡ θκ ὑπόκειται, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τᾶς ε συναμφοτέρου τᾶς μντ, καὶ ι συναμφοτέρου τᾶς ξνο, πρὸς τὰν Β συναμφοτέρου τᾶς μντ, καὶ δ συναμφοτέρου τᾶς ξνο. καὶ γὰρ τὰ Β τῶν ε, καὶ τὰ δ τῶν ι δύο πεμπτημόρια ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς ἡ ζκ πρὸς ικ, οὕτως ἡ ε τᾶς μντ, καὶ ι τᾶς ξνο, πρὸς τὰν Β τᾶς νο, καὶ μόναν τὰν ντ. πάλιν δὲ ἐδείχθη ὡς ἡ ζκ πρὸς ζκ, ἡ ε συναμφοτέρου τᾶς μντ, καὶ ι τᾶς ξνο, πρὸς τὰν Β τᾶς μντ, καὶ δ τᾶς ξνο. ἔσται ὡς ἡγούμενον πρὸς τὰ δύο ἑπόμενα, οὕτως ἡγούμενον πρὸς τὰ δύο ἑπόμενα, ὡς ἡ ζη πρὸς ζι, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τᾶς ε συναμφοτέρου τᾶς μντ, καὶ ι συναμφοτέρου τᾶς ξνο, πρὸς τὰν συγκειμέναν ἐκ τᾶς Β τᾶς ον, καὶ μόνης τῆς ντ, καὶ τὰ Β συναμφοτέρου τᾶς μντ, καὶ δ τᾶς ξνο, ἥ ἐστιν ἴση τῇ συγκειμένῃ ἐκ τᾶς Β τᾶς μν, καὶ δ τᾶς νξ, καὶ ς τᾶς νο, καὶ γ τᾶς ντ. οὕτως γὰρ εἴληπται καὶ ἀνωτέρω. ἐπεὶ οὖν τέσσαρες εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογον εἰσὶν αἱ μν, νξ, ον, ντ, καὶ ἔστιν ὡς μὲν ἡ ντ πρὸς τμ, οὕτως εἰλημμένη τις ἡ ρι πρὸς τὰν ζθ, τουτέστι πρὸς τὰ τρία πέμπτα τᾶς ηζ, τουτέστι τᾶς μο, καὶ δεδειγμέναι εἰσὶν αἱ ἐν τῷ ῥητῷ ἀναλογίαι. ἔσται δὲ τὸ προειρημένον ἡ ρζ δύο πέμπτα τᾶς μν, τουτέστι τᾶς ζβ. τρία ἄρα πέμπτα ἐστὶν ἡ Βρ τᾶς Βζ. ἡ Βρ ἄρα πρὸς ρζ λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο, ὥστε κέντρον βάρους ἐστὶ, τοῦ αΒγ τμήματος τὸ ρ σημεῖον. ἐὰν δὴ λαβόμεν τὸ τοῦ δβε τμήματος τὸ χ, τρία πέμπτα ἔσται ἡ Βχ τᾶς Βκ. γέγονεν ὡς ὅλη ἡ ζβ πρὸς ὅλαν τὰν Βρ, οὕτως ἀφαιρεθεῖσα ἡ Βη πρὸς ἀφαιρεθεῖσαν τὰν Βχ. ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν πρὸς ἑκατέραν λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς τρία. καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ζη πρὸς λοιπὰν τὰν χρ λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς τρία. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται ὡς ὁ αδεγ τομεὺς πρὸς τὸ δβε τμῆμα, οὕτως ἡ μτ πρὸς ντ. ὡς δὲ ἡ μτ πρὸς τν, οὕτως τὰ τρία πέμπτα τᾶς ηζ, τουτέστιν ἡ ζθ, ἤτοι ἡ χρ πρὸς ρι. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸ τμῆμα, ἡ χρ πρὸς ρι. καὶ ἀντιπεπόνθασιν, καὶ ἐστὶ τὸ ρ κέντρον τοῦ ὅλου τμήματος, τοῦ ἄρα τόμου κέντρον ἐστὶ τὸ ι.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΟ Β τῶν ἰσοῤῥοπικῶν ἀρχιμήδους.

COMMENTARII EVTOCII ASCALONITÆ IN PRIMVM ARCHIMEDIS DE *Sphæra & cylindro.*

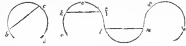
QVVM in Archimedis libro quem de ſphæra & cylindro cõfecit, eorum qui nos præceſſerunt neminem adhuc comperiſſem quippiam dignũ cõpoſuiſſe, idq; ab eis prætermiſſum intelligerem non propter theorematum, quæ illic habentur, facilitatem, quæ uti noſtis doctrina indigent exquiſitiſſima, & inſtructiſſima in primis excogitatione, aggreſſus ſum pro uirib. ea quæ in illis obſcura & perſpectu difficilia continentur declarare. adductus ad hoc magis, quod neminem fortè in hanc comprehenſionem deſcenſurum cernerem, quod rerum iſtarũ difficultate deterritus ſim. Simul etiam Socraticum illud mecum reputans, Deo coadiutore nos commodè admodum & ad perfectionem ſtudij noſtri peruenturos:

DECLARATIO TERMINORVM.

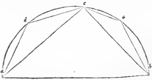
PRAENVMERANS ea quæ ab ipso exponenda sunt theoremata, ut consuetum est omnibus Geometris in expositione, seruans quoq; appellationes quibus ipse per licentiã usus est: primò terminationes suppositionum, & ipsas quoq; suppositiones in initio scribendi uult declarare. & ait primũ, Quasdam esse in plano curuas lineas, quę lineis rectis earum terminos iungentibus, uel omnis in eandem partem uergũt, uel aliquid in alteram habent. Hoc autem quod dictum est, planum erit, si intellexerimus quas appellat in plano curuas lineas. Quare aduertendum est, curuas ab eo lineas appellari non simpliciter circulares, aut conicas, aut eas quæ connnuitatem habent non fractam: uerum eas omnis simpliciter, quæ in plano cum sint, nõ in directum producantur, curuas uocat. Vnam autem lineam in plano quocunq; modo connexam, quãuis siue ex rectis pluribus connectatur, siue ex curuis, siue ex rectis & curuis, unam tamen eam ex ea connexione postulat appellari.

Hic deest una charta in exemplari græco.

ipsi a b c d. Verum quoniam uti suprà dictũ est, curuas lineas uocat non quæ circumferentiam habent solas, uerumetiam eas quæ ex rectis componuntur: ex his erat collectio earum quæ in eadem cauæ habentur. Continget enim in quadam linea, quæ in eadem caua sit, duo utcunq; puncta notari, ita ut linea recta quæ illa puncta iunxerit, in neutram prioris lineæ partem cadat, sed ipsi coaptetur. Propterea dixit, lineam in candẽ cauam esse uocari, in qua lineæ rectæ, per duo quæq; eius puncta ductę aut omnis in easdem partes cadant rectæ lineæ, aut earum quędam in easdem partes quædam super eam, & nulla in alterã partem. Easdem uero licet interpretari, & in superficiebus.

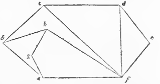


Deinde ex ordine nominat frustum solidum, & rhombum solidũ, aperte declarans significaoonem nominum. Post hęc petitiones quasdam sumit, quę sunt ei opportunæ ad demonstrationes sequẽtes, quæ quidem ex ipso sensu confessæ habentur: nihilominus tamen demonstrari ex communibus conceptionibus, & ex his quæ demõstrata sunt in Elementis, possunt. Est autem petitionum prima huiusmodi: Linearum omnium, quæ eisdem terminis continentur, rectam esse breuissimam. Esto enim in plano linea recta terminata hæc a b: & altera itẽ linea quædam a c b, eisdẽ contenta terminis a b, postulat sibi concedi ipsam a b minorẽ esse ipsa a c b. Dico igitur, quod hoc cũ uerum existat, petitũ est. notetur itaq; in ipsa a c b, utcunq; punctum c: & iũgantur a c, c b, constat ergo, ipsas a e, c b esse ipsa a b maiores. Item sumantur in ipsis

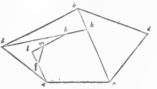


ſis a c,c b lineis alia utcunq; puncta d e,& iungantur a d,d c,c e,e b. ſimiliter ſam hic cõſtat duas a d,d c eſſe maiores a c. & duas c e, e b maiores c b. Quare hæ a d, d c,c e,e b multo maiores erunt ipſa a b. Similiter autem & ſi alia puncta intermedia ſumpta notauerimus, & iunxerimus rectas ad puncta nunc ſumpta, inueniemus ipſas item maiores a b. et hoc aſſidue faciendo, quæ magis acceſſerint ad lineam a b crectę maiores inuenientur. quare conſtat ex his, eam a c b eſſe ipſa a b maiorem, cum poſſimus in tota ipſa punctum notare, & ipſam iungentes lineam ex rectis compoſitam, ut eam talem eſſe lineam oſtendamus, quæ eadem ratione ipſa a b probetur maior. neq; enim inconueniens eſt, in demonſtrationibus eorũ quæ confeſſa habentur, huiuſmodi aſſumere conceptiones.

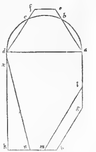
Poſt hæc dicit, ſe ſumere hoc: earum quæ eoſdem terminos habeãt linearum, illas eſſe inæquales, quæ in eaſdem cauas extiterint eo quo ſuprà dictum fuit modo. Non ſolum autem dixit in hoc inæquales eſſe, hoc quod eſt in eaſdem cauas eſſe: uerum etiam quum altera alteram, aut totam complectitur, aut eius partem complectitur: partem autem habet communem & complectentem complexa maiorem eſſe. Intelligantur autem, ut & hoc manifeſtum fiat, in plano duæ lineæ a b c d e f, & a g b f, eoſdem terminos habẽtes hos a, f, & in eadem cauæ. & quoniam tota a g h f complexa eſt ab ipſa a b c d e f eoſdem terminos habẽte hos a, f. dico iſtas inæquales eſſe, & quæ comprę hendit comprænhenſa maior eſt. Iungantur itaq; b h, e f, d f. Quoniam igitur ſi intelligatur iuncta h a, ad unum laterum ipſius a b h, intus conſtitutæ ſunt hæ a g, g h, his a b, b h, cõmuni poſita h f. Hæ igitur a g, g h, h f, minores ſunt his a b, b h, h f. Verum b h, h f, minores ſunt his b c, e f. nam ſunt intus rurſus ſuper unam b f cõſtitutæ. multo magis ergo a b, b c, c f maiores ſunt his a g, g h, h f. Verum hæ c d, d f, maiores ſunt hac c f. & hæ d e, e f, ſunt ipſa d f maiores. multo magis ergo hæ a b c d e f, ſunt his a g h f maiores.



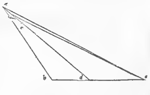
Declarationis enim gratia ſupponantur & aliæ lineæ ſimiliter prædictis, uelu ti hæ a b c d e, a f g h k e. Dico comprænhendentem eſſe maiorẽ. Intelligantur enim a f, g h erectæ in l. Quoniam igitur rurſus f l, l g maiores ſunt f g, adiectis communibus a f, g h, hæ a l, l h maiores ſunt a f, f g, g h. Verum a l, l h maiores ſunt his a b, b h mul to magis ergo a b, b h maiores ſunt his a f, f g, g h. adiecta communi b k, erunt a b, b k maiores his a f g h k. Verũ b h, h k minores ſunt b c, c k. Multo magis ergo maiores a b c k, his a f g h k, adiecta communi k e, erunt hæ a b c k e maiores his a f g h k e. Verum hę c k, k e minores ſunt his c d, d e. multo magis ergo hæ a b c d e, maiores ſunt a f g h k e.



Et si circumferentiæ sint uel comprendentes uel comprensæ, aut utrumque, idem licet inspicere. nam si puncta cõtinuata in eisdem notentur, & in eadem iungantur, rectę: sumentur lineæ ex rectis compositæ, quibus accommodabitur prædicta demonstratio, his quæ ex rectis componuntur quales illæ fuerint factis adiectis. unde & omnem lineam in continuatione punctorum existentiã habentem notato. Quod aũt conuenienter inæqualitatem linearum non solum ex hoc quòd in eadem cauæ sint, denotauit: uerum addidit etiam hoc, oportere alteram ab altera comprehendi, & ab ea quæ eosdem habeat terminos recta. nam nisi hoc fuerit, nõ erit hoc utiq; uerũ, omnino lineas tunc inæquales esse: uti conspicere licet in figuris infrascriptis. nam linea a b c d. & a e f d, eosdem terminos habent, & in eandem cauæ sunt: nec tamen constat, utra earũ sit altera maior. nam potest esse ut æquales sint, & possint utræq; in eadem cauæ intelligi, & eosdem terminos habere. ambæ autem contraria inter se positione cõstitutæ, ut utrauis earum quæ sunt dictæ ipsi a g h k d: et ita incognitum est si inæqualitas aut æqualitas earum hoc pacto sequatur. quare opportunè adiectum est, aut totam alteram comprehendi ab altera recta oportere, quæ eosdẽ terminos habeat: aut partem quidem comprehendi, partem autem cum ea communem habere: sicuti in his a g h k d, & a l m n x d. in his enim quædam comprehenduntur, quædam communes sunt, uti a l m n.

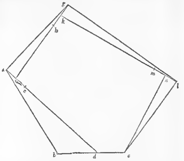


Opportunè autem admodum & illud ad inæqualitatis iudicium assumptum est, oportere lineas eosdem terminos habere. Si enim non fuerit illud, neq; altera alteram comprehendere poterit. Quomodo igitur inæquales erunt, nisi casu. nã quãdoq; erunt æquales. & contingit esse comprehensam aliquando cõprendente maiorem. Vt autẽ hoc declaretur, intelligantur in plano duæ rectæ, a b, b c, obtusum angulum ad b continentes: & sumatur in b c punctũ uicunq; d. iungantur a d, a c. Quoniam igitur a d, maior est ipsa a b, ponatur a b æqualis ipsi d e, & diuidatũ a e in duo æqua puncto f, & iungatur f c. Quoniã igitur duæ a f, f c maiores sunt a c, & æqualis a f est ipsi f e, erit e f, f c maior ipsa a c, adiecta eorum a b, erunt hæ d f, f c maiores his b a, a c. quare linea b a c intellecta una esse, & in eadem caua, altera uero d f c comprehensa ab altera quæ eosdem terminos non habeat, non solum comprehendens non est maior cõprehensa, uerum ostenditur minor esse.



Et in lineis ex pluribus rectis compositis hoc idem licet inspicere. nam intelligantur in plano duæ rectæ hæ a b, b c: & pũctum d quodcunq; contingat, & iungatur a d, Rursus ponatur d e æqualis ipsi a b, & e a diuidatur in duo æqua puncto

cto f, & ducatur a g ad angulos rectos ad ipsam a d, & iungatur f g. & ponatur f h æqualis ipsi a g. & item, diuidatur h g in duo æqua puncto k, & ducatur g l ad angulos rectos ad ipsam f g, & iungatur k l. item k m ponatur æqualis ipsi g l, & diuidatur m l in duo æqua puncto n. & item ducatur l c ad angulos rectos, ad ipsam k l, et iūgatur n c. Expresse demonstrans igitur cōstat, d f maiorem esse ipsa a b, & f k ipsa a g, ipsam k n ipsa g l, ipsam n c ipsa l c. quare et totā lineā d f k n c, maiorem ipsa a b g l c. Opportune ergo ad sectū fuit, eas oportere eosdem habere terminos, in his



quæ esse debeant inæquales. Potest autem qui hæc considerarit, idem de superficiebus demonstrare omnibus, quando cum his quæ prædicta sunt conditionib. superficies sumptæ, eosdem terminos cum planis habuerint.

IN SECVNDVM THEOREMA.

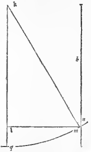
At uero a c sibi ipsi supercompositum, excedet ipsum d, uidelicet sic: cum ipsum a b superparticulare aut superpartiens contigerit esse ipsius d. Si autē sit a b multiplex ipsius d, aut multiplex superparticularis, aut multiplex superpartiens, ablato ab ipso b c æquali d, reliquum c a superabit d, ita ut non amplius necesse sit sumi multiplex ipsi, uerum ut oporteat inde ponere a b æqua le ipsi a c, & eandem accommodare demonstrationem. Et componenti ipsi f h ad f g minorem proportionem habet, quàm a b ad b c. nā si primum ad secūdum minorem habeat proportionem, quàm tertiū ad quartum, componendo eadem proportio sequitur. Ostēdetur autem sic. Sūto quatuor magnitudines a b, b c, d e, e f. & a b maiorem ad b c habeat proportionem, quàm d e ad e f. Dico igitur componēdo, a c habere ad b c maiorem proportionem, quàm d f ad e f. Fiat enim sicut c b ad b a, ita f e, ad f h. Econuerso igitur, sicut a b ad b c, ita h f ad e f. maiorem aūt habet a b ad b c proportionē, quàm d e ad e f. igitū h f habet ad e f maiorem proportionem, quàm d e ad e f. quare h f maior erit ipsa d e, & totum h e maius toto d f. & propterea h e habet ad e f maiorem proportionem, quàm d f ad f e. Verū sicut h e ad e f, ita a c ad c b, per compositionem. igitur a c ad c b maiorem habet proportionem, quàm d f ad e f. At uero a c habeat ad c b maiorem proportionē, quàm d f ad f e. Dico diuidendo, quod a b habebit ad b c maiorem proportionem, quàm d e ad e f. Rursus enim similiter, si faciamus sicut c b ad c a, ita f e ad e h, fiet ut h e sit maior d f. quare communi e f ablata, erit h f maius d e, quare h f habebit ad f e, quę est sicut a b ad b c,



 diui-

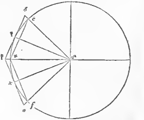
diuidendo maiorē proportionē, quàm d e ad e f. & cōponendo, & item diuidendo eadem proportio sequeť. Ex eisdem aūt euersa proportio constat. habeat enim a c maiorem ad b c proportionem, quàm d f ad f e. Dico quod euertendo c a habebit ad a b proportionem minorem, quàm f d ad d e. Quoniā enim a c habet ad b c maiorem proportionem, quàm d f ad f e: & diuidenti a b habebit ad b c maiorem proportionem, quàm d e ad e f. Econuerso b c ad b a habebit minorem proportionem, quàm f e ad e d: & cōponenti, c a ad a b minorem habebit, quàm f d ad d e.

IN TERTIVM THEOREMA.



ET ab ipso k ducatur æqualis ipsi h, quæ sit k m hoc fieri potest producta k l ad q, & posita h æquali ipsi k q. & cētro quidem k, interuallo autem k q descripto, circulo uidelicet q m n, cō star k m æqualem esse ipsi k q. hoc est ipsi h.

Latus ergo n c figuræ multiangulæ, & æquilateræ. Angulo enim recto in sesquiquartam proportionem adducto, & sectione per parem diuisionem facta à recto, constat quod circumferentia sesquiquarta in pariter pares numero distribuetur circumferentias. Quare recta quę uni ex illis circumferentijs subtensa fuerit, fiet figuræ multiangulæ & æquilateræ & parilateræ latus unum. Nam si angulo sub x g n, æqualem fecerimus angulum sub p g d, iungentes ab ipso p in g, & producamus usq; ad g h, ęqualem ipsi angulo sub p g d, constat p h esse æqualem ipsi p o, & attingere circulum. Quoniam enim ipsa x g æqualis est ipsi g d. nam ipsa g communis est: æquales enim complectuntur. Ergo basis x p æqualis est ipsi p d. & angulus sub p x g, rectus cum sit, æquatur angulo p d g. quare contingit ipsum p d. Quoniam enim qui ad d anguli recti sunt & qui sub p g d, d g h æquales: & est communis d g, quare g h æqualis est ipsi g p, & ipsa p d ipsi h d. Item ipsa x p ipsi p d ostēsa est esse ęqualis. quare ipsa h p existit figuræ multiāgulæ æquilateræ & parilateræ latus, descriptæ circa circulum. Quod autē similis figurę inscriptę fiat, inde constat. Cum enim ipsa h g sit æqualis ipsi g p, & ipsa c g ipsi g n, æquedistans est h p ipsi c n. eadem ratione & ipsa p o, ipsi n k. Quare angulus sub c n k, æqualis est angulo sub o p h. quare circūscripta figura est inscriptæ similis.



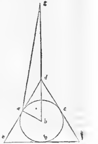
Cum enim angulus a d k c, maior sit angulo sub c g t, si angulo sub c g t constituamus æqualem angulum sub l k r, ipso k intellecto inter ipsa l m, triangulus l k r similis erit triangulo c g t. et erit sicut r k ad k l, sic c g ad g t. quare m k ad k l, maiorem proportionem habet, quàm c g ad g t.

IN SEXTVM THEOREMA.

PRopter hoc minus est circumscriptum utroq; simul. Quoniam enim circum scriptum, ad inscriptum minorem habet proportionem, quàm utrumq; ad circulum, multo magis ergo circumscriptum babet ad circulum minorẽ proportionem, quàm utrumq; simul ad circulum. quare circumscriptum minus est utroque simul circulo, communi ablato, erũt reliqua circum residua spacio b minora.

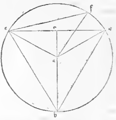
IN OCTAVVM THEOREMA.

PErpẽdiculares igitur à uertice ad a b c ductæ sunt super eas. Intelligatur enim conus seorsum, & esto uertex eius g, centrũ basis eius h, & ab h ad a iungatur h a, & a g, g h. Dico quod g a perpendicularis est ad ipsam d e. quoniam enim g h perpendicularis est ad circuli planum, & omnia secundũ eam plana. quare triangulus g h a erectus est ad basim: & stat erecta super communem sectionem planorum h a, in uno planorum ipsa d e. quare ipsa d e, super ipsam g h a planũ stat, ad angulos rectos: quare & super ipsam, g a. Similiter ostendentur illæ, quæ ad c, b, iunctæ sunt à uertice perpendiculares cũ sint super d f, e f. Sciendum aũt, quod in præmissa opportunè additum fuit hoc, oportere omnino pyramidem inscriptam habere basim æquilateram. non enim aliter à uertice ad basis latera ductæ possent esse æquales. In pręsenti non est additum, esse basim æquilateram. propterea utcunq; fuerit, idem sequetur.



IN NONVM THEOREMA.

MAiores igitur sunt trianguli a b d, b d c, triangulo a d c. Quoniam enim angulus ad d, solidus est, anguli sub a d b, b d c maiores sunt angulo sub a d c, & si à uertice ad sectionem basis in duo æqua iunxerimus d e perpendicularem super a c, erit angulus sub a d b maior angulo sub a d e. Constituatur itaq; angulo sub a d b angulus, sub a d f æqualis: & postea d f æquali ipsi d c, iungatur a f. Quoniam igitur duæ duabus æquales, & angulus angulo, & triangulus a b d triangulo a d f æqualis, qui est maior ipso a d e: quare triangulus a b d ipso a d e maior est. Similiter quoq; triãgulus a b c, ipso d e c maior. Igitur duo a d b, d b c, ipso a d b maiores sunt.

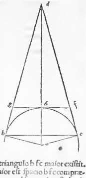


IN DECIMVM THEOREMA.

DVcatur enim g f e contingens circulum, & æquedistans ipsi a c, circumferentia a b c, in duo æqua diuisa puncto b. Quod enim si ducta æquedistans fiat ipsi a c, ostendetur ductis à centro h, his b a, h d, h c. Quoniam enim a d est æqualis ipsi d c, & d h communis est, duæ duabus æquales, et basis a h b a sib c, igitur & angulus angulo æqualis. Sunt autem anguli g b d, d b f recti. nam

à centro

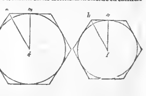
à centro ad contactum ducta est h b. quare reliquus angulus d g b, reliquo d f b æqualis est. idcirco ipsa g d, ipsi d f est æqualis: quare ipsa f g est æquedistans ipsi a c.



Circumscribentes itaque multiangula circa portionem, similiter circumferētijs circumceptis in duo æqua diuisis, ductis lineis cōtingentibus, sumemus quædam residua minora spacio h. de inscriptis quidem ostensum est in Elementis, triangulos portionibus inscriptos maiores esse dimidio portionum illarum. Idcirco possibile fuit, diuidendo in duo æqua circumferentias, & rectas ducendo, relinqui quędam residua spacio dato minora. In circumscriptis autem nondum hoc est ostensum, in Elementatione. Quoniā enim in præmissa hoc dixit, quod est ipsum collegisse per sextum Theorema, colligendum & ostēdendum quod contingens auferat triangulum maiorem dimidia ea in qua sit portione: ueluti in eadem descriptione, quod g d f triangulus maior est dimidio spacio compræhenso sub a d, d c, & circumferentia a b c. ductis enim eisdem, quoniam angulus d b f est rectus, erit ipsa d f maior ipsa b f, & ipsa b f æquatur ipsi f c. nam utraq; earum applicatur. Igitur d f maior est ipsa f c, quare triangulus d b f triangulo b f c maior existit. nam in eadem sunt altitudine. multo magis igitur maior est spacio b f c compræhenso. Eadem ratione & d b g maior est b g a. quare totum d f g, maius est dimidio spacio a d c compræhenso.

IN XIII THEOREMA.

INtelligatur itaq; circulo b circumscriptum, & inscriptum, & circulo a circūscriptum simile circumscripto ipsi b. quemadmodum autem circulo dato sit figura inscribenda polygonia, similis indescriptæ alteri circulo, à Pappo dictum fuit in Cōmentarijs elementorum. Circulo autem dato circumscribere figuram polygoniam, similem circumscriptæ alteri circulo, nondum habemus ab aliquo traditū: quod nunc dicendum est. Nam circulo b inscriptæ similis circulo a inscripta fuit, & circa a circumscriptæ similis inscripta fuit ipsi a, ueluti in tertio Theoremate. & est similis circumscriptæ ipsi b. Et quoniam figuræ rectilineæ circulis a, b circumscriptæ similes sunt, eandem habebunt proportionem, quam illæ quæ ex centris potentia. tale quidem de inscriptis ostensum est in Elementatione. de circumscriptis autem nondum. Ostendetur autem. sic intelligantur enim seorsum circumscriptæ & inscriptę figurę rectilineę, & à centris circulorum iūgantur k e, k m, l h, l n. Constat iā k m l n, ex centris esse circuorum circa circumscriptas figuras multiangulas descriptorum: & ad se inuicem haberi potentia, sicut figurę circumscriptæ. Et quoniam contenti sub k e m, l h n, sunt dimidij angulorum eorū qui sunt in polygonijs, cum ipsa



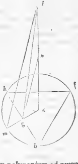
sint

sint similia, constat ipsos quoque æquales esse. At uero qui ad m, n, habentur, anguli recti sunt: quare trianguli k e m, l h n sunt æquianguli. & est sicut quadratum k e ad quadratum h l, sic circumscriptæ inter se figuræ. Ergo sicut quadratum k m, ad quadratum l n, sic figuræ circumscriptæ inter se habent. Triangulus igitur k d t, eandem proportionem habet ad rectilineam figuram circulo b circumscriptam, quam triangulus k d t, ad triangulum f r a. Quoniam enim rectilineæ figuræ circulis a, b inscriptæ se habent ad inuicem, sicuti quæ ex centro potētia, hoc est ipsa t a ad g potentia, hoc est t d ad r f longitudine: hoc est sicut triangulus k d t, ad ipsum f r l. Est autem ipsum k t d æquale circumscripto ad circulū, ad circulum a. Est igitur sicut k t d, ad circa circulum b descriptum, ita triangulus k t d, ad triangulum f r l.

Igitur permutatim prisma habet ad cylindrum minorem proportionē, quàm multangulum circulo b inscriptum ad circulum b: quod est inconueniens. nam si faciamus sicut superficies prismatis ad superficiem cylindri, sic inscriptum circulo b haberi, ad quidpiam aliud, erit id minus circulo b, ad quod inscriptum habet maiorem proportionem, quàm ad circulum. hoc est superficies prismatis ad superficiem cylindri maiorem habet proportionem, quàm inscriptum ad circulum, & ostensum est habere minorem, quod admitti non potest.

IN XIIII THEOREMA.

Ipsa c ad ipsam d maiorem proportionem habet, quàm polygonium inscriptū circulo a ad superficiem pyramidis inscriptæ cono. nam quæ ex centro circuli ad latus coni maiorem habet proportionem, quàm quæ à centro ad unum latus polygonij ducta perpendicularis, ad perpendicularem ductam à uertice coni ad latus ipsius polygonij. Intelligatur enim seorsum descriptio in rationali, & polygonium f h k inscriptum circulo a, & à centro a ad unum latus h k polygonij ducatur perpendicularis a g. Constat iam quod superficies contenta sub perimetro polygonij, & sub a g, est dupla polygonio. Intelligatur item pūctum l uerticem esse coni, et ab ipso l ad g ducta l g est perpendicularis super h k, uti ostensum est, in limmate octaui Theorematis. Quoniam igitur inscriptum polygonium est æquilaterum, & conus est æquicruris, erunt omnis ductæ ab l ad unumquodque latus polygonij perpendiculares ipsi, æquales l g. nam unaquæque earum potest quadratum axis, & quadratum a g. Et propter hoc contentum sub perimetro polygonij, & sub l g, est duplum superficiei pyramidis. quód enim sub unoquoque latere, & sub perpendiculari ducta à uertice ad latus ipsum, quæ & æqualis ipsi l g, duplum est triangulo secundum ipsam. quare sicut a g ad g l, sic polygonium ad superficiem pyramidis, sumpta cōmuni altitudine perimetri ipsius polygonij ducta g n æquedistāte ipsi m l, fiet sicut a m ad m l, sic a g ad g n. Ipsa uero a g ad g n maiorem proportionem habet, quàm ad g l. nam l g maior est ipsa g n. igitur a m ad m l, hoc est c ad d maiorem proportionem habet, quàm a g ad g l, hoc est quàm polygonium ad pyramidis superficiem.



IN XVI THEOREMA.

ET quoniam contentum ſub b a, a g, æquatur cõtento ſub b d, d f, & contento ſub a d, & ſub utraq; ſimul d f, a g, cũ d f ſit æquediſtans ipſi a g. quoniã enim d f, eſt æquediſtãs ipſi a g, eſt ſicut b a ad a g, ſic b d ad d f, atq; idcirco cõtentũ ſub extremis b a, d f, æquatur contento ſub medijs b d, a g. Verum cõtentum ſub b a, d f, æquatur contento ſub b d, d f, & cõtento ſub a d, d f, per primum Theorema libri ſecundi Stoichioſeos. Igitur contentum ſub b d, a g, æquatur contento ſub b d, d f. & contento ſub a d, d f, adiecto communi contento ſub d a, a g, erit contentum ſub b d, & a g, cum contento ſub a d, a g: quod eſt contentum ſub b a, a g, æquale erit contento ſub b d, d f, & contento ſub a d, d f, & itẽ cõtento ſub a d, a g.

IN XXIII THEOREMA.

MVltitudo autem laterũ polygonij menſuretur quaternario. Vult latera polygonij numerari quaternario, quia circulo moto circa diametrũ a c, latera omnia ferentur ſecũdum conicas ſuperficies, cum hoc ſit ſibi uſui in ſequentibus. Nam ſi latera polygonij quaternario non menſurẽtur, quamuis parilaterum fuerit, non poſſunt omnia ferri ſecundum conicas ſuperficies, uti percipi poteſt in lateribus hexagoni. duo enim ex oppoſito latera eius, inuicem æquediſtãtia, continget ferri ſecundum cylindricas ſuperficies: quod quidem ſibi non eſt uſui ad ſequentia, ut dictum eſt.

IN XXIX THEOREMA.

IPſa uero k h æqualis eſt diametro circuli a b c d. Si enim a puncto q iunxerimus ad punctum m, quo k f contingit circulum a b c d, quod ſit m. ſimiliter autem & ipſam q k: quoniam q k eſt æqualis ipſi q f, & anguli ad m ſunt recti. namq; k m, eſt æqualis ipſi m f. item ipſa f k ipſi q h eſt æqualis: igitur q m æquediſtans eſt ipſi k h. & idcirco eſt ſicut h f ad f q, ita k h ad k m. uerum h f dupla eſt ipſius q f, igitur k h dupla eſt ipſius q m, quæ eſt ex centro circuli a b c d.

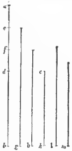
IN XXX THEOREMA.

HAbet autem diameter circuli m, ad diametrum circuli ipſius n proportionẽ, quam habet e l ad a k. nam ſi iungãtur hæ g l, c k, angulis ad k l factis rectis, & ipſa a k æquediſtans ipſi l e: triangulus enim g l e eſt æquiangulus. idcirco eſt ſicut g l ad l e, ita c k ad k a. uerum ſicut g l ad l e, ſic omnis iungentes angulos circumſcriptæ ad diametrum circuli circumſcripti. Sicut autem c k ad k a, ſic omnis iungentes angulos inſcripti ad diametrũ circuli a b c d. Sicut autem diametros ad latus, ſic diametros ad latus: quoniam & ſicut m e ad e l, ſic m a ad a k. & per æquã, ſicut omnes iungentes angulos circumſcripti ad e l, ita omnes iungentes angulos inſcripti ad a k. uerum ſicut omnes ad latus e l, ſic contentum ſub omnibus, & ſub e l: hoc eſt quadratum eius quæ ex centro m, ad quadratum e l, ipſa e l æqualem altitudinẽ ſumente. ſicut aũt omnes ad a k, ſic contentũ ſub omnibus, & ſub a k, hoc eſt quadratum eius quæ ex centro n ad quadratum a k, communem altitudinem rurſus ſumente a k. Eſt igitur ſicut quadratum eius quæ ex centro m ad quadratum e l: ita quadratum eius quæ ex centro n, ad quadratum a k. Igitur ſicut ipſa quæ ex centro m ad ipſam e l, ita quæ ex centro n, ad ipſam a k. Et permutatim, ſicut quæ ex centro m, ad eam quæ ex centro n, ita e l ad a k. Et duplæ antecedentium: ſicut diametros ipſius m ad diametrum ipſius n, ſic e l ad a k.

IN XXXII THEOREMA.

HAc autem i h ſumptæ, ſicut æqualiter ſe ſuperent ipſa k ipſam i, & ipſa i ipſam h, & ipſa h ipſam g, propoſitum eſt duabus rectis datis duas medias proportionales inuenire in Arithmetica analogia: quod idem eſt, ut ſeſe æqualiter ſuperent. Hoc autem fiet hoc modo. Sint duæ rectæ datæ a b, c k inæquales, et ablata ab ipſa a b æquali ipſi c k, quæ ſit b d, reſidua d a diuidatur in tria ęqua punctis e, f. & ponatur g æqualis ipſi e b, & h æqualis ipſi b f. Erunt itaq; g h perficientes

tes, id quod propositum est. Dico quod a b, habet ad c k maiorem proportionem quàm triplam eius quam habet a b ad g. Fiat enim sicut a b ad g, sic g ad aliam quandam l. Et quoniam qua sui parte a b superat ipsam g: ipsa g superat eadem sui parte ipsam l. pars uero ipsius a b maior est parte illa ipsius g. Igitur a b maiori excedit ipsam g, quàm ipsa g ipsam l. Tanto autem ipsa a b superat ipsam g, quanto g ipsam h. Igitur ipsa g maiori excedit ipsam h, quàm ipsam l. quare l maior est ipsa h. Si rursus fecerimus sicut g ad l, sic l ad m, multo maior erit ipsa c k. Et quoniam sunt quatuor rectæ a b, g, l, m continuę proportionales, habebit a b ad m proportionem, a b ad g triplicatam. quare a b habet ad c k maiorem proportionem, quàm a b ad g triplicatam.



IN XXXV THEOREMA.

VErum contentum sub e h, & sub e f, c d, k a ostensum est æquale esse contento sub e l, k h. In uigesimo enim secũdo Theoremate ostensum est, quod e f, c d, k a ad h k eãdem proportionem habent, quam l e ad e h. quare contentum sub extremis est æquale contento sub medijs. cõtentum autem sub e l, k h minus est quadrato h a. Cum enim contentum sub l h, h k, sit æquale quadrato h a, uti constat, coniuncta a l: propterea quod triangulus h a k factus est similis triangulo h a l. Est enim sicut l h ad b a, sic a b ad b k, & ideo contentum sub extremis æquale quadrato mediæ.

IN XXXVII THEOREMA.

HAbebit iam idem centrum cum circulo a b. Si enim a d e iũgantur rectæ ad h e l, æquales erunt, propter a quod ductæ a d ad contactus rectæ sunt perpendiculares ad aptatas, & diuiduntur adaptatæ in duo æqua ad contactum. aut quando fiat maior enim est superficies superficie: quoniam enim m f secundum superficiem conicam fertur, secundum coluri coni superficiem feretur, quæ est æqualis circulo, cuius quæ ex centro sit media proportionalis inter f m, & dimidiã utriusque simul f g, & m n. Similiter & superficiei coluri coni factæ ab m a, æqualis est circulus, cuius quæ ex centro sit media proportionalis inter rectam m a, & dimidiam utriusq; simul a b & m n. Et ipsa quidem f m maior ipsa m a, & ipsa f g ipsa a b maior, igitur media, quare & superficies superficie. Superficies igitur contenta sub f m, m g, maior est superficie contenta sub m a, n b.

IN XXXVIII THEOREMA.

SVperficies igitur figuræ k f l maior est circulo, & cætera quæ sequũtur, obscure uidetur collegisse quod dictum est. Dicatur, autem apertè hoc modo. Quoniam circulus n est æqualis superficiei figuræ. quæ autem ex centro ipsius n, potest contentum sub m h, f g: contentum autem sub m h, f g maius est cõtento sub c d, d x. nam m h ostensa est æqualis ipsi c d, & ipsa f g maior d x. Igitur circulus n maior est circulo cuius quæ ex centro potest contentum sub c d, d x. contentum autem sub c d, d x, æquatur quadrato d a. Igitur circulus n, hoc est superficies circumscripti, maior est circulo cuius quæ ex centro æqualis est ipsi d a.

IN XXXIX THEOREMA.

VErum spacia prædicta sunt ad inuicem, sicut quadratum lateris e k, ad quadratum lateris a l. Si enim iungatur d l k, cum e k sit ęquedistans ipsi a l, erit sicut e d ad d a, ita e k ad a l, Sicut autem e d ad d a, sic e f ad a c. igitur sicut e k ad

a l, ita e f ad a c, & dimidia ipsius e f ad dimidiam ipsius a c. Similiter & in omnibus tangentibus angulos polygonorum ostendetur, quod eandem inter se habeant proportionem, quam e k ad a l. Igitur sicut unum ad unum, sic omnia ad omnia. quare sicut e k ad a l, sic omnes iungentes angulos polygoni circumscripti, cum dimidia base portionis maioris, ad omnes iungentes, cum dimidia base minoris portionis. quare sicut quadratum e k, ad quadratum a l, sic contentum sub e k, & omnibus, ad contentum sub a l, & omnibus. Figuræ enim rectilineæ similes sunt dupla laterum similium proportione, & proportionis e k ad a l dupla est quadratie k ad quadratum a l proportio. Coniungentium autem angulos maioris, ad coniungentes angulos minoris dupla est ea quæ contenti sub e k, & omnibus, ad contentum sub a l, & omnibus. Similia enim & ipsa, cum habeant latera proportionalia. Et est sicut e k, ad eam quæ ex centro minoris sphæræ, sic a l ad ductam à centro ad a l perpendicularem. Si enim à centro ad contactum iungatur, recta erit ducta perpendicularis ad utrasque e k, a l. & est sicut e d ad d a, hoc est e k ad a l: sic quæ ex centro ad contactum ducta, hoc est quæ ex centro minoris sphæræ, ad eam quæ ex centro ad a l ducta est perpendicularis.

Ostensum est autem, sicut e k ad a l, sic quæ ex centro circuli m, ad eam quę ex centro circuli n. Quoniam ostensum est, sicut polygonium ad polygonium, sic circulus m ad circulum n: hoc est quadratum eius quæ ex centro m, ad quadratū eius quæ ex centro n.

IN XL THEOREMA.

Vtraq; enim proportio dupla est eius quam habet latus circumscripti polygoni ad latus inscripti. Ostensum est enim in hoc, quod est sicut quæ ex centro circuli æqualis superficiei circumscripti, ad eam quæ ex centro circuli æqualis superficiei inscripti: sic latus circumscripti polygoni, ad latus inscripti. Circuli autem inter se sunt in dupla proportione suarum semidiametrorum. Superficies igitur ad superficiem, duplam habet proportionem eam, quā habet latus ad latus.

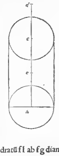
IN XLII THEOREMA.

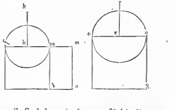
Solidum igitur circumscriptum, ad inscriptū, minorem habet proportionē, quam solidum frustum ad conum h. Si enim circumscriptum solidum ad inscriptum minorem habet, quàm triplicatam proportionē, eam quam habet b ad f, & ipsa d habet ad e minorem, quam eam triplicatam. circumscriptum igitur habet ad inscriptum minorem proportionem, quàm d ad e, & d habet ad e minorem proportionem, quàm frustum ad conum. Circumscriptum ergo ad inscriptum, minorem habet quàm frustum ad conum.

EVTOCII ASCALONITAE COMMENTARIVM, in primum traditionis Archimedis de Sphæra & cylindro, ascriptum Milesio mechanico Isidoro præceptori nostro, finit.

EVTOCII ASCALONITAE COMMENTARIVM IN SECVNDVM *de Sphæra & cylindro.*

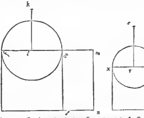
QVVM ea quæ in primo libro continentur Theoremata, satis sint à nobis explicata: consequens inde accedit, ut eodem modo his quę in secundo libro theoremata habentur explicandis, studium adhibeamus. Dicit in primo Theoremate: Sumatur dato cono, uel cylindro, sesquialter cylindrus. Hoc autem dupliciter fieri potest, aut seruata in ambobus base eadem, aut altitudine. Et ut apertius fiat quod dictū est, intelligatur conus, aut cylindrus, cuius basis sit circulus a, altitudo autē a c, & sit inuenire eius sesquialterum cylindrum. Supponatur autem prius cylindrus a c, & educatur à c altitudo cylindri, & ponatur c d dimidia ipsius a c. igitur a d erit sesquialtera ipsius a c. Si iam intelligamus cylindrum habentē basem circulum a, altitudinem uero rectam a d, ipse erit sesquialter cylindri a c propositi. nam coni & cylindri in eadem base constituti, habent se ad inuicem, sicut eorum altitudines. Si autem conus sit a c, diuisa a c in duo æqua puncto e: si rursus intelligatur cylindrus, qui basem habeat circulum a, altitudinem autem a e, erit sesquialter coni a c. Cylindrus enim qui basim habeat circulum a, & altitudinem a c rectam, triplus est coni a c, & duplus cylindri a e. quare constat cylindrum a e sesquialterum esse coni a c: cuius eadē base saluata, & in proposito & in sumpto efficietur problema. Licet autē idem fieri, & si basim contigerit diuersam esse, axe manente eodem. Esto enim rursus conus, aut cylindrus, cuius basis circulus f g, altitudo h k recta, cuius opus est inuenire cylindrū sesquialterū, qui habeat altitudinē æqualem ipsi h k, Describatur quadratū f l ab f g diametro circuli, & producta f g ponatur g m dimidia ipsius, & cōpleatur parallelogrāmū f n. Erit igitur f n sesquialterum ipsi f l, & ipsa f m ipsi f g. Cōstituatur enim parallelogrāmo f n, æquale quadratum x p: & circa diametrum, unum laterum eius x o describatur circulus. Est itaq; x o sesquialter ipsi f g. nam circuli sic se habēt, sicut quadrata suarum diametrorū.

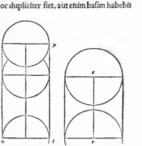




Item si intelligatur cylindrus, qui basim babeat circulum x o, & altitudinem æqualem ipsi h k, erit sesquialter cylindri babentis basim circulum f g, altitudinem uero h k. Si autem sit conus, idem facientes, & constituentes quadratum x p, æquale tertiæ parti perallelogrāmi, & describētes circa unū latus eius x o circulum,

intellexerimus ex ipso cylindrum habentem altitudinem h k: habebimus eum sesquialterum coni propositi. Quoniam enim parallelogrãmum f n est triplum quadrati x p, & sesquialterum ipsi f l, erit f l duplum ipsi x p. quare & circulus circulo duplus, & cylindrus cylindro. Verũ cylindrus habens basem circulum f g, altitudinem uero h k, triplus est cono circa eã dem basim & altitudinẽ cõstituto. Quare cylindrus basim habens circulum x o, altitudinem uero æqualem h k, sesquialter est proposito cono. Si autem oporteat neq; basem, neque altitudinem esse eandem, rursus hoc dupliciter fiet, aut enim basim habebit æqualem datæ, aut axem cylindrus propositus. Esto prius basis data circulus x o. Et opus esto cylindrum inuenire sesquialterum dato cono, aut cylindro à base x o, id est qui basim habeat x o. Sumatur ut prædictum est, cylindrus u y sesquialter cono, aut cylindro dato, eandem basim habens cum proposito: & fiat sicut quadratũ x o ad quadratum t u, sic altitudo u y ad ipsam r s. Erit igitur cylindrus ab x o base habẽs altitudinem r s, ęqualis u y. nã bases se habent mutuò ut altitudines, & factũ erit imperatũ. Si autem basis non sit data, sed axis, eadẽ ratione prolato u y, fiet id quod proponit.





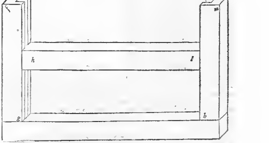
IN COMPOSITIONEM PRIMI.

HOc sumpto, quòniam ad eius resolutionem proueniũt ea quæ in problemate sunt, resolutiõe ad hoc terminata, ut oporteat duab. rectis datis duas eis medias proportionales inuenire. dixit in cõpositione, inueniãtur. Harum aũt inuentionem ab eo traditam nusquã adhuc penitus inuenimus. multorum autem clarorum uirorum scripta in manus inciderunt, in quibus hoc problema tractatum inuenimus, ex quib. solam Eudoxi Cnidij descriptionẽ repudiauimus. Nam in prooemijs quidem dixit se per lineas curuas eam inuenisse. uerum in demonstratione, præter id quod non curuis lineis utatur, uerum & disiunctam proportionalitatem constituens, ea uti continua utitur, quod sanè absurdum est. Sed quid dico de Eudoxo, uerumetiam de quibusdã qui mediocriter in Geometria uersati sunt. Vt autem eorum quæ ad nos peruenerunt hominum sententiæ planè haberi possint, eorum uniuscuiusq; inueniendi modum istic deinceps describemus.

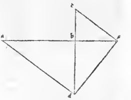
MODVS PLATONIS.

DVabus rectis datis, duas rectas medias illis proportionales in continua proportionalitate inuenire. Sint duæ rectæ datæ a b, b c inuicem perpendiculares-

tes, quibus opus sit duas medias proportionales inuenire. Producantur in directũ ad d, e: & paretur angulus rectus sub f g h: & in uno eius crure, puta f g, moueatur regula k l, in quodam constituto in f g, ita ut permaneat æquedistans



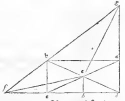
ipsi g h. Fiet autem hoc, si intelligamus alteram regulam confixam ipsi h g, æquedistantem ipsi f g, puta in Superioribus enim ipsarum f g, h m, superficiebus firmatis assialibus, & coaptatis ipsi k l, ad dictos erit tunc motus ipsius k, semper æquedistãs ipsi g h. His ita paratis, applicetur unum crus anguli quodcunq;, puta g h, cõtingẽs c: & regula attingat a, ita uti in descriptione habetur. fiat angulus rectus, portionem habens, puta c d e, & regula k l positionem habeat, puta e a. nam his ita confectis, propositum effectum est. Cum enim anguli ad d e, sint recti, erit sicut c b ad b d, ita b d ad b e, & e b ad b a.



MODVS HERONIS IN MECHANICIS INTRO-
ductionibus, & in telis fabricandis.

Sint duæ rectæ datæ a b, b c: quibus opus sit duas medias proportionales cõstituere. disponantur ita, ut ambiant angulum rectum a d b, & compleatur b d parallelogrammũ, & iungantur a c, b d. constat eas æquales esse, & se mutuò per æqualia secare puncto e. nam circulus circa alteram earum descriptus. per terminos alterius transibit, cum perallelogrammũ sit orthogoniũ. producantur hæ d c, d a usque ad f g, & intelligatur regula, puta f b g. mota circa quendam clauum fixum in b: & moueatur, donec abscidantur æquales ab e ductæ: hoc est e g, e f & intel-

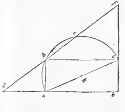
intelligatur sectio positionem habere, puta f b g, factis e f, e g æqualibus, ut dictũ est. Ducatur ab e perpendicularis ad c d, puta e h, constat eam secare ipsam c d in duo æqua. quoniam itaque c d, in duo æqua secatur puncto b, & additur ei c f, fit ut contentum sub d f, c f, cum quadrato c h, æquetur quadrato h f, quadrato e h communi adiecto erit cõtentum sub d f, f c: cum quadratis harũ c h, h e, æquale quadratis f h, h e. quadratis autem f h, h e æquatur quadratum f e. Igitur contentũ sub d f, f c, cum quadrato c e, æquatur quadrato e f. Similiter autem ostendetur, quod cõtentum sub d g, g a, cũ quadrato a e, æquatũ quadrato e g, & a e est æqualis ipsi e c, & ipsa g e ipsi e f. Igitur contentum sub



d f, f c, æquatur contento sub d g, g a. Si aũt contentum sub extremis fuerit æquale contento sub medijs, erũt quatuor lineæ illæ proportionales. Est igitur sicut f d ad d g, ita a g ad c f. Verum sicut f d ad d g, sic f c ad c b, & b a ad a g. nam in triangulo f d g ducta est c b, æquedistans ipsi d g, item a b æquedistans ipsi d f. Sicut ergo b a ad a g, ita a g ad c f, & c f ad c b. Igitur inter a b, b c sunt factæ mediæ proportionales a g, c f.

MODVS PHILONIS BYSANTII.

Sint duæ rectæ datæ a b, b c, quibus opus sit duas medias proportionales inuenire. Disponantur ita ut ambiant angulum rectum a d b, & iuncta a c describatur super eam semicirculus a b e c: & ducatur a d secundum angulos rectos ad ipsam b a, & item c f ad ipsam b c. & applicetur regula mobilis ad b, secans a d, c f, & moueatur circa b, donec quæ ab ipso b ad ipsum d sit æqualis ei quæ ab e in f: hoc est, ei quæ est inter circumferentiam circuli, & ipsam c f. Intelligatũ itaque regula habere positionem, puta quam habet d b, e f d b æquali ipsi e f, ut dictum est. Dico itaque, a d, c f esse medias proportionales inter a b, b c. Intelliganturenim d a, f c protractæ & concurrentes in h. Constat itaque, cum b a, f h sint æquedistãtes, quod angulus ad h est rectus, & circulus a e c perfectus transibit per h. Quoniam igitur d b est æqualis ipsi e f, igitur contentum sub



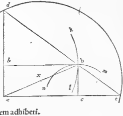
e d, d b est æquale contento sub b f, f e. Verum contentum sub e d, d b æquatur contento sub h d, d a. nam utrũque est æquale quadrato cõtingentis à puncto d ductæ. Contentum autem sub b f, f e, æquatur contento sub h f, f c. nam utrumque similiter æquatur quadrato contingentis ductæ à puncto f. quare contentum sub h d, d a, æquatur contento sub h f, f c. Idcirco sicut d h ad h f, sic c f ad d a. Verum sicut b d ad h f, sic b c ad c f, & d a ad a b. nam in triangulo d h f, ducta est b c æquedistans ipsi d b, item b a æquedistans ipsi f h. Est igitur sicut b c ad c f, ita c f ad d a, & d a ad a b: quod erat propositum. Sciendũ est autem, quod huiusmodi apparatus est idem ferè cum illo superiori Heronis. nam parallelogramum b h, idem cũ eo quod sumptum fuit in apparatu Heronis, & latera producta h a, h c eadem, &

regu-

regula mota ad b. Hoc solum differunt, quod in illo quidem mouebatur regula donec ductæ à sectione ipsius a c, per æqualia, puta ab ipso k separarentur æquales coincidentes ad h d, h f, puta k d, k f. In hac uero mouetur, donec d b fit æqualis e f. in utraq; autem figuratione idem sequitur. Quod autem nunc dictum est, facilius in usu ponitur. nam ipsæ d b, e f seruabūtur æquales, diuisa d f regula per æqualia & continua. hoc autem multo facilius est, quàm circino tentare eas quæ ab ipso k ad d & f ductæ fuerint, æquales facere.

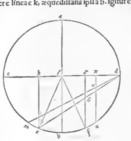
MODVS APOLLONII.

Sint duæ rectæ, quæ a b, a c: quib. opus sit duas medias proportionales inueni re, quæ ita aptentur, ut ambiāt angulum rectū ad a. & centro b, interuallo a c describatur circumferētia circuli k h l. item centro c, interuallo a b, describatur circumferentia circuli m h n, quæ secet ipsam k h l in puncto h. & iungatur h a, h b, h c. Igit̄ b a c h est parallelogrāmū, cuius est h a diametros. diuidatur h a, in duo æqua puncto x, & centro x describatur circulus secans ipsas a b, a c, productas in punctis d e: ita ut puncta d e sint in eadem linea recta cum ipso h. quod utiq; fiet, cum regula mota circa h, & secāte ipsas a d, a e, & diducta, donec ductæ à puncto x ad puncta d e sint æquales. Hoc enim facto habebimus quæsitum. Ita utique figuratio eadem est cum illa Heronis & Philonis, & constat eandem demonstrationem adhiberi.



MODVS DIOCLIS IN LIBRO DE PIryis pulcherrimus.

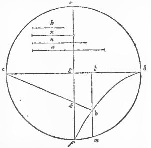
IN circulo ducantur duæ diametri ad angulos rectos a b, c d, & separentur duæ circumferentiæ æquales utrinq; ad b, hæ e b, b f. & per f ducatur æquedistās ipsi a b, quæ sit f g, & iungatur d e. Dico quod inter c g, g h sint duæ mediæ proportionales hæ f g, g d. Ducatur enim per e linea e k, æquedistans ipsi a b. igitur e k æqualis est ipsi f g, & k c ipsi g d. Hoc autem constat, ductis à puncto l rectis ad e f. nā anguli c l e, f l d sunt equales. & rectí ad k, g. igitur omnia omnibus, propterea quod l e æquatur ipsi l f. igitur reliqua c k est æqualis ipsi g d. Quoniam igitur est sicut d k ad k e, sic d g ad g h. item sicut d k ad k e, ita e k ad k c. nā e k est media proportionalis harum d k, k c. Si cut ergo d k ad k e, ita e k ad k c: & sic d g ad g h. & d k est æqualis ipsi c g, & ipsa e k ipsi f g, ipsa k c ipsi g d. Igitur sicut c g ad g f, ita g f ad g d, & d g ad g h. Si item utrinq; ex b sumantur æquales circumferentiæ hæ m b, b n, & per n ducatur n x æquedistans ipsi a b, & iungatur d m, erūt rursus inter c x, x o mediæ proportionales hæ n x, x d. Pluribus itaq; hoc



Cc pacto

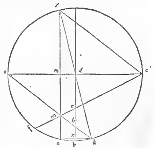
pacto æquedistantibus continuis, productis inter b d, & circumferentijs depræhensis ab illis uersus b, ponendo alias æquales uersus c, & ad puncta facta iungendo rectas lineas à puncto d, ita ut similiter fiant ipsis d e, d m: diuidentur parallelæ quæ sunt inter b d secundum quædam puncta, in proposita descriptione, puncta o h: quibus regula applicata iungentes rectas, habebimus quandam lineam in circulo descriptam. in qua si sumatur quodcunque punctum, & per ipsum ducatur æquedistans ipsi l b, erunt ipsa ducta, & illa quæ abscinditur ab illa, ex diametro uersus d, mediæ proportionales, inter lineam ab eadem ex diametro uersus c abscissam, & partem eius contentam à puncto in illa signato ad diametrum.

Istis ita constitutis, sint duæ rectæ a, b, quibus opus sit duas medias proportionales inuenire: & sit circulus, in quo duę diametri se secent ad angulos rectos c d, e f. & describatur in ipso d h f linea, per puncta continua, uti prædictum est, & fiat sicut a ad b, ita c g ad g k: & iūcta c k, & producta diuidat lineam puncto h, & per h ducatur l m, æquedistans ipsi e f. per præscripta igitur inter c l, l h medię sunt proportiōales hæ m l l d Et quoniam est sicut c l ad l h, ita c g ad g k. Sicut autem c g ad g k, ita a ad b. Si autem in eadem proportione ipsarum c l, l m, l d, l h cōstituamus inter a b, puta istas n, x, illæ sumptæ erunt inter a b mediæ proportionales: quod erat inueniendum.



MODVS PAPPI IN MECHANICIS *introductionibus*.

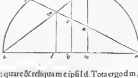
PRoposuit Pappus inuenire cubū, qui haberet ad cubum datum proportionem datā: & si quæ ad huiusmodi proportionem demonstrandam requiruntur, inuenerimus, cōstat nos inuenisse propositū. Duabus enim rectis datis, si ex illis duabus, quæ debent esse mediæ proportionales, secundam inuenerimus, tertiam quoque deinde facile deprehendemus. Describatur itaque, uti dicit ipse, semicirculus a b c, & à centro d ducatur d b ad angulos rectos, & moueatur regula circa a punctum, ita ut unus terminus eius quodam clauulo circumponatur pūcto a. Esto reliqua pars eius uti circa centrū, circa clauulum moueatur inter b c. His constitutis, proponatur duos cubos



cubos inuenire, habentes inter se datam proportionem, & fiat proportio b d ad d e, qualis est proportio data & iuncta c e. producatur ad f. adducatur iam regula inter b c, donec pars eius intercepta inter rectas f e, e b, æqualis sit rectę quæ est inter rectam b e, & circumferentiam b k c. Hoc enim tentantes, & regulam dimouentes, facile assequemur. Fiat iam, et positionē habeat, puta a k, ita ut g h, & h k ę qua les sint. Dico quod cubus ab ipsa b d, ad cubum ab ipsa d h, proportionem habet propositam: hoc est eam quæ b d ad d e. Intelligatur circulus perfectus, & iuncta k d protendatur ad l, & iungatur l g, cui est æquedistans ipsa b d, quia k h est æqualis ipsi g h, & ipsa k d ipsi d l. iungatur ipsa a l, & l c. Quoniam enim angulus a l c est rectus, quia est in semirculo, & l m est perpendicularis, erit igitur sicut quadratum l m ad quadratum m a, hoc est c m ad m a, sic quadratum a m ad quadratum m g. Proportione igitur ipsius a m ad m g posita cōmuni, erit proportio cōposita ex proportione c m ad m a, & ex proportione a m ad m g: hoc est proportio c m ad m g, eadem est compositæ ex proportione quadrati a m ad quadratum m g, & ex proportione a m ad m g, quæ est eadem ei quam habet cubus ab a m ad cubum ab m g. Igitur proportio c m ad m g eadem est ei, quā habet cubus ab a m ad cubum ab m g. Verum sicut c m ad m g, sic c d ad d e. sicut autem a m ad m g, ita a d ad d h. igitur sicut b d ad d e, hoc est sicut data proportio, ita cubus ex b d ad cubum ex d h. Eatum igitur quas opus erat medias proportionales inuenire, secunda fuit d h. & si fecerimus sicut b d ad d h, ita d h ad aliam quandam, erit tertia inuenta. Est autem aduertēdum, quod hæc descriptio eadem est ei quam Diocles suprà tradidit: hoc solum differens ab ea, quod ille solum lineam quādam per continua puncta describit intermedia ipsi a b, in qua sumebat g producta c e, & diuidente dictam lineam. In hoc autem datur g, per regulam a k, motam circa a. quod enim g sit idem, siue sumatur ut hic per regulam motam, siue sicut Diocles, ita discernus: productam g ad n, iūgatur k n. Quoniam igitur k h est æqualis ipsi h g, & g n est æquedistans ipsi h b, & k x æqualis est ipsi x n, & ipsa x b communis est & ad angulos rectos. nam k n in duo æqua diuiditur, & ad angulos rectos ab ea quæ per centrum. Igitur basis æqualis basi: idcirco & circumferentia k b, ipsi b n. Igitur g est id quod est in linea Dioclis, & demonstratio eadem. Dixit enim Diocles, quod sicut c m ad m n, ita m n ad m a, & m a ad m g. Est autem m n æqualis ipsi m l. nam diametros secat eam ad angulos rectos. Est igitur sicut c m ad m l, sic l m ad m a, & m a ad m g. Igitur harū c m, m g, mediæ proportionales sunt l m, m a. Verum sicut c m ad m g, ita c d ad d e: sicut autē c m ad m l, ita a m ad m g: hoc est c d ad d h. & duarum mediatum, harum c d, d e secunda est d h, quàm Pappus efficiebat.

MODVS SPORI.

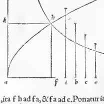
Sint duæ rectæ datæ a b, b c: quibus opus est duas medias proportionales inuenire. Ducatur ex b ipsa d b e, ad angulos rectos ad a b: & centro b, interuallo autem b a describatur semicirculus d a e: & ab e ad c iūgatur recta, & ducatur ad f: & ducatur ab ipso d recta quædam ita, ut g h sit æqualis ipsi h k. Hoc enim fieri potest, & ducantur à punctis g, k, perpendiculares ad d e, istæ g l, k m. quoniā igiť est sicut k b ad h g, ita m b ad b l, & ipsa k h est æqualis ipsi h g, igiť ipsa m b est æqualis ipsi b l: quare & reliqua m e ipsi l d. Tota ergo d m, est



æqualis ipsi l c. et propter hoc sicut m d ad d l, ita l e ad m e. Verum sicut m d ad d l, ita k m ad g l. Sicut autem l e ad m e, ita g l ad m n. Rursus quoniam sicut d m ad m k, ita k m ad m e. Igitur sicut d m ad m e, ita quadratum d b, hoc est quadratum a b ad quadratum h b. nam d b est æqualis ipsi a b Rursus quoniam sicut m d ad d b, ita l e ad e b. item sicut m d ad d b, ita k m ad h b. Sicut autem l e ad e b, ita g l ad c b. Igitur sicut k m ad h b, ita g l ad c b. & permutatim, sicut k m ad g l, ita h b ad c b. Verum sicut k m ad g l, ita m d ad d l hoc est d m ad m e: hoc est, quadratum a b ad quadratum h b. Igitur sicut quadratum a b ad quadratum h b, ita b h ad b c. Sumatur harum h b, b c media proportionalis hæc, x. Quoniam igitur sicut quadratum a b ad quadratum b h, ita h b ad b c. Verum quadratum a b ad quadratum h b, habet proportionem a b ad b h duplicatam, & h b ad b c. habet proportionē h b ad x duplicatam. Igitur sicut a b ad b h, ita b h ad x. Verum sicut a b ad x, ita x ad b c. Igitur a b ad b h, sicut b h ad ad x, & x ad b c. Cōstat autem, quod hæc quoque eadem est illi quæ à Diocle dicta fuit, & Pappo.

MODVS MENECHMI.

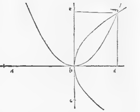
Sint duæ lineæ rectæ datæ a e, quibus iubemur duas medias proportionales inuenire. Esto hoc factum, & sint illæ b c. & ponatur recta positione hæc d g terminata ad d. & uersus d sumatur d f, æqualis ipsi c: & ducatur ad angulos rectos h f, quæ ponatur æqualis ipsi b. Quoniā igitur tres lineæ a b c rectæ sunt proportionales, contentū sub a c æquatur quadrato b. Contentū igitur d data, & c, hoc est a f, æquat̃ quadrato b, hoc est quadrato f h. quoniā rectāguli coni, in parabole. igitur punctum h, per punctum a d, secundum primam descripta ducātur æquedistantes h k, a k. & quoniam contentum sub b c est datum, cum sit æquale contento sub d e: contentum igitur sub k h, h f datum, quoniam hyperbole, igitur ipsum h in non coincidentibus cum his k a, a f. igitur h datum: quare & f datum. Componetur autem sic. Sint duæ rectæ datæ hæ d e, & positione ipsa a g terminata ad a, & describatur per a sectio rectanguli coni, cuius axis est a g, & rectū speciei latus d. quæ autem ductæ sint ad ipsam a g ad angulos rectos possint spacia ipsi d, apposita latitudinē habētia abscissas ab eis uersus punctum a, describatur & esto a h, et erecta a k. & in non coincidētibus cum his k a, a f, describatur sectio obtusianguli coni: à qua ductę ęquedistātes ipsis k a, a f. facient spaciū ęquale spacio cōtēto sub d e. Scindet aūt sectionem rectanguli coni diuidat eam in puncto h, & ducātur h k, h f perpendiculares. Quoniam igitur quadratum f h æquatur contento sub d a, a f, erit sicut d ad f b, ita f a ad e. Verum sicut d ad f h, ita f h ad f a, & f a ad e. Ponatur itaq; g b æqualis ipsi f h, & c æqualis ipsi a f. erit igitur sicut d ad b, ita b ad c, & c ad e. igitur d b c e sunt continuę proportionales, quod erat inueniendū.



Aliter idem.

Sint duæ rectæ datæ ambientes angulum rectum a b, b c: & fiant earū mediæ proportionales d b, b e, ita ut quæ c b ad b d, ea sit b d ad b e, & b e ad b a: & ducantur ad angulos rectos d f, e f. Quoniam igitur est sicut c b ad d b, ita b d ad b e. Contentum igitur sub c b b e, hoc est cōtentum sub data, & b e, æquatur quadrato b d: hoc est ipsius e f. Quoniam igitur contentum sub data, & b e, æquatur quadrato e f, igitur f applicatur sectioni rectanguli coni circa axem b e constitutæ. Rursus, quoniam sicut a b ad b e, ita b e ad b d. contentum igitur sub a b, b d, hoc est sub da-

sub data, & b d æquat̃ quadrato c b, hoc est ipsius e f. Igit̃ f applicat̃ sectioni rectã guli coni circa axem b d constitutę. Erat etiam applicatum alteri datæ, circa b f constitutæ. igit̃ pũctum f datũ, et perpendiculares f d, f e. igitur pũcta d e data. Cõponetur aũt sic, sint duæ rectæ datæ angulũ rectũ ambientes a b, b c: & educantur ab ipso b in infinitũ, et describatur circa axem b e sectio coni rectanguli. Rursus circa axem d b describatur sectio rectãguli coni, ita ut ductæ possint iuxta ipsam a b, sectiones ductæ se mutuò secabunt. secent se in puncto f,

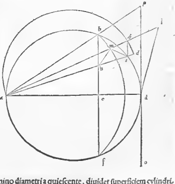


& ab ipso f ducantur perpendiculares f d, f e. Quoniam igitur in sectione rectanguli coni ducta est f e, hoc est d b, cõtentum sub c b, b e erit æquale quadrato b d. Est igitur sicut c b ad b d, ita b d ad b e. Rursus quoniam f d ducta est in sectione rectanguli coni, hoc est ipsa b e: contentum igitur sub d b, b a, est æquale quadrato e b. Est igitur sicut b d ad b e, ita b e ad b a. Verum sicut d b ad b e, ita c b ad b d, est sicut c b ad b d, ita b d ad b e, & e b ad b a, quod erat inueniendum.

Descripta est autem sectio rectanguli coni cum diabeto, inuento à Milesio mechanico Isidoro magistro nostro, cum sit ab eo scriptum in Commentum camaricarum Heronis sibi factum. Diabetum instrumentum est simile elemento græco λ.

INVENTIO ARCHITAE, QVEMADMODVM *Eudemus tradit.*

SVnto duæ rectæ datæ a d, c: quibus oporteat duas medias proportionales inuenire. Describat̃ circa maiorem, puta a d, circulus a b d f, & applicetur a b ipsi c ęqualis, quę educta concurrat in puncto p, cum ea quæ contingit circulum in pũcto d. Ducatur autem b e f æquedistans ipsi p d o, & intelligatur semicylindrus erectus super a b d semicirculo, et super a d semicirculus erectus in parallelogrã mo cylindri descriptus. Hic itaq; semicirculus circumductus,

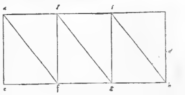


ab ipso d in ipsum b, termino diametri a quiescente, diuidet superficiem cylindri-

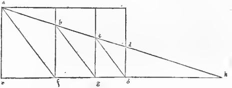
cam in circumuolutione, et in ea describet lineam quandam. Rursus si quiescente a d triangulus a p d circumferatur contrario semicirculi motu, faciet superficiē conicam. recta itaque a d circumuoluta concurrat cum linea cylindrica in quodam puncto, simul autem & ipsum b describet semicirculum in superficie coni. habeat iam positionem in loco cōcursus linearum semicirculus motus, hanc puta d k a, & triangulus in contrariū motus habeat hanc d l a. punctum dicti concursus esto k. Est item semicirculus descriptus per b, iste b m f: & esto b f communis sectio eius, & circuli b d f a, & ducatur ab ipso k ad planum semicirculi b d a perpendicularis: cadet itaq; ipsa in circumferentia circuli, cum cylindrus sit erectus. incidat, & sit k i: & ducta ab i ad a, incidat in b f in puncto h, & ipsa a l incidat semicirculo b m f in puncto m. iungantur autem k d, m i, m h. quoniam igitur uterque semicirculorum d k a, b m f, est erectus super subiectum planum, erit eorum communis sectio m h, ad rectos angulos super plano circuli. quare & ad ipsam b f erecta est ipsa m h. Igitur contentum sub b h, h f, hoc est sub h a, h i, est æquale quadrato m h. Igitur triangulus a m i, similis est utriq; horum m i h, m a h: & angulus i m a rectus, item angulus d k a rectus: igitur k d, m i, sunt æquedistantes. & erit sicut d a ad a k, hoc est k a ad a i, ita i a ad a m, propter triangulorum similitudinem. Igitur quatuor hæ d a, a k, a i, a m, sunt consequenter proportionales: & a m est æqualis ipsi c, quia & ipsi a b. Duabus igitur rectis a d c datis, duæ a k, a i mediæ proportionales inuentæ sunt.

MODVS ERATOSTHENIS.

REgi Ptolemæo Eratosthenes lætari. Vetustissimorū aiunt tragœdum quendam introduxisse Minoa, sepulchrum Glauco extruentem. Cum autem audisset illud centum undiq; pedum ambitu claudi, dixisse, Paruum utiq;. inde subiecisse, Regij ciron sepulchri duplū esto. Videbitur errasse. lateribus enim duplatis, planum fit quadruplum, et solidum octuduplum. Quærebatur autem iam à Geometris, quo'nā pacto solidum datū sub pristina figura ad duplum augeri posset. et appellabāt hoc problema, cubi duplatio. Supponētes enim cubum, tentabant ipsum duplum reddere. Cunctis itaq; multo tempore dubitantibus, Hippocrates Chius primus inspexit, quod si duabus lineis rectis, quarum maior esset minoris dupla, duę mediæ proportionales inueniuntur, tunc duplare posse cubum. quare dubium eius in nō minus dubium uersum est. Tempore aūt quodā pòst ferunt Delios iussos per oraculum, duplare quandam aram, in hanc difficultatem incidisse. implorantes autem eos qui tunc apud Platonem erant in Academia Geometras, postulare, ut quæsitum ab eis inueniretur. Cum aūt illi diligenter sibi ipsis insisterent, & scrutarentur, quo pacto duabus rectis datis duas medias proportionales instituerent, Archita Tarentinus fertur eas per semicylindros inuenisse, Eudoxus autem per lineas quæ curuæ appellantur. Accidit autem omnibus his descripsisse demonstratiuè, uerum non posse, quæ inūenerant, manu efficere, & in usum deducere, prætérquā in breuitate Menerbmi:



mi: & hæc difficulter. Excogitata autem est à nobis quædam instrumenti structura facilis, per quam inuenire poterimus non solum duabus datis rectis duas medias, uerum quodcunq; quis iusserit. quo inuento, poterimus uniuersaliter solidum quodcunq; datum æquedistantibus lateribus contentum, in cubum reducere, aut ex altera in alteram figuram transformare, & similem ei facere, & ipsum augere retinendo similitudinem. quare & aras & templa poterimus, & humidorum & siccocum mensuras, puta medimnarū metrum in cubum reuocare, & per huius latus dimetiri uasa horum receptiua, quantum capere possint. Vtile autem est excogitatum istud, his qui student impulsiua & expulsiua lapidum instrumēta augere. nam oportet omnia illa proportionaliter augeri: & crassitudines, & magnitudines, & perforationes, & chienicidas, & neruos iniectos, si debeat & statuatur proportionaliter augeri. Hæc autem absq; mediarum inuentione fieri non possunt, Demonstrationem autem & structuram dicti instrumenn tibi descri-



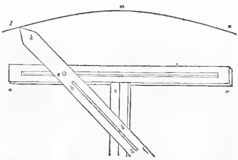
psi. Denturitaq; duæ rectæ a e, d h inæquales: quibus duas medias proportionales inuenire oporteat. & statuamus a e ad angulos rectos super aliquam rectam, puta e h: & super e h cōstituantur tria parallelogramma deinceps a f, f i, i h. & ducantur diametri in eis a f, l g, i h, quæ erunt æquedistantes. manente autem parallelogrammo medio f i, compellatur a f supra medium, & i h infra, ueluti in secunda figura, donec puncta a b c d fiant in una linea recta. & ducatur per puncta a b c d linea recta, quæ coincidat cū e h, educta ad k. Erit itaq; sicut a k ad k b, in parallelis a e, f b, ita e k ad k f. in parallelis autem a f b g, sicut f k ad k g. Sicut igitur a k ad k b, ita e k ad k f, & k f ad f g. Rursus quoniam b k ad k c in parallelis b f, c g, sicut f g ad k g: in parallelis autē b g, c h, sicut g k ad k h. Sicut ergo b k ad k c, ita f k ad k g, & g k ad k h. Verum sicut f k ad k g, ita e k ad k f. Igitur sicut e k ad k f, ita f k ad k g, & k g ad k h. Verum sicut e k ad k f, ita a e ad b f. Sicut autem f k ad k g, ita b f ad c g, & c g ad d h. Inuentæ igitur sunt duabus a e, d h, duæ mediæ b f, c g proportionales.

Hæc igitur in superficiebus Geometricis demonstrata sunt. Vt autem & instrumento possimus duas medias sumere, fabricetur plinthus ligneus, uel eburneus, uel æreus, habens tres tabellas æquales, & quàm leuissimas, quarum media confixa sit, reliquæ duæ pelli possint magnitudinibus & commensurationibus omnes sibijpsis consentiētes. Demōstratio autem similiter perficietur. Ad lineas uero certius sumendas, arte incumbendum est, ut inducta tabellarum omnia retineantur parallela, & non biantia, et regulariter inuicem coaptata. In anathemate autem est instrumentum ęreum, & aptatum est sub coronam ipsius colūnæ,

næ adnexum plumbo, sub ipso est demonstratio compendiosius expressa, & figura, post ipsum uero superscriptio epigramma. Hęc autem tibi scribuntur, ut habeas ea sicut in anathemate habentur. Duarũ aũt figurarum secũda est in columna descripta: duabus rectis datis, duas medias proportionales in proportione continua inuenire. Dentur duæ a e, d h. conduco itaq; tabellas in organo, donec pũcta a b c d sint in recta una. intelligantur sicut se habent in secunda figura. Est igitur sicut a k ad k b, in parallelis a e, b f, ita e k ad k f. in ipsis uero a f b g, ita f k ad k g. igitur sicut e k ad k f, ita k f ad k g. Sicut autem illę inter se, ita a e ad b f, & b f ad c g. Similiter autem ostendemus, quod sicut f b ad c g, ita c g ad d h. Igitur istæ a e, b f, c g, d h sunt proportionales. Igitur duabus datis, duę mediæ inuentæ sunt. Quod si datæ nõ sint æquales ipsis a e d h, facientes illis proportionales has a e, d h, harũ medias sumemus, & inducemus ad illas, & fecerimus illud quod imperatũ fuit. Si autem plures medias iubeamur inuenire, ubi tabellas cõstituerimus in instrumento una plures, quàm sint mediæ inueniendæ, idem consequemur, & demonstratio prorsus est eadem.

MODVS NICOMEDIS IN LIBRO *de lineis conchoidibus.*

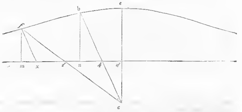
DEscribit Nicomedes in lib. sibi superscripto de Conchoidibus, talem instrumenti structuram, quo eadem necessitas suppletur: in quo uir iste uidetur supra modum gloriari, multumq; inuentis Eratosthenis irridere, ueluti quæ fieri non possint, neq; imaginari, ac simul Geometrica doctrina priuata sint. Hãc uero partim quòd explete quæ circa hoc problema elaborata sunt, tradidit: partim, ut eius ad Eratosthenem cõparatio haberi possit, inter ista cõscripsimus, quæ sic ferè describitur. Imaginari oportet regulas duas ad angulos rectos inuicem cõ-



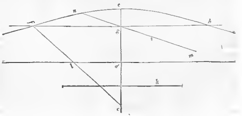
pactas, ita ut una sit earum superficies: ueluti sunt a b, c d, & in a b assialem, in quem percurrere possit in ipsa uero c d, ad partem d, ad rectam quæ diuidit latitudinem eius, cylindrulus configatur regulæ, & parum excedat superficiẽ superiorem regulæ. alterã item regulam, puta e f post breue quoddam interuallũ ad terminum f, insecturam habentem, puta g h, quæ possit cylindrulo d inserto circum

circumuerti. ad ipsum e uero quæ incumbat in axem confixum percurrenti in solmo assiali existente in regula a b. insita itaq; regula e f per insecturã g h, in cylindrulo ad f statuto, & per e in axe confixo ipsi chelonario, si quis comprendens k extremum regulæ ipsam mouerit in partes a, deinde in partes d, punctum e semper in regula a b continebitur. ac uero g h in sectura mouebit, uersus cylindrulum d, semper recta regulæ e f media in motu intellecta secũdum axem qui est ad cylindrum d, & ipsa c k supereminentia regulæ semper manente eadem. Si itaq; intelligamus ad k graphium quoddam attingens pauimentum, describet quædã linea qualis est l m n, quã Nicomedes appellat conchilem primã lineam. & interuallum quidẽ eius lineæ est e k, magnitudo regulæ, polus uero d.

Hac itaq; linea contingit ostendere eam perpetuò minus accedere ad a b regulam, & quod omnis recta inter regulam a b, & ipsam lineam secat ipsam lineam. Primũ quidem accidens facile comprehenditur in altera descriptione, intelligendo regulam a b polo c, interuallo d e, linea cõchili f e h. procedãt ab ipso c duæ c h, c f, æqualibus uidelicet factis his k h, l f. Dico quod f m perpendicularis minor est perpendiculari h g. Cum enim angulus m l c, sit maior angulo m k c, reliquus relictus in duos rectos, puta angulus m l f, reliquo m k h minor est. Propterea cũ an-



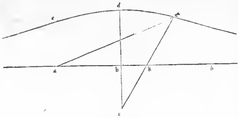
guli ad m, g sint recti, angulus ad f maior est angulo ad h constituto. & si angulus m f x, fiat æqualis angulo ad h, ipsa k h, hoc est ipsa l f ad h g, eãdem habebit proportionem, quam x f ad f m. quare f l ad h g, habet minorẽ proportionem, quàm ad f m. quare h g maior est ipsa f m.



Secundum autem fuit, lineam rectam ductam inter a b & lineam secare ipsam

lineā. & hoc quoq; sic patebit. Ipsa enim ducta aut est æquedistās ipsi a b, aut non. Esto prius æquedistās, puta f g h: & fiat sicut d g ad g c, ita d e ad aliam quandā, puta k. & cētro c, interuallo k, circumferentia descripta secet f g, in puncto f, & iungatur c f. Est igitur sicut d g ad g c, ita l f ad f c. uerum sicut d g ad g c, ita erat d e ad k: hoc est ad ipsam c f. Igit̃ d e est æqualis ipsi l f, quod esse nō potest. oporteret enim f esse ad lineam. At uero non sit ipsa ducta æquedistans, puta m g n, & ducatur per g æquedistans ipsi a b, puta f g. ipsa igitur f g concurret cum linea: quare multò magis ipsa m n. Cū igitur hæc instrumento accidentia colligantur, eius ad propositum utilitas ita demonstrabitur.

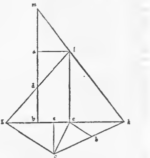
Rursus angulo a dato, & puncto extra c ducere c g, & facere eam ęqualem datæ. ducatur perpendicularis a puncto c ad ipsam a b, quæ sit c h. & educatur, & esto d h æqualis datæ, & polo c, interuallo d h dato. regula uero a b describatur



conchilis linea prima e d f. concurrit igitur ipsi a g, per prædemonstratum. cōcurrat in g, & iungatur c g. Igitur k g est æqualis datæ.

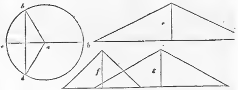
His demonstratis, dentur duæ rectæ c l, l a, ambientes angulum rectum, quibus oporteat duas medias continuè proportionales inuenire, & compleatur parallelogrammum a b c l, & diuidatur utraq; harum a b, b c in duo æqua punctis d, e. & iuncta d l educatur, & cōcurrat cum ipsa b c, educta in puncto g, & sit ipsi c b ad angulos rectos ipsa e f. & producatur ipsa c f, quæ sit æqualis ipsi a d, & iungatur ipsa f g, & ei ęquedistans ipsa c h, & angulo existente eo qui sub k c h a puncto f dato, deducatur ipsa f h k, faciens ipsam h k ad g k æqualem ipsi c f. Hoc autem quo modo fieri possit, ostensum est per lineam cōchilem, & ipsa k l iungatur, & educatur ut concurrat ipsi a b eductæ in pūcto m. Dico itaq;, quod est sicut c l ad k c, ita k c ad m a, & m a ad a l. Quoniam enim b c diuiditur in duo æqua puncto e, & additur ei k c: cōtentum ergo sub b k, k c, cum quadrato c e, æquatur quadrato e k, quadrato e f communi adiecto, contentum sub b k, k c, cum quadratis e c, e f, hoc est quadrato c f, æquatur quadratis k e, e f: hoc est quadrato k f. Et quoniam sicut m a ad a b, ita m l ad k l. Sicut autem m l ad k l, ita b c ad c k. igitur sicut m a ad a b, ita b c ad c k. & est a d dimidia ipsius a b. & c g est dupla ipsius b c. quoniam & l c, ipsius a d. Erit igitur sicut m a ad d a, ita g c ad k c. Verū sicut g c ad c k, ita f h ad h k. cum g f, & c h sint æquedistantes. Igitur componenti sicut m d ad d a, ita f k ad k h. Supposita est autem ipsa d a æqualis ipsi h k, cum c f sit æqualis ipsi d a. Igitur ipsa m d æqualis est ipsi f k. quare quadratū m d est æquale

le quadrato f k. Est autem contentum sub b m, & m a, cum quadrato d a, æquale quadrato m d. quadrato autem f k ostensum est æquale esse contentum sub b k, k c, cum quadrato c f: quoniam quadratum a d, æquatur quadrato c f. nã ipsa a d supposita est æqualis esse ipsi c f. Igitur quod sub b m, m a æquatur contento sub b k, k c. Sicut ergo m b ad b k, ita k c ad a m. Verũ sicut b m ad b k, ita c l ad c k. Igitur sicut l c ad c k, ita c k ad a m. Est autem sicut l c ad c k, ita m a ad a l. Igitur sicut l c ad c k, ita c k ad a m, & a m ad a l, quod erat demonstrandũ. Duab. igitur rectis datis, duæ mediæ continuæ proportionales inuentæ sunt.



IN SECVNDVM THEOREMA.

ET componenti sicut ipsa d h ad h c, ita c a ad a c. hoc est quadratũ c b, ad quadratũ b e. Sicut enim in rationalis descriptione, quoniam in triangulo rectangulo c b a, ab angulo recto ad basem ducta est b e perpẽdicularis, distincti trianguli ad perpendicularẽ sunt inuicẽ similes, & toti, icciirco sicut c a ad a b, ita b a ad a e, & c b ad b e. quare sicut quadratũ c a ad quadratũ a b, ita quadratũ c b ad quadratum b e.



Verum sicut quadratũ c a, ad quadratũ b a, ita ipsa c a ad ipsam a e. Sicut enim prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratum secundæ. Sicut ergo c a ad a e, ita quadratum c b ad quadratum b e. Eadem autem ratione ostenditur, quod sicut c a ad c e, ita quadratum a b, ad quadratum b e. Propter similitudinem enim triangulorum est rursus, sicut a c ad c b, ita b c ad c e: hoc est, sicut quadratum a c, ad quadratum c b, ita ipsa a c ad ipsam c e. Sicut autem quadratum a c ad quadratum c b, sic quadratum a b, ad quadratum b e. Igitur sicut a c ad c e, ita quadratum a b, ad quadratum b e. Postea deinceps tentãs ostendere conũ b k f,

 æqualem

æqualem esse portioni sphęræ b a f, exponens conũ n, qui basim habeat æqualem superficiei portionis, & altitudinẽ æqualem ei quæ ex centro sphæræ, dixit conũ n esse æqualem frusto f a b h solido, sicut ostensum fuit in primo libro. Verum sciendum est, in primo libro non esse ostensum tale frustum esse æquale cono taliter sumpto, sed illi qui esset compræhensus à coni superficie, & superficie sphęrica minore hæmisphærio, quod proprie in Diffinitionib. uidebatur frustũ solidum appellare. Dixit enim: Frustum autẽ solidum uoco, cum sphærã conus secet, qui habeat uerticem ad sphæræ centrum, figuram compræhensam à superficie coni intra conum. Figura enim nunc proposita continetur à conica superficie, habente uerticem ad centrum sphæræ, & sphærica superficie, sed non à compræhensa intus à cono. Quod autem & talis figura sit æqualis cono habenti basim æqualem superficiei sphæricæ complectenti portionem, altitudinem uero æqualem ei quæ ex centro sphæræ, sic demonstrabitur per ea quæ in primo libro ostensa sunt. Intelligatur enim seorsum sphæra, & secetur plano quodam non per centrum circulo circa diametrum b d, centrum sphæræ a: & intelligatur conus basem habens circulum circa diametrum b d uerticem punctum a. Exponatur item conus e: cuius basis, sit æqualis superficiei sphæræ, altitudo ea quæ ex sphæræ centro. Igiť conus ille est æqualis ipsi sphæræ. nam quadruplus est coni basem habentis maximum in sphæra circulum, altitudinem uero eandem, cuius quidem sphæra est ostensa esse quadrupla Exponantur item alij duo coni hi f g, quorum f basem habeat æqualem superficiei portionis b c d, altitudinem uero eam quæ ex centro sphæræ. g uero basem habeat æqualem supęrficiei portionis b h d, & altitudinem eandẽ. Conus igitur f est æqualis frusto cuius uertex est a, & superficies sphærica quę est secundum b c d. Quoniam igitur basis e est æqualis basibus conorum f g, & sunt in eadem altitudine: igitur e conus, hoc est ipsa sphæra, est æqualis conis f g. Verũ conus f ostensus est æqualis esse frusto, quod est secundum b c d solido, uerticem habenti a. Igitur reliquus g conus æqualis est reliquæ portioni, basem habenti superficiem quæ secundum b h d portionem, altitudinem uero eam quæ ex centro. Deinde rursus dixit, Aequalis est igitur conus n, hoc est frustum b h f d, figuræ b h f d. quoniam enim adductus est conus n æqualis cono cuius basis est circulus circa b f, diametrum & altitudo h k: conus autem cuius basis est eadem, altitudo uero e k, æqualis est cono dicto, & cono habenti basim eandem, altitudinem uero e h. Habent enim se ad inuicem, sicut eorum altitudines: ablato communi cono, eo qui basim habet eandem, altitudinem uero e h, reliqua b h f k figura erit æqualis cono basem habenti circulum circa diametrum b f, altitudinem autem h k: hoc est cono n, hoc est b a h f frusto. Inducẽs itaq; ex collectis corollariũ, perficit Theorema. Deinceps per alterã demõstrationem cõducit extremã partem theorematis, hoc est quod b a f portio sphæræ est æqualis cono b k f. & procedens dicit, Sicut ergo k h ad h c, ita h d ad d c, & tota k d ad d h, sicut d h ad d c. Quoniã enim sicut k h ad h c, ita h d ad d c: & permutatim, sicut k h ad h d, ita h c ad c d, & componenti, sicut k d ad h d, ita h d ad d c, hoc est k h ad h a. Erat enim sicut k h ad h c, ita h d ad d c. Est autem h c æqualis ipsi h a. Et parum pòst: Sicut ergo k h ad h d, ita a e ad e c. Sicut ergo quadratum k d ad contentum sub k h, h d: ita quadratũ a c, ad cõtentum sub a e, e c. Intelligantur enim seorsum positæ hæ k d, a c: & sit sicut k h ad h d, ita a e ad e c. Dico quod est sicut quadratum k d, ad cõtentum sub k h, h d, ita quadratum a c ad contentum sub a e, e c. Quoniã enim est sicut k h ad h d, ita a e ad e c. & componenti, sicut k d ad d h, ita a c ad c e. quare est quadratum k d



ad

ad quadratum h d, ficut quadratum a c, ad quadratum c e. Rurfus quoniam eft ficut k h ad h d, ita a e ad e c. Verum ficut k h ad b d, ita contentum fub k h, h d ad quadratum h d, fumpta h d altitudine communi. Sicut autem d e ad e c, ita contentum fub a e, e c, ad quadratum e c, fumpta rurfus altitudine comuni e c. Sicut ergo contentum fub k h, h d, ad quadratum h d, fic contentum fub a e, e c, ad quadratū e c. Oftenfum eft autem, ficut quadratum h d, ad quadratum d k, fic quadratum e c ad quadratum a c. Igitur per æquam, ficut contentum fub k h, h d, ad quadratum k d, fic contentum fub a e, c e ad quadratum a c: & econuerfo, quod erat demonftrandum.

IN TERTIVM THEOREMA.

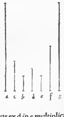
Sicut autem dicti circuli ad inuicem, ita quadratum a d, ad quadratum d b, hoc eft ipfa a c ad ipfam c b. Sicut enim in ipfa rationalis defcriptione, quoniā in triangulo rectangulo a d b ducta eft perpendicularis, ab angulo recto d c media proportionalis, inter bafis partes & trianguli ad perpēdicularem inuicē funt & toti fimiles. quare ficut b c ad c d, ita b d ad d a. igitur & earum quadrata. Verū ficut quadratum b c, ad quadratum c d, ita prima b c ad tertiam c a. Sicut ergo b c ad c a, ita quadratum b d ad quadratū d a. Proportio autem a c ad c b eft data, quare punctum c eft datum. quoniam fupponitur fphæra, igitur diametros eius a b data, & proportio a c ad c b eft data. Si magnitudo data in proportione datam diuidatur, utraq; partium eft data. quare ipfa a c data, & a datum. nam in communi fectione lineis pofitione datis, datum eft c punctum.

IN QVARTVM THEOREMA.

Eadē ratione qua fuprà ex apparatu, ficut l d ad d k, ita k b ad b r, & d q ad q b. In præcedenti enim collectū fuerat hoc modo: Quoniā eft ficut utraq; fimul k d, d q ad d q, ita r q ad q b, & diuidenti, ficut k d ad d q, ita r b ad b q: & permutatim, ficut k d, hoc eft k b ad b r, ita d q ad q b. Rurfus quoniam eft ficut l q ad q d, ita utraq; fimul k b, b q ad q b. Diuidenti, & permutatim, ficut l d ad d k, ita d q ad q b. Erat autem & ficut d q ad q b, ita k b ad b r. Sicut ergo l d ad d k, ita d q ad q b, & k b ad b r. Tota igitur r l ad k l, ficut k l ad l d. Sicut enim unum ad unum, ita antecedentia omnia fimul, ad fequentia fimul omnia. Sicut ergo r l ad l d, ita quadratum r l ad quadratum l k. Quoniam enim eft ficut r l ad l k, ita k l ad l d. Sicut igitur prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad fecundæ quadratum. Eft igitur ficut r l ad l d, ita quadratum r l ad quadratum l k. Verum ficut quadratum r l ad quadratum l k, ita quadratum l k ad quadratum l d. Sunt enim proportionales. Sicut ergo r l ad l d, ita quadratum l k ad quadratum l d. ponatur b f æqualis ipfi k b. Quod enim extra r cadet, manifeftū eft. Quoniam ficut d q ad q b, ita k b ad b r. Eft autē d q maior ipfa q b, igitū ipfa k b maior eft ipfa b r. igitur f extra r cadet.

Quoniam autem proportio d l ad l q, & ipfius r l ad l d, & ipfius r l ad l d proportio data. Quoniam enim ficut utraq; fimul k b, b q ad b q, hoc eft f q ad q b, ita l q ad q d: euertenti, ficut q f ad f b, ita q l ad l d. Et econuerfo, ficut b f ad f, ita l d ad l q. Proportio autem b f ad f eft data, quoniam ipfa f b æqualis eft ei quæ ex centro fphæræ datæ. ipfa uero b q terminis eius b q datis, per fuppofitione fphæra di uifa à plano per a c ducto, & ipfa d b ad angulos rectos ipfi a c exiftēte. Data eft & idcirco tota q f, & proportio q f ad f b data, quare & proportio d l ad l q data. Rurfus quoniam proportio portionum eft data, erit coni l a c, ad conum a r c proportio data. quare & proportio l q ad q r data. nam fe habent inuicem, ficut eorum altitudines. Totius ergo r l ad l q proportio eft data. Quoniam igitur utriufq; harū r l, l d ad l q eft proportio data, erit r l ad l d proportio data. nam quæ habent ad idem proportionem datam, habēt quoque inter fe proportionem datam. Quoniā igitur proportio r l ad l q coniungitur, ex proportione r l ad l d, & l d ad l q, quod quidem cōpofitio proportionū fumatur, fumpta media l d, ueluti & in Stoichiofi

sumebatur, constat. Quoniam autem indearticulatè quodammodo, & non ita ut mentem expleat dictum est, uti comprӕhendi potest his qui in Pappum & Theonem & Archadium inciderunt, in multis compositionibus non demonstratiuè, sed inductione hoc dictum constituunt. Nullum igitur inconuenìens, si perpaululum in ratione uersati hoc ipsum manifestius fecerimus. Dico igitur, quod si sumantur duo numeri, uel duӕ magnitudines, quibus aliquis medius terminus cõstituatur, proportio prius sumptorum numerorum, uel magnitudinum componitur ex proportione primi ad medium, & medij ad tertium proportione. Cõmemorandum tamẽ prius, quomodo proportio dicatur ex proportionibus componi. Sicut enim in libro Elementorum, quando quantitates proportionum in seipsas multiplicatę faciant quandam quantitatem, quãtitate uidelicet dicta, secũdum eũ numerũ quo & denominatur proportio data, uti dicunt alij, & Nicomachus in primo de Musica, & Heronas in Commentario in Arithmeticam introductionem. Idem autem est, ac si dicatur eodem numero multiplicato in terminum sequentem proportionis produci antecedentem, & propriè magis in multiplicibus sumetur quantitas. In superparticularibus autem & superpartientibus non iam quãtitatem sumi datur, cum sit unitas indiuisibilis. Quare in illis unitas est diuidenda. quanquã hoc minimè cõueniat Arithmeticӕ, sed ratiocinatiuӕ, & computatiuӕ attribuatur. Diuiditur autem unitas in partem, aut partes, à quibus proportio denominabitur: quemadmodum fit, ut apertius dicatur, sesquialterӕ quantitas ad unitatem addit unitatis dimidium, & sesquitertiӕ ad unitatem tertiam. Quare sicuti suprà dictum est, constat proportionis quantitatem in terminũ sequentem multiplicatã producere antecedentẽ. Nouem enim ad sex cum sit proportio sesquialtera, cuius quãtitas est unitas & dimidium, hӕc multiplicata in senarium, producit nouenariũ. & in alijs quoq; licet hoc inspicere. His autem ita declaratis, redeundum est ad propositum. Sunto igitur duo dati numeri a b. sumatur medius inter eos c, ostendẽdum quod proportio a ad b componitur ex proportione a ad c, & proportione c ad b. Sumatur etiim quantitas a ad c, quӕ sit d, & eius quӕ est c ad b sit e. igitur e multiplicatis d, producit a: et ipse b multiplicans e producit c. ipse uero d multiplicans e producat f. Dico quod f est quantitas proportionis a ad b: id est f multiplicans b producit a. nam b multiplicans f, faciat g. Quoniam igitur b multiplicans f facit g, & multiplicans e producit c: erit sicut f ad e, ita g ad c. Rursus quoniã d multiplicans e facit f, & multiplicans c facit a: erit sicut e ad c, ita f ad a. Igitur permutatim, sicut e ad f, ita c ad a: & econuerso sicut f ad e, ita a ad c. Verum sicut f ad e ostensum est esse, ita g ad c. Igitur sicut g ad c, ita a ad c. quare a est ӕquale ipsi g. Verum b multiplicans f producit g, igitur b multiplicans f producit a.



quare erit f quãntas proportionis a ad b. Et est f productus ex d in e multiplicato, hoc est ex quantitate proportionis a ad c, in quantitatem proportionis c ad b. Igitur proportio a ad b componitur ex proportione a ad c, & ex proportione c ad b. Quod erat demonstrandum. Vt autem exemplo quoq; hoc quod dictum est fiat manifestum, incidat inter duodenum & binũ medius quaternus. Dico itaq; quod duodecim ad duo proportio est composita ex proportione duodecim ad quatuor, & quatuor ad duo. Id est proportio sextupla componitur ex tripla, duodecim ad quatuor, & dupla quatuor ad duo. Si enim quantitates proportionum inuicem multiplicemus, hoc est tria in duo, fient sex, qui est quantitas duodecim

ad

ad duo proportionis quæ est sextupla, quod propositum fuerat declarare. Si autē qui incidit non fuerit maior minore, & minor maiore, sed aut econuerso, aut maior aut minor utroq;, & hoc modo prædicta compositio consequetur. Nam inter nouem & sex cadat medius duodecim, utroq; illorum maior. Dico igitur quod ex subsesquiterna, quæ est nouem ad duodecim proportione, & ex dupla quæ est duodecim ad sex, componitur sesquialtera, quę est nouem ad sex. Quantitas enim quæ est nouem, ad duodecim est tres quartæ, hoc est dimidium & quarta. Quātitas autem quæ est duodecim ad sex, est binarius. Si igitur multiplicauerimus binarium in dimidium & quartam, fit unitas & dimidium, quæ quantitas est sesquialterę proportionis, quam habent nouem ad sex. Similiter autem si inter nouē & sex quatuor medius incidat, ex dupla sesquiquarta & subsesquialtera componitur sesquialtera. Rursus enim quantitatem duplæ sesquiquartæ, quæ est nouem, ad quatuor multiplicemus, in quantitatem subsesquialteræ, quæ est duæ tertiæ, & habebimus unum & dimidium, quod est quantitas sesquialteræ, ut dictum est. & similiter in omnibus eadem ratio accommodatur. Constat autem ex dictis, quod si duorum numerorum datorū aut magnitudinum non fuerit unus medius, sed plures medij termini sumantur, extremorum proportio componitur ex omnium intermediorum proportionibus, incipiendo à primo, & procedendo ad ultimum, secundum ordinem se sequentium. Duobus enim terminis a b incidant plures uno c d Dico quod proportio a ad b cōponitur ex proportione a ad c, & c ad d, & d ad b. Quoniam enim a ad b componitur ex a ad d, & d ad b, uti dictum est suprà: & a ad d componitur ex a ad c, & c ad d. Igitur a ad b, proportio componitur ex ea quæ est a ad c, c ad d, d ad b. Similiter autem & in reliquis ostendetur.



Item in rationali dixit: Verū sicut r l ad l d ostēsum est, ita esse quadratum b d ad quadratū d q. Quoniam enim ostensum est, sicut r l ad l d, ita quadratum l k ad quadratum l d. Sicut autem quadratum l k ad quadratum d l, sic quadratum b d ad quadratum b q. Ostensum est enim, sicut k l ad l d, ita b d ad d q, propter compositionem. Igitur sicut r l ad l d, ita quadratum b d ad quadratum d q. Fiat autem sicut r l ad l q, ita b f ad f h, utcunq; punctum h ceciderit, quomodocunq; quidem si positum sit, quantum ad consequentiam demonstrationis nullum affert rationi impedimentum. Quod autem si quemadmodum in descriptione fit ponatur, semper cadet inter b r, sic declaratur. Quoniam enim sicut l k ad d k, hoc est ad k b, ita k r ad r b. Sicut ergo unum ad unū, ita omnia ad omnia: sicut r l ad r k, ita k b ad r b. Maiorem autem proportionem habet r l ad r q, quàm r l ad r h. igitur l r ad r q maiorem habet proportionem, quàm k b ad b r, hoc est f b ad b r. Euertēti r l ad l q, minorem habet proportionem, quàm b f ad f r. Si enim fecerimus sicut r l ad l q, ita b f ad quandam aliam maiorem f r, manifestū inde est quod f h maior est ipsa h b. Quoniā enim ostensum est, sicut l d ad d k, ita d q ad q b, & k b ad b r. Est autem d q maior ipsa q b. igitur l d maior est ipsa d k, & k b ipsa b r. quare & l d ipsa b r. Tota igitur l q maior est ipsa q r. quare & h f maior ipsa b b.

Reliquum igitur est, sicut quadratum b d, quod est datum, ad quadratum d q, ita f q ad f b. Quoniam enim portioni b f ad f h ostensum est eandem proportionem compoṡiti ex proportione quadrati b d ad quadratum d q, & ipsius b f ad f q. Eadem uero ei quæ est b f ad f h est, & composita ex proportione b f ad f q, & ex q f ad f h. Composita igitur ex proportione quadrati b d ad quadratum d q, & ex b f ad f q, est eadem proportioni compositæ ex b f ad f q, & ex q f ad f h. Si igitur

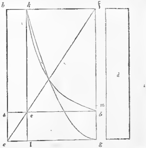
tur communem in ambabus proportionem b f ad f q auferamus, reliqua quadrati b d ad quadratum d q proportio eadem est ei quæ est q f ad f h. & est datũ d f diuidere puncto q, & facere sicut q f ad datam, hoc est ad f h, sic datum, hoc est quadratum b d ad quadratum d q. Hoc autem sic simpliciter dictum, habet determinationem, adhibitis quæ istic habentur problematis: hoc est, ipsam d b duplam esse ipsius b f, & ipsam b f maiorem esse ipsa f h. Quãtum autem ad resolutionem, nõ habet determinationem, & est problema tale.

Duabus rectis datis d b, b f, & ipsa d b dupla ipsius b f, & puncto h sumpto, in b f diuidere ipsam d b puncto q, & facere sicut quadratum d b ad quadratum d q, ita q f ad f h. Vtraq; enim hæc in fine resoluentur, & componentur. In fine quidẽ antedictum pollicebatur se ostensurũ, in nullis autem scriptis hoc promissum inueniri potest. Nihil etiam inuenimus Dionysodorũ, ne quidpiam quidem horũ attigisse, uerum putare fieri non posse, ut in limma assumptum perueniatur, atq; idcirco alteram totius problematis uiam ingressum esse, quam deinceps conscribemus. Diocles quidem & ipse in libro de Pirijs confecto ab ipso, pollicitum fuit se existimans Archimedem non fecisse pollicitationẽ, & ipse perficere aggressus est, & eius epicherima deinceps describemus. nam & ipsum nullum habet ad assumptã rationem. Similiter autem euenit Dionysodoro, qui alia demonstratione construit problema. In quodam utiq; uetusto libro (non enim à multorum abstinuimus inquisitione) incidimus in Theoremata scripta, quæ quidem ex ptesmatibus obscuritate magna tenebantur: in figuratione errore multiplici constituta, quæsitorum quidem habebant suppositionem, in parte autem gratam Archimedi linguam doricam seruabant, & consuetis Archeo rerum nominibus erant inscripta, ubi parabole sectio rectanguli coni nominata est, & hyperbole sectio coni ambligonij, ita ut ex ipsis intelligatur. Non igitur ipse fuerit, qui quæ in fine promissa sunt, describi sit prosecutus. Vnde studiosius incumbentes, ipsum quidem rationale, uti scriptum fuit, propter errorum multitudinem, ut suprà dictum fuit, difficile inuenientes, ipsam ferè mentem denudantes, communius & apertius quantum fieri potuit dictio, conscripsimus. Vniuersaliter autem primũ Theorema scribetur, ut quod de eo dictũ est, declaretᷓ circa diffinitiones. Deinde & his quæ in problemate resoluta sunt, accommodabuntur.

Recta data a b, item altera a c, & spacio d, proponatur in a b sumendum punctum, puta e, ita ut sit sicut a e ad a c, ita spacium d ad quadratum e b. Factum sit, & ponatur a c ipsi a b ad angulos rectos, & iuncta c e producatᷓ in f, et ducatur per c æquedistans ipsi a b, ipsa c g, & per b ducatur æquedistans ipsi a c ipsa f b g, cõcurrens cum utraque harum c e, c g, & compleatur g h parallelogrammum. Et per e ducatur k e l, æquedistans utriusq; harũ c h, g f. Et sit contentum sub c g, g m æquale ipsi d. Quoniam igitur sicut e a ad a c, ita d ad quadratum e b. Sicut autẽ e a ad a c, ita c g ad g f. Sicut autem c g ad g f, ita quadratum c g ad contentum sub c g, g f. Igitur sicut quadratum c g ad contentum sub c g, g f, ita d ad quadratum e b, hoc est ad quadratum k f. & permutatim. sicut quadratum c g ad d, hoc est ad contentum sub c g, g m, ita contentum sub c g, g f ad quadratum f k. Verum sicut quadratũ c g ad contentũ sub c g, g m, ita c g ad g m. Igitur sicut c g ad g m, ita contentum sub c g, g f ad quadratũ f k. Verum sicut c g ad g m, ipsa f g sumpta cõmuni altitudine, ita contentũ sub c g, g f, ad contentũ sub m g, g f. Sicut igitᷓ contentũ sub c g, g f ad contentũ sub m g, g f, ita contentũ sub c g, g f ad quadratum f k. Igitur quadratũ f k, est æquale contento sub m g, g f. Si igitur circa axem f g describatur parabole per g, ita ut ductæ æquedistantes ipsi c g possint secundum g m, ipsa ibit per k: & erit positione data, cum g m sit data magnitudine, quæ cum g c data continet datum d. Igitur punctum k aptatur positione datæ parabolæ. Describatur igitur uti dictum est, & esto sicuti g k. Quoniam rursus spacium h l, æqua-

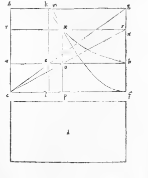
tur

tur spacio cb: hoc est contentum sub h k, k l, contento sub a b, b g. Si per b circa inconcurrentes has h c, c g describatur hyperbole, transibit per k ex conuerso octaui theorematis libri secundi Elementorum conorum Apollonij: & erit positione data, cum utraq; hatũ h c, c g sit data. amplius quidem, & b positione datũ est. Describatur ut dictum est, & esto sicut b k. Igit̃ k aptatur hyperbolę positione datę. Item apratum est parabolæ, positione datæ. igitur k datum est, & est perpendicularis ab ipso k e ad datam positione a b. Igitur e datum. Quoniam igitur sicut e a ad datam ipsam a c, ita d datum ad quadratum e b. Duorũ igitur solidorum, quorũ bases hæ, quadratũ e b, & d: altitudines uero hæ e a, a c, mutua proportione habent̃ bases cum altitudinibus. quare solida æqualia sunt. Igitur quadratũ e b super ipsam e a, est æquale d dato super ipsam c a. Verum quadratum b e, super ipsam e a, est maximum omnium similiter sumptorum in ipsa b a. quando ipsa b e est dupla ipsi e a, uti demonstrabitur. Oportet igitur datum super datam non maius esse quadrato b e super ipsam e a.



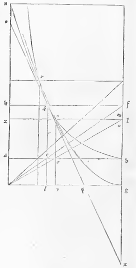
Componetur autem sic. Esto data recta a b, & alia item data a c. & spacium datum d, & opus sit secare ipsam a b, ita ut sicut una pars habeat ad datam a c, ita datum spacium d ad quadratum reliquæ partis. Sumatur ipsius a b tertia pars a e. Igitur d super ipsam a c, aut maius est quadrato b e super ipsam e a, aut æquale ei, aut minus eo. Siquidem igitur maius est, non componetur, ut in resolutione ostensum est. Si autem æquale punctum e, efficiet problema. nam ubi solida sunt æqualia, bases altitudinibus habent̃ mutuæ: & erit sicut e a ad a c, ita d ad quadratum b e. Si autem minus est d super a c, quadrato b e, super e a componetur, hoc pacto. Statuatur a c ad angulos rectos ad ipsam a b, & ducatur per c æquedistans ipsi a b ipsa c g. Et per b ducatur b f æquedistans ipsi a c. educat̃ ad g, & compleatur parallelogrammum f h, & per e ducatur k e l æquedistans ipsi f g. Quoniam igitur d super ipsam a c minus est quadrato e b super ipsam e a: erit sicut e a ad a c, ita d ad minus quidpiam quadrato e b, hoc est quadrato g k. Esto igitur sicut e a ad a c, ita d ad quadratum g m, & ipsi d sit æquale contentum sub c f, f n. Quoniam igitur sicut e a ad a c, ita d, hoc est contentum sub c f, f n ad quadratum g m. Verum sicut e a ad a c, ita c f ad f g. Sicut autem c f ad f g, ita quadratum c f ad contentum sub c f, f g. Ergo quadratum c f, ad contentum sub c f, f g, ita contentum sub c f, f n ad quadratum g m: & permutatim, sicut quadratum c f ad contentum sub c f, f n, ita contentum sub c f, f g, ad quadratum g m. Verum sicut̃ quadratum c f ad contentum sub c f, f n, ita c f ad f n. Sicut autem c f ad f n, f g communi altitudine sumpta, ita contentum sub c f, f g, ad contentum sub n f, f g. Sicut igitur contentum sub c f, f g, ad contentum sub n f, f g, ita contentum sub c f, f g ad quadratum m g. Igitur quadratum g m æquatur contento sub g f, f n. Si igitur per f circa axem f g describamus parabolam, ita ut ductæ possint iuxta ipsam f n transibit per m, descripta sit, & esto puta m x f. Et quoniam

am h f æquatur ipsi a f, hoc est contentum sub h k, k l, contento sub a b, b f: si per b circa incoincidentes h c, c f descripserimus hyperbolem, ipsa transibit per k, per conuersionem octaui theorematis secundi Elementorum conicorum Apollonij. Describatur, & esto puta b k secans parabolem puncto x, & ab ipso x ducatur x o p perpendicularis ad a b, & per x ducatur æquedistãs ipsi a b, ipsa r x s. quoniã itaq; b x k est hyperbole, & ipse h c, c f incoincidentes, & ductæ æquedistantes r x, x p ipsis a b, b f: contentum sub r x p est æquale cõtento sub a b, b f. quare r o est æquale o f. Si igitur ab ipso c iungatur ad s recta, transibit per o. peruenerit, & esto c o s. Quoniam igitur sicut o a ad a c, ita o b ad b f: hoc est c f ad f s. Sicut autem c f ad f s, ita f n cõmuni altitudine sumpta contentum sub c f, f n, ad contentum sub s f, f n. Igitur sicut o a ad a c, ita contentum sub c f, f n ad contentum sub s f, f n. Sed contentum sub c f, f n est æquale spacio d, & cõtento sub s f, f n æquatur quadratum f x, hoc est quadratum b o, propter parabolam. Vt igitur o a ad a c, ita spacium d ad quadratum b o. Sumptum est igitur punctum o, quo problema perficitur.



Quod autem ipsa b e existẽte dupla ipsius a e, quadratum b e super ipsam e a maximũ sit omniũ similiũ sumptorũ super ipsam b a, hoc pacto demonstrabitur. Esto enim sicut in resolutione rursus recta data ad angulos rectos ipsa a c ipsi a b, & iuncta c e educatur, & concurrat lineæ æquedistanti ductæ per b ipsi a c in pũcto f: & per puncta c, f ducantur h f, c g, æquedistãtes ipsi a b: & producatur c a ad h, & huic ducatur æquedistans k e l per punctum e, & fiat sicut e a ad a c, ita contentum sub c g, g m ad quadratum e b. Igitur quadratum e b super ipsam e a erit æquale contento sub c g, g m super ipsam a c, eo quod duorum solidorum bases altitudinibus mutuò afficiũtur. Dico igitur, contentum sub c g, g m super ipsam a c maximũ esse omnium similium super ipsam b a sumptorũ. Describatur enim per g, circa axem f g parabole, ita ut ductæ possint iuxta ipsam g m, ipsa transibit per k, sicut in resolutione ostensum est, & ipsa educta concurret ipsi h c æquedistann diametro sectionis ex uigesimoseptimo theoremate primi libri Apollonij Elementorũ conicorũ. Educatur itaq;, & concurrat in puncto n, & per b circa incoincidentes has n c, c g describatur hyperbole, quæ trãsibit per k, sicuti in resolutione dictum est. Peruenerit igitur, puta b k, & ipsi f g productæ ponatur g x æqualis, & iungatur x k, & producatur in o. Constat igitur, quod cõtingit parabolam ex conuersione trigesimi quarti theorematis primi libri Elementorum conicorum Apollonij: quoniam b e dupla est ipsius e a. sic enim suppositum est: hoc est ipsa k f ipsius k h, & triangulus o h k similis est triangulo x f k, & ipsa x k dupla erit ipsius k o, & est ipsa x k dupla ipsius k p: quia ipsa x f dupla ipsius x g. & quia

p g est æquedistans ipsi k f, igitur o k est æqualis ipsi k p. Igitur o k p contingens hyperbolem, & coniuncta & collibrata cum incoincidentibus in duo æqua diuiditur. applicatur igitur ipsi hyperbolæ, per conuersionẽ tertij theorematis secundi libri Elementorum conicorũ Appollonij. Applicabatur autem & ipsi parabolæ secundum idem k. Igitur parabola applicatur ipsi hyperbolæ in pũcto k. Intelligatur igitur & hyperbole producta, puta ad r, & sumatur in a b quodlibet punctum f, & ducatur per f ipsa τ f y æquedistans ipsi k l, & concurrat cum hyperbole in pũcto τ, & ducatur per τ ipsa z τ q æquedistans ipsi c g. propter hyperbolen igitur & incoincidẽtes, erit z y æquale ipsi c b: ablato c f communi, fit z f æquale f g: & idcirco recta ab ipso c ad q producta permeabit per f. permearit, & sit puta c f q: & quoniam quadratum u q est æquale contento sub q g, g m propter parabolen: quadratum t q minus est contento sub q g, g m. Fiat igitur quadrato t q æquale cõtentum sub c g, g ω. Quoniã igitur est sicut s a ad a c, ita c g ad g q. Item sicut c g ad g q, ipsa g ω cõmuni altitudine sumpta, ita cõtentũ sub c g, g ω ad cõtentum sub q g, g ω: & ad æquale illi quadratum q t, hoc est ipsius b f. Cõtentum ergo sub q g, g ω super ipsam f a, est æquale contento sub c g, g ω super ipsam c a. Cõtentum uero sub c g, g ω super ipsam c a,

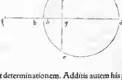


minus est contento sub c g, g m super ipsam c a. Quadratum igitur b f super ipsam f a, minus est quadrato b e super ipsam e a. Similiter autem ostendetur in omnibus punctis sumptis inter puncta, e, a. Verum sumatur inter puncta e b punctum s. Dico quod & hoc modo quadratũ b e super ipsam e a, maius est quadrato b s, super ipsam s a. Eisdem enim præparatis, ducatur per s ipsa s r æquedistãs ipsi k l, & concurrat cum hyperbole in R. concurrit enim ei propterea, quod æquedistans est incoincidenti: & ipsa r ƀ ducta æquedistans ipsi a b per r cõcurrat ipsi f g eductæ in pũcto ƀ. & quoniã rursus propter hyperbolem ipsum c h est æquale ipsi a g, recta ab ipso c ad ƀ iuncta permeabit per s. Permearit, et sit puta c s, ƀ. Et quoniã rursus propter parobolen quadratũ a ƀ æquatur cõtento sub ƀ g, g m: erit quadratum r ƀ minus contento sub ƀ g, g m. Fiat contentum sub ƀ g,

g ω æquale quadrato r b. Quoniã igitur est sicut s a ad a c, ita c g ad g b. Verum sicut c g ad g b, ita communi g ω altitudine sumpta, contentum sub c g, g ω ad contentum sub b g, g ω, hoc est ad quadratum r b, hoc est ad quadratũ b s. Igitur quadratum b s super ipsam s a, æquatur contento sub c g, g ω super ipsam c a, & contentum sub c g, g m maius contento sub c g, g ω. Igitur quadratum b e super e a maius est quadrato b s super s a. Similiter autem ostendetur in omnibus punctis inter e b puncta sumptis. Ostensum est autem & in omnibus sumptis inter e a, & in omnibus sumptis inter e b. Omnium igitur in ipsa a b similiter sumptorum maximum est quadratum b e, super ipsam e a, quando ipsa b e dupla sit ipsius e a.

Cognoscere aũt est opus, & ea quæ sequuntur secundum dictam descriptionem. Quoniam enim ostensum fuit quadratum b f super f a, & quadratum b s super s a, minus esse quadrato b e super e a, fieri potest, ut spacio dato, quod sit super datam minus quadrato b e super e a, per duo puncta diuisa ipsa a b, problema fiat ex principio. Hoc autem fiet, si intellexerimus circa diametrum q g descriptã parabolam, ita ut deductæ possint iuxta ipsam g ω. talis enim parabola transit omnino per r. & quoniam necessariò ipsam incidit in c n æquedistãtem diametro, constat quod secat hyperbolen in alio puncto superiore ipso k, sicuti istic in τ, & perpendicularis ducta ab ipso r ad ipsam a b, uti istic r s secat ipsam a b puncto s, ita ut punctum s faciat problema, & fiat quadratum b s super s a æquale quadrato b s super s a ueluti ex prædictis demonstrationibus patet. Quare cũ duo puncta possint in ipsa b a sumi quibus perficeretur quæsitũ, licet utrum libuerit cuiq; accipere, aut punctum inter e b, aut quod sit inter e a. Siquidem enim quod inter e b, ut dictum est, parabola descripta per puncta g τ in duobus punctis secante hyperbolen, id quod propinquius fuerit ipsi g, hoc est axi parabolæ, inueniet id quod est inter e b: ueluti istic r inuenit s. id quod remotius est, inuenit id quod est inter e a, ueluti istic ipsum τ inuenit ipsum f.

Vniuersaliter quidem igitur sic resolutum est, & compositum problema. Vt autem & uerbis Archimedis accommodetur, intelligatur ut in ipsa determinati descriptione diametros sphæræ ista d b, & quæ ex centro ista b f, & data f h. Descendimus igitur in hoc, dixit, Secare ipsam d f secundum q, hoc pacto, ut sicut q f ad datam, ita datum ad quadratum q d. Hoc autem simpliciter dictum, habet determinationem. Si enim datum super datam maius fuerit quadrato d b super b f, tunc fieri nõ potest problema, uti ostensum est. Si autem æquale punctum b faciebat problema, & hoc modo nihil pertinebat ad Archimedis ex principio propositionem. Sphæra enim hoc modo non diuideretur in proportionem datam.



Simpliciter enim dictam habebat determinationem. Additis autem his problemaribus istic existentibus, scilicet duplam esse ipsam d b ipsius b f, & hoc, ipsam b f maiorem esse ipsa f h, non habet amplius determinationem. nam quadratum d b datum, super f h datam, minus est quadrato d b super b f, quia b f maior est ipsa f h. quod cum esset, ostendimus tunc posse problema, & inde tunc prouenire. Animaduertendum est autem, & hæc quæ ab Archimede dicta sunt, consonare his quæ nos resoluimus. Primum quidem post suam resolutionẽ uniuersaliter id in quod incidit proferens, dixit, Oportet datam d f secare, & facere sicut q f

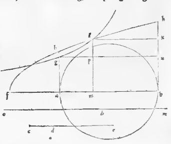
ad

ad datam, ita datum ad quadratum d q. Deinde dicens tanquam uniuersaliter dictum habeat determinationem: adiectis autem problematibus ab eo inuentis, hoc est ipsam d b duplam esse ipsius b f, & ipsam b f maiorem ipsa f h, non amplius habet determinationem magis particulare. Resumit problema, & dicit, quod est tale problema hoc: Duabus rectis datis his d b, b f, & ipsa d b dupla ipsius b f, & puncto in b f ipso h, secare ipsam d b pūcto q, non iam sicut prius ipsam d f dicens, sed d b oportere diuidi, propter id quod nos suprà demonstrauimus, quod ipse inspiciebat duo puncta sumpta esse in d f, quæ facerent problema: unum quidem inter d b, alterum uero inter b f, quorum quod est inter d b ad propositionem ex principio pertinebat.

Hæc igitur consentanea uerbis Archimedis, prout potuimus, apertè descripsimus. Quoniam autem, ut prędictū est, Dionysodorus nullo pacto descriptus in fine ab Archimede prænunciatis incidens: adnixus autem ad inuenienda, quæ non exposita essent, aliam uiam ingressus totius problematis, conscripsit haud indignum inuentionis modum necessarium: quem existimaui oportere istis connectere fideliter, quantum potuimus, nam & ipse nimia hominum negligentia magnam demonstrationum partem multitudine errorum deletam habens, in omnibus quibus nos incidimus scriptis ferebatur.

MODVS DIONYSODORI.

Datam sphæram plano ita secare, ut portiones eius habeant inuicem proportionem datam. Esto data sphæra, cuius diametros a b, & proportio data quam habeat c d ad d e. Oportet igitur sphæram plano erecto ad ipsam a b secare, ita ut portio cuius uertex a, ad portionem cuius uertex b, habeat proportionem, quam habet c d ad d e. producatur b a in f, & ponatur a f dimidia ipsius a b. Et quā proportionem c e habet ad d e, habeat eam f a ad a g, & sit ipsa a g ad angulos rectos ad ipsam a b, & sumatur ah media proportionalis istarum a f, a g. Igitur a h maior est ipsa a g, & circa axem f b per f describatur parabole, ita ut deductæ possint iuxta ipsam a g, quæ ibit per h, quoniam contentum sub f a, a g est æquale quadrato a h. Describat itaque, & sit puta f h k, & per b ducatur k b æquedistans ipsi a h, & secet parabolam pūcto k, & per g circa incoincidentes b as f b, b k describatur hyperbole, quæ diuidet parabolen inter h k: secet in puncto l, & ducatur ab l perpendicularis ad a b ipsa l m: & per puncta g, l ducantur ipsi a b æquedistantes g n, l x. Quoniam igitur ipsa g l est hyperbole, & incoincidentes istæ a b, b k, et æquedistantes ipsis a g, g n, istæ m l, l x, erit contentū sub a g, g n æquale contento sub m l, l x, ex octauo theoremate libri secundi Elementorum conicorum Apollonij. Verum ipsa g n est æqualis ipsi a b, & ipsa l x ipsi m b. Contentum igitur sub l m, m b, est æquale contento sub g a, a b. Et quia contentum



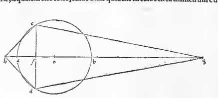
sub extremis æquatur contento sub medijs, quatuor rectæ proportionales sunt. Erit igitur sicut quadratum l m ad quadratū g a, ita quadratum a b ad quadratum b m. Et quoniam propter parabolen quadratum l m æquatur contento sub f m, a g, erit ergo sicut f m ad m l, ita m l ad a g. Sicut ergo prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratum secundæ, & quadratum secundæ ad quadratum tertiæ. Sicut ergo f m ad a g, ita quadratum l m ad quadratum g a. Verum sicut quadratum l m ad quadratum a g, ita ostensum est quadratum a b ad quadratū b m. Igitur sicut quadratum a b ad quadratum b m, ita f m ad a g. Verum sicut quadratum a b ad quadratum b m, ita circulus cuius quæ ex centro est æqualis ipsi a b ad circulum cuius quæ ex centro est æqualis ipsi b m. & sicut circulus cuius quæ ex centro est æqualis ipsi a b, ad circulum cuius quæ ex centro est æqualis ipsi b m, ita f m ad a g. Conus ergo basem habens circulum cuius quæ ex centro est æqualis ipsi a b, altitudinem uero ipsi a g, æqualis est cono habenti basem circulum, cuius quæ ex centro æqualis est ipsi b m, altitudinem uero ipsi f m. Nam coni quorum bases contrario altitudinibus afficiuntur, sunt æquales. Verum conus habens basem circulum cuius quæ ex centro æqualis est ipsi a b, altitudo autem ipsi f a, ad conum basim habentem eandem, & altitudinem ipsam a g, se habet sicut f a ad a g, hoc est c d ad e d. Quoniam enim bases easdem habent, ad inuicem se habebunt sicut altitudines eorum. Conus igitur basim habens circulum, cuius quæ ex centro æqualis est ipsi a b, altitudinem uero æqualem ipsi f a, ad conum habentē basem circulum cuius quæ ex centro æquatur ipsi b m, altitudinem uero ipsam f m, est sicut c e ad e d. Verum conus habens basem circulum cuius quæ ex centro æqualis est a b, altitudinem uero ipsam f a, est æqualis sphæræ: & conus basim habens circulum cuius quæ ex centro est æqualis ipsi b m, altitudinem uero f m, est æqualis portioni sphæræ cuius uertex est b: altitudo uero b m, sicuti deinceps ostendetur. igitur sphæra habet ad dictā portionem, eam proportionē, quam habet c e ad e d. & diuidenti portio cuius uertex est a, altitudo autem a m, ad portionem cuius uertex est b, altitudo uero b m, eam habet proportionem, quam c d ad d e. Planum igitur perductum per ipsam l m erectum ad a b secat sphæram in proportionem datam: quod erat faciendum.

Quod autem conus basem habens circulum, cuius quæ ex centro est æqualis ipsi b m, altitudinem uero ipsam f m, æquatur portioni sphæræ cuius uertex b, et altitudo m b, hoc pacto demōstrabitur. Fiat enim sicut f m ad m a, ita o m ad m b. Igitur conus basem habens eandem cum portione, altitudinem uero ipsam o m, æquatur portioni. Et quoniam sicut f m ad m a, ita o m ad m b. & permutatim, sicut f m ad m o, ita a m ad m b. Verum sicut a m ad m b, ita quadratum p m ad quadratum m b: & ita circulus cuius quæ ex centro est æqualis ipsi p m, ad circulū cuius quæ ex centro est æqualis ipsi m b. Sicut igitur circulus cuius quæ ex cētro est æqualis p m, ad circulum cuius quæ ex centro est æqualis ipsi b m, ita m f ad m o. Sic igitur conus basem habens circulum, cuius quæ ex cētro æqualis est ipsi m b, altitudinem uero ipsam m f, æquatur cono habenti basim circulum, cuius quæ ex centro est æqualis ipsi p m, altitudinem uero ipsam m o. nam bases eorum altitudinibus contrario afficiuntur. quare & portioni est æqualis.

MODVS DIOCLIS.

Scribit autem & Diocles in libro de Pirijs, primum hæc dicēs: In libro de sphæra & cylindro Archimedes demonstrauit, quod omnis sphæræ portio æquatur cono basem habenti eandem cum portione, altitudinem uero rectam quandā habentem proportionem ad perpendicularem ductam à uertice ipsius portionis ad basem, quā utraq; simul ea quæ ex centro, & quæ permutatim habetur, ad portionem perpendicularis, ad perpendicularem permutatæ portionis. Vt si sphæra sit a b c, & secetur plano quodam circulo circa diametrum c d constituto, & diametro

tro a b, existente centro e: & fecerimus sicuti utraq; simul e a, f a ad f a, ita g f ad f b. Item sicut utraque simul e b, b f ad f b, ita h f ad f a. Ostensum est portionem c b d sphæræ, æqualem esse cono, cuius basis quidem circulus circa diametrum c d con



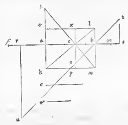
stitutus, altitudo uero ipsa f g. Et portionem c a d æqualem esse cono habenti eãdem basem, altitudinem uero h f.

Proposito itaq; sibi hoc, datam sphæram plano secare, ita ut portiones sphæræ ad inuicem habeant proportionem datam, cõstruens ea quæ sunt dicta, ait: Proportio igitur data est coni basis. cuius est circulus circa diametrum c d, altitudo uero ipsa f h, ad conum cuius basis est eadem, altitudo uero ipsa f g. Etenim hoc demonstratum est: coni, qui in eadem base consistunt adinuicem se habent sicut eorum altitudines: igitur proportio h f ad f g data. & quia est sicut h f ad f a, ita utraq; simul e b, b f ad f b: diuidẽti, sicut h a ad a f, ita e b ad f b. Eadem ratione sicut g b ad f b, ita ipsa eadem recta ad ipsam f a. Factũ est igitur problema tale: Recta a b positione data, & duobus punctis a b datis, & data e b, secare ipsam a b pũcto f, & adijcere has h a, b g, ita ut portio h f ad f g sit data. Item sicut h a ad a f, ita data recta ad ipsam f b. Sicut autem g b ad b f, ita ipsa data recta ad ipsam f a. Hoc autem deinceps est demonstratum. Archimedes enim longius hoc ostendens, & sic in alterum problema abigit, quod nõ demonstrat in libro de sphæra & cylindro.

Recta a b positione data, & duobus punctis a b datis, & proportione quã habet ipsa c ad ipsam d, diuidere ipsam a b pũcto e, & adijcere ei has f a, g b, ita ut sit sicut c ad d, ita f e ad e g. Item sit sicut f a ad a e, ita quędam recta data ad b e: & sicut g b ad b e, ita eadem recta data ad e a factum sit. et ipsi a b ad angulos rectos addãtur h a k, l b m, & ipsi rectæ datæ ponatur utraq; æqualis a k, b m, & iunctæ hæ k e, e m educantur ad l, h. Iungatur autem & k m, & ducatur per l ipsa l n æquedistans ipsi a b, & per e ducatur x e o p, æquedistans ipsi n k. Quoniam igitur est sicut f a ad a e, ita m b ad b e, hoc enim supponitur. sicut autem m b ad b e, ita h a ad a e, propter similitudinem triangulorũ. Sicut ergo f a ad a e, ita h a ad a e. Igitur f a est æqualis ipsi h a: eadem ratione & b g ipsi b l. Et quoniam est sicut utraq; simul h a, a e, ad utrãq; simul m b, b e, ita utraq; simul k a, a e, ad utramq; simul l b, b e. utraque enim earum proportionum eadem est ei quę est a e ad e b. Contentum igitur sub utraq; simul h a, a e, & sub utraq; simul l b, e b, æquatur contento sub utraque simul k a, a e: & utraq; simul m b, b e. Ponatur ipsi k a æqualis harũ utraq; a r, b s. Quoniam igitur utraque simul h a, a e, æqualis est ipsi f e: utraq; autem simul l b, b e æqualis ipsi e g: & utraq; simul k a, a e æqualis ipsi r e: & utraq; simul m b, b e æqualis ipsi s e. Et ostensum est, contentum sub utraq; simul h a, a e, & utraque simul l b, b e, esse æquale contento sub utraq; simul k a, a e, & utraq; simul m b, b e. Contentum igitur sub f e, e g æquatur contento sub r e, e s. Propter hoc quando

r ea.

r cadit inter a f, tunc s exterius ipso g cadet, & ecõuerso. Quoniam igitur sicut c ad d, ita f e ad e g. Sicut autem f e ad e g, ita contentum sub f e, e g ad quadratum e g. Sicut ergo c ad d, ita contentum sub f e, e g ad quadratum e g. Contentum autem sub f e, e g ostensum est esse æquale sub r e, e s. Est igitur sicut c ad d, ita contentum sub r e, e s ad quadratum e g. Ponatur ipsi b e æqualis ipsa e o, & iuncta b o educatur utrinque, & à punctis s, r ductæ ad angulos rectos hæ s t, r y concurranteí in pũctis y t. Quoniam igitur per b datum, ad positione datam a b ducta est t y, faciens angulum datũ hunc e b o dimidium recti, ipsa r y erit positione data. Et à datis r s positione, hæ r y, t s ductæ secant eã punctis t y. Igitur & puncta t, y data, quare et ipsa t y data, po



sitione & magnitudine. & quia propter similitudinem triangulorum e o b, s t y est, sicut t b ad b o, ita s b ad b e: & cõponenti, sicut t o ad o b, ita s e ad e b. Verum sicut b o ad o y, ita b e ad e r. Igitur per æquam sicut t o ad o y, ita s e ad e r. Verum sicut t o ad o y, & s e ad e r, ita contentum sub t o y, ad quadratum o y. Sicut autem s e ad e r, ita contentum sub s e, e r ad quadratum e r. Sicut ergo contentum sub t o, o y ad quadratum o y, ita contentum sub e s, e r, ad quadratum e r. Et sicut ergo contentum sub t o, o y ad quadratum o y, ita contentum sub s e, e r, ad quadratum e r. Et permutatim, sicut contentum sub t o, o y ad contentum sub s e, e r, ita quadratum o y, ad quadratum e r. Quadratum autem o y duplum est quadrato e r. quandoquidem & quadratum o b duplum ad quadratum b e. Igitur contentum sub t o, o y, duplum est contento sub s e, e r. Contentum autem sub s e, e r ostensum est habere ad quadratum e g eam proportionem, quam habet ipsa c ad ipsam d. Et quadratum e g æquatur quadrato x o. nam utraque e g, x o est æqualis utrique simul l b, b e. Igitur contentum sub t o, o y habet ad quadratum x o eã proportionem, quam habet dupla ipsius c ad ipsam d. Proportio autem duplæ ipsius c ad ipsam d data est. Igitur contenti sub t o, o y, ad quadratum x o proportio data. Si igitur fecerimus sicut d ad duplam ipsius c, ita t y ad aliam quãdam, puta u. & circa ipsam t y describamus ellipsim, id est sectionẽ coni acutiãguli, ita ut deductæ in angulo sub x o b, hoc est in dimidio recti possint ea quæ iuxta u deficientia, simili contento sub t y, & u transibit per x per conuersionem uigesimi theorematis primi libri Elementorũ conicorum Apollonij. describatur, & sit puta y x t. Punctum igitur x applicatur ellipsi positione datæ. Et quoniam ipsa l k est diagonialis ipsius n m, parallelogrammum erit contentum sub n x p æquale contento sub a b, b m. Si igitur per b circa incoincidentes has h k, k m descripserimus hyperbolen, ipsa transibit per x, & erit positione data, quia b punctum positione datum est. & utraque harum a b, b m. Et quia hæ h k m incoincidentes descriptę sunt, & esto puta x b. igitur punctum x aptatur hyperbolæ positione datæ. Aptabatur autem & ellipsi positione datæ. Igitur punctum x datum, & perpendicularis ab ipso x e. igitur e datum. Et quoniam est sicut m b ad b e, ita f a ad a e. & a e data est: igitur a f data, & eadem ratione ipsa g b data.

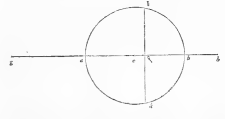
Componitur autem hoc modo. Sicut enim in eadem descriptione, esto data re

cta

cta a b, quam oporteat diuidere, et altera data a k: proportio data sit c ad d. ducatur ipsi a b ad angulos rectos ipsa b m, æqualis ipsi a k: & iungatur k m, & ponatur utraq; a r, b s æqualis ipsi k a. à punctis r s ducantur ad angulos rectos hæ r y, s t. Et ad punctum b constituatur dimidium recti anguli sub a b o, & educta b o in utrāq; partē, diuidat ipsas s t, r y, punctis t y: & fiat sicut d ad duplā ipsius c, ita t y ad ipsam u. & circa t y describatᷣ ellipsis, ita ut eductæ in dimidio recti possint ea quæ adiaceant ipsi u deficientia simili contento sub t y, & u. Et per b circa incoinciden tes has a b, k m describatur hyperbole b x, secans ellipsim in x: & ducatur ab x per pendicularis x e ad ipsam a b, & educatur in p, & per x ducatur æquedistans ipsi a b ipsa l x n, & educantur k a, m b ad l, h: & ipsa m e iuncta, educatur & concurrat ipsi k n in h. Quoniam igitur b x est hyperbole, & incoincidentes hæ h k, k m, contentum sub n x, x p æquatur contento sub a b, b m, per octauum theorema secundi libri Elementorum conicorum Apollonij. Idcirco ipsa k e l recta est. Ponatᷣ itaq; a f æqualis ipsi h a, & ipsa b g ipsi l b. Quoniā igiᷣ est sicut dupla ipsius c ad ipsam d, ita ipsa u ad t y. Sicut autem ipsa u ad t y, ita contentum sub t o, o y ad quadratum x o, per uigesimum theorema primi libri Elementorū conicorum Apollonij. Et ideo sicut dupla ipsius c ad ipsam d, ita cōtentū sub t o, o y, ad quadratū x o. Et quoniam est sicut t b ad b o, ita s b ad b e: & componenti, sicut t o ad o b, ita s e ad e b. Verum sicut b o ad o y, ita b e ad e r. Per æquam igitur, sicut t o ad o y, ita s e ad e r. Sicut ergo contentum sub t o, o y ad quadratum o y, ita contentum sub s e, r e ad quadratum e r: & permutatim, sicut contentum sub t o, o y ad contentū sub s e, e r, ita quadratum o y ad quadratum e r. Verum quadratum o y ad quadratum e r duplum est, quia & quadratum b o ad quadratum b e. nam b e æqualis est ipsi e o, quia uterq; angulorum ad b & o est dimidium recti. Igitur cōtentum sub t o, o y duplum est contento sub s e, e r. Quoniam igitur ostensum est, sicut dupla ipsius c ad ipsam d, ita contentum sub t o, o y, ad quadratum x o, & antecedentium dimidia. Sicut ergo c ad d, ita contentū sub r e, e s, ad quadratū x o, & ad quadratū e g, cum x o æqualis sit ipsi e g, quia utraq; earum est æqualis utriq; simul l b, b e. Quoniam igitur est sicut utraq; simul h a, a e, ad utramq; simul m b, b e: sic utraq; simul k a, a e, ad utramq; simul l b, b e. Vtraq; enim earum proportionum est eadem proportioni a e ad e b. Contentum igitur sub utraq; simul h a, a f. & utraque simul l b, b e æquatur contento sub utraq; simul k a, a e, & utraq; simul m b, b e. Verum utriq; simul h a, a e æqualis est ipsa f e: & utriq; simul l b, b e æqualis est ipsa e g. utriq; simul k a, a e æqualis est ipsa r e: utriq; simul m b, b e æqualis est ipsa e s. Contentum igitur sub f e, e g æquatur contento sub r e, e s. Verum sicut c ad d, ita contentum sub r e, e s ad quadratum e g. Et sicut c ad d, ita contentum sub f e, e g, ad quadratum e g. Verum sicut contentum sub f e, e g ad quadratum e g, ita f e ad e g, & ideo sicut c ad d, ita f e ad e g. Et quoniam est sicut m b ad b e, ita h a ad a e, & h a æquatur ipsi f a. Sicut ergo m b ad b e, ita f a ad a e. eadem ratione sicut k a ad a e, ita g b ad b e. Recta igitur data ipsa a b, & altera itē data k a, & proportione c ad d, sumptum est in ipsa a b quoddam punctum, puta e, & adiectæ rectæ hæ f a, g b: & facta est f e ad e g in data proportione. Item sicut data m b ad b e, ita f a ad a e. Sicut autem ipsa k a data ad a e, ita g b ad b e: quod fuerat faciendum.

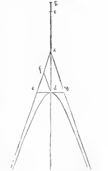
His igitur ita demonstratis, potest data sphæra secari in propornonem datam, hoc modo. Esto enim datæ sphæræ diametros a b, proportio autem quam opus sit partes sphæræ inter se habere, sit c ad d, centrum sphæræ sit c: & sumatur in a b punctum f, & adijciantur g a, h b, ita ut sicut c ad d, ita sit g f ad f h. Item ut sit sicut g a ad a f, ita e b data ad b f. ut autem h b ad b f, ita eadem data e a ad a f. Hoc autem quo pacto fieri possit, prius demonstratum est. & per ipsum f ducatur k f l ad angulos rectos ipsi a b, & per k l planum perductum erectum ad ipsam a b secet ipsam sphæram. Dico itaq;, eas sphęræ portiones habere inuicem proportio-

nem quæ est c ad d. quoniam enim est sicut g a ad a f, ita e b ad b f. componenti, sicut f g ad f a, ita utraque simul e b, b f, ad b f. Conus igitur basem habẽs circulum circa diametrum k l, & altitudinem f g, æquatur portioni sphæræ basem eandem



habenti, altitudinem autem f a. Rursus quoniam sicut h b ad b f, ita e a ad a f. & componenti, sicut h f ad b f, ita utraq; simul e a, a f ad a f. Igitur conus basem habens circulum circa diametrum k, altitudinem ipsam f h, æquatur portioni sphæræ eandem basem habenti, & altitudinem ipsam b f. Quoniam igitur dicti coni eadem in base constantes, habentur inuicem sicut eorum altitudines, hoc est sicut h f ad f g, hoc est c ad d. Portiones igitur sphæræ inuicem habent proportionem datam, quod initiò fuerat faciendum.

Quo autem pacto per punctum datum describi circa datas incoincidentes hyperbole debeat, hoc modo ostendemus: quoniã non inde ponitur in conicis Elementis. Sint duæ rectæ c a, a b complexæ quemcunq; angulum ad a, & detur punctum quoddam puta d, & proponatur per d circa incoincidentes has c a, a b describere hyperbolen. iungatur a d, & ducatur a d e, & ponatur ipsa d a æqualis ipsi a e, & educatur per d ipsa d f æquedistans ipsi a b, & ponatur f c æqualis ipsi a f, & iungat̃ c d, & educatur ad b: & quadratũ c b sit æquale contento sub d e, e g: & educta a d circa eam describat̃ hyperbole per d, ita ut deductæ possint ea quæ iuxta e g addẽtia simile cõtento sub d e, e g. Dico quod hyperbolæ descriptæ sũt incoincidẽtes c a, a b. Quoniã em̃ d f est æquedistãs ipsi b a, & ipsa c f æqualis ipsi f a: igit̃ c d est ęqualis ipsi d b. Igit̃ quadtatũ c b quadruplũ est quadrato d c, & quadtatũ c b æquat̃ contento sub d e, e g. Igit̃ hæc a, a b sunt incoincidentes ipsi hyperbolæ, per primum theorema secũdi libri Elementorum conicorum Apollonij.



IN COMPOSITIONEM QVARTI.

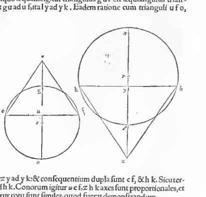
IN compositione autem producens diametrũ sphæræ ipsam d b, & ponens dimidium eius æquale ipsi b f, & diuidens eam in datam proportionem puncto h, & in d b sumens

mens q, ita ut sit sicut q f ad h f, ita quadratum b d ad quadratum d q, & eadem apparans quæ prius dicit, quod fiat sicut utraq; simul k d, d q ad d q, ita r q ad q b, & ponit ipsum r inter h f. Quod autem hoc sic habeatur, est ostendendum. Quoniam enim sicut utraque simul k d, d q ad d q, ita r q ad q b, diuidenti erit k d ad d q, sicut r b ad q b. Et permutatim, sicut k d ad r b, ita d q ad q b. Verum d q maior est ipsa q b. igitur k b maior r b, hoc est f b ipsa b r: quare punctum r inter ipsum b & f cadet. Quod autem & extra h, similiter ostendetur eis quæ in resolutione præcesserunt, in tota theorematis compositione. Colligitur enim, quod est sicut r q ad q l, ita f h ad h b. Quare componenti, & propterea fit consequens supradictis, & his quæ sunt istic dicta demonstratio.

Et per æquam in proportionalitate perturbata, &c. Perturbatā proportionalitatem in Elementis didicimus, quando tribus magnitudinibus, & alijs numero totidem sit, sicut antecedens ad consequens in primis magnitudinibus, ita in secundis antecedens ad consequens. Sicut autem consequens ad aliud quoddam in primis, ita in secundis aliud quoddam ad antecedens. & istic igitur ostensum est, sicut antecedens r l ad consequens l d, ita antecedens q f ad consequens f h. Sicut autem consequens l d ad aliud quoddam d q, ita aliud quoddam a f ad antecedens q f. Sequitur igitur, ut ostensum est per æquam in quinto Elementorum, sicut r l ad l q, ita b f ad f h.

IN QVINTO.

ET quoniam portio e f g est similis portioni h k l, conus igitur e f o similis est cono z h k. Intelligātur enim descriptiones seorsum positæ, & iunctæ e g, g f, e o, o f, h l, l k, h x, x k. Quoniam igitur portiones e f g, h k l similes sint inter se, erūt anguli e g f, h l k æquales: quare & eorum dimidia. & recti sunt hi, qui ad u, y. Igitur reliquus reliquo æqualis. igitur triangulus g u f est æquiangulus triangulo l y k. & est sicut g u ad u f, ita l y ad y k. Eadem ratione cum trianguli u f o, y k x sint inuicem æquianguli, erit sicut f u ad k y, ita f o ad k x, & u o ad y x. per æquam igitur sicut g u ad u o, ita l y ad y x. & cōponēti, sicut g o ad o u, ita l x ad x y. & antecedentiū dimidia sūt f o, & r x. quare per æquam. et cōponenti, sicut utraq; simul f o, o u, ad o u, hoc est ω u ad u g: sic utraq; simul r x, x y ad x y, hoc est z y ad y l. Verum sicut g u ad u f, ita l y ad y k. per æquam ergo, sicut ω u ad u f, ita z y ad y k: & consequentium dupla sunt e f, & h k. Sic ergo ω u ad f e, ita z y ad h k. Conorum igitur ω e f, z h k axes sunt proportionales, et diametri basium. igitur coni sunt similes, quod fuerat demonstrandum.



Proportio autem ω u ad e f data. Quoniam enim portiones sphærarum datæ sunt, & diametri basium datæ, & altitudines portionum. quare e f data, & g u. Igi

tur eorum dimidia data erunt: quare & quadrata earum, & quadratum e u æquatur contento sub g u, u o. Si autem datum iuxta datam applicetur, facit latitudinẽ datam. igitur u o data. Verum & u g, igitur tota diametros sphæræ data: idcirco & eius dimidia s o data. uerum & o u data: igitur proportio s o ad o u data. & cõponẽti, utriusque simul s o, o u ad ipsam o u, proportio data, hoc est ω u ad u g, & ipsa u g data. igitur & ω u data. Verum & e f data. quare & proportio ω u ad e f data. Eadem autem unique dicerentur in portione a b c, & colligetur proportio q t ad a b data Et quia a b data est, igitur & q t data.

Quod autem si portiones datæ sunt, earum altitudines sint datæ, antea quidẽ constat. Verum ut hoc quoque coordinationi datorum consequenter colligi uideatur, dicetur. Quoniam enim portiones sunt datæ positione & magnitudine, & e f data, erit angulus in portione datus. Quare & eius dimidium. & si intelligamus iunctam e g, dato eo qui ad u recto, erit reliquus datus. & triangulus e g u datus specie. quare & proportio e u ad u g data erit. & e u data est, cum sit ipsius e f dimidia, igitur u g data. Licet autem & aliter dicere quoniã e f est positione data, & a puncto u dato cum sit in duo æqua diuidens e f, educta est u g ad angulos rectos ipsi positione datæ, & circumferentia portionis positione data. Igitur g datũ est. Erat autem & u datum. quare & ipsa u g data.

Quoniam est sicut z y ad q t, hoc est quadratum b a ad quadratum h k, ita k h ad ipsam d. Quoniam enim factum fuit, sicut z y ad h k, ita q t ad d: erit permutatim sicut z y ad q t, ita h k ad d. Verum sicut z y ad q t, ita quadratum a b ad quadratũ h k. Conis enim existentibus æqualibus, bases eorum altitudinibus ecõtrario afficiunt. Sicut aũt bases ad inuicẽ, ita quadrata diametrorũ. Sicut ergo quadratum b a ad quadratũ h k, ita h k ad d. Et permutatim, sicut a b ad h k ita 9 ad d. Quandoquidem proportio b a ad 9, ostensa est eadem proportioni quadrati a b ad quadratum h k, et item k h ad d, et b a ad 9, eadem est proportioni k h ad d. Quare permutatim, sicut b a ad h k, ita 9 ad d.

IN COMPOSITIONEM QVINTI.

QVoniam itaque proportionales sunt a b, h k 9 d: erit sicut quadratum a b ad quadratum h k, ita h k ad d. Vniuersaliter enim si sint quatuor rectæ continue proportionales, erit quadratum primę ad quadratum secundæ, sicut secunda ad quartam. Quoniam enim sicut prima ad secundam, ita tertia ad quartam, erit permutatim sicut prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratum secũdæ. igitur sicut quadratum primæ ad quadratum secundæ, ita secunda ad quartam.

IN SEXTVM THEOREMA.

QVoniam k l m portio similis est portioni a b c, erit sicut r l ad r n, ita b p ad p h. Si enim iungantur hæ m n, c h, quoniam portiones sunt similes, erunt anguli ad b & l æquales: & anguli ad m c sunt recti, igitur reliquus reliquo, & trianguli sunt æquianguli, & est sicut b h ad h c, ita l n ad n m. Verum sicut h c ad h p, ita n m ad n r, propter similitudinem triangulorum c p h, & m r n. per æquam igitur, sicut b h ad h p, ita l n ad n r. quare diuidenn, sicut l p ad p h, ita l r ad r n.

Proportio autem e f ad b c data, igitur utraque earum data. Quoniam enim portiones sphærarum datæ sunt, & diametri basium datæ sunt, & altitudines portionum. quare ipsa a c data est, & eius dimidia p c data erit. & b p data est, & ambiunt angulum rectum: igitur b c data Eadem ratione & e f data. quare & proportio b c ad e f data.

IN COMPOSITIONEM SEXTI.

POrtiones ergo circulorum quæ in k m, a c insistunt, similes existunt. Si enim sicut in resolutione, iungantur hæ c h, m n, quia anguli ad c m sunt recti: & c p, & m r sunt perpendiculares: erunt mediæ proportionales inter partes basium. quare erit sicut prima b p ad tertiam p h, ita quadratũ primæ b p ad quadratum

dratum secundæ c p. Eadem ratione sicut l r ad r n, ita quadratum l r ad quadratũ r m. Sicut ergo b p ad p c, ita l r ad r m, & latera circa angulos æquales sunt proportionalia: igitur trianguli æquianguli igitur anguli ad b l sunt æquales: & eorum dupli, qui sunt in portionibus. igitur portiones sunt similes.

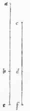
IN SEPTIMVM THEOREMA.

PRoportio igitur utriusque simul e d, d f ad d f data. Quoniam enim proportio utriusq; simul e d, d f ad d f est data, si magnitudo data habeat ad aliquam sui partem proportionem datam, & ad reliquam habebit propotnonem datam: quare utraq; simul e d, d f ad e d habet proportionem datam. Quoniam igitur utraque e d, d f ad utramq; simul e d, d f, habent proportionem datam habebunt etiam inter se proportionem datam. Proportio igitur data e d ad d f, & e d data. quare reliqua f e dabitur. Quare & contentum sub d f, f b, hoc est quadratum a f, & ideo a f data erit. quare & tota ipsa a c. Aliter autem, dixeris ipsam a c daram esse. Quoniam enim diametros data est d b positione, & punctum f datum, ut petitũ est: & a dato f ducta est a c ad angulos rectos, erit ipsa a c positione data. uerum & circuli circumferentia: quare ipsa a c puncta data, & ipsa a f c data est.

Et quoniam utraque simul e d, d f ad d f maiorem proportionem habet, quàm utraq; simul e d, d b ad d b. Quoniam enim e d maior est q̃ dimidia ipsius d f, erit utraque simul e d, d f, maior quàm sesquialtera ipsius d f. Verum utraque simul e d d b est ipsius d b sesquialtera: igitur e d, d f ad ipsam d f maiorem proportionẽ habet, quàm e d, d b ad d b. Aut aliter, quoniam ipsa d b est maior ipsa d f, alia autem quædam e d: igitur e d habet ad d f maiorem proportionem, quàm e d ad d b. componenti utraq; simul e d, d f ad d f, habet maiorem proportionem, q̃ utraq; simul e d, d b ad d b. Cõpositio theorematis manifesta est per ea quę istic dicta sunt.

IN OCTAVVM THEOREMA.

IPsa h f ad ipsam f g minorem habet proportionem, quàm duplicatam eam quã habet quadratum b a ad quadratum a d: hoc est ipsa b f ad f d. Quoniam enim in triangulo rectangulo ducta est ab angulo recto a f perpendicularis, cum trianguli ad perpendicularem similes existant, erit sicut f b ad b a, ita a b ad b d. Et sicut prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratum secundæ, & quadratum secundæ ad quadratum tertiæ, un superius ostensum fuit. Sicut ergo f b ad b d, ita quadratum a b ad quadratum b d. Verum sicut b d ad d f, ita quadratum b d ad quadratum d a. Sicut enim prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratũ secundæ. Et per æquam sicut quadratum b a ad quadratũ d a, ita b f ad f d. Colligetur autem idem & aliter hoc modo. Quoniam enim sicut b f ad f d, ita cõtentum sub f b, b d ad contentum sub b d, d f, ipsa b d cõmuni altitudine sumpta. Est autem contentum sub f b, b d æquale quadrato b a. Cõtento autem sub b d, d f ęquatur quadratum d a. Sicut ergo quadratum b a ad quadratum a d, ita b f ad f d. Et quoniam h f habet ad f k minorem proportionẽ, quàm h b ad b k. Vniuersaliter enim si sint duæ magnitudines inæquales, quibus aliæ æquales addantur, maior habet ad minorem maiorem proportionem, quàm compositum ad compositum. Sunt enim duæ rectæ inęquales a b, c d: quibus addantur b e, d f æquales. Dico quod a b ad c d maiorem proportionem habet, quàm a e ad c f. Quoniam enim maior est a b ipsa c d, a b ad b e maiorem habet proportionem, quàm c d ad b e, hoc est ad d f. Igitur & componenti, a e ad e b maiorem habet proportionem, quàm c f ad f d, ex prædemonstratis. & euersim, a e ad a b minorem, q̃ c f ad c d. quare permutatim constabit res ipsa.

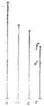


Contentum igitur sub b f, f g minus est quadrato f k. Si enim sint tres rectæ continuæ, sicuti hæ a b c, ita ut a habeat ad b minorem proportionem, quàm b ad c, contentum sub extremis minus erit quadrato mediæ. Si enim fecerimus sicut a ad b, ita b ad quandam aliam, ipsa erit maior ipsa c, siquidem debeat ad eam habere minorē proportionem, quàm c: & tunc erit cōtentum sub a, & sub maiore ipsa c, æquale quadrato k. quare contentū sub a c minus est quadrato b.



Contentum igitur sub h f, f g ad quadratum f g, minorem proportionem habet, quàm quadratum k f ad quadratum f g. Sicut enim h f ad f g, ita contentum sub h f, f g ad quadratum f g. Contentum autem sub h f, f g, quadrato f g minus est: maius autem ad idem maiorem habet proportionem, quàm minus.

Et quoniam b e est æqualis ipsi d e, erit igitur contentum sub b f, f d minus contento sub b e, e d. contentum autem sub b e, e d æquatur quadrato e d. contentum autem sub b f, f d, cum quadrato e f, æquatur eidem. Et cōstat, quod quanto abfuit à bipertitione ipsum f maiori minus est, contento sub æqualibus. Cum maiore enim eo quod fit ab intermedia diuisionum, æquatur cōtento sub æqualibus. quare recta, & si per æqualia diuidatur, per pūctum aliud atque aliud, contentum sub partibus propinquioribus bipertitioni, maius est cōtento sub partibus remotioribus. Igitur f b ad b e minorē proportionem habet, quàm e d ad d f. Vniuersaliter autem si sint quatuor termini, puta a b, b c, c d, d e: et contentū sub a b, d e minus sit cōtento sub b c, c d. tunc a b ad b c habet minorem proportionem, quàm c d ad d e. Esto enim contentum sub b c, c d, æquale contēto sub a b, d f. Est igitur sicut a b ad b c, ita c d ad d f: & d f est maior d e: igitur c d habet ad d e maiorem proportionem, quàm ad d f. Quare a b habet ad b e minorem proportionem, quàm c d ad d e.



Est igitur sicut h b ad b k, ita quadratum h n ad quadratum n k. Quoniam enim quadratum b n æquatur cōtento sub h b, b k. erūt tres rectæ proportionales, sicut h b ad b n, ita b n ad b k. & sicut prima h b ad tertiam b k, ita quadratum secundæ ad quadratum tertiæ, hoc est quadratum b n ad quadratum b k, uti superius demonstratū fuit. Rursus quoniam est sicut h b ad b n, ita b n ad b k. Componenti, sicut b n ad b n, ita k n ad b k: & permutatim, sicut h n ad n k, ita b n ad b k. Igitur sicut quadratum h n ad quadratum n k, ita quadratum n b ad quadratum b k. Verū sicut quadratum n b ad quadratum b k: ita esse ostensum est h b ad b k. Igitur sicut h b ad b k, ita quadratum h n ad quadratum n k.

Quadratum autem h f, ad quadratum f k, maiorem habet proportionē, quàm quadratum h n ad quadratum n k. Rursus duabus inæqualibus h f, k f adijciatur n f, & per supradictum habet h f ad f k, maiorem proportionē, quàm h n ad n k. quare & earum duplæ. igitur quadratum h f ad quadratum f k, maiorem habet proportionem, quàm quadratum h n ad quadratum n k, hoc est h b ad b k, hoc est h b ad b e, hoc est k f ad f g.

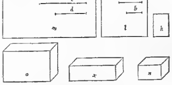
Igitur h f ad f g maiorem habet proportionem, quàm sesquialteram eius, quæ est k f ad f g. Intelligantur enim seorsum positæ rectæ, puta a b, c, d: ita ut quadratum

tum a b ad quadratum c maiorem habeat proportionē, quàm c ad d. Dico quod a b ad d maiorem habet, quàm sesquialteram eius quam habet c ad d. Sumatur enim media inter c & d proportionalis e. Quoniam igitur quadratum a b ad quadratum c maiorem proportionem habet, quàm c ad d. Verum quadrati a b ad quadratum c, est proportio dupla, eius quæ est à b ad c. Illa uero quæ est c ad d, dupla est eius quę est c ad e. Igitur a b habet ad c maiorem proportionem, quàm c ad e. Fiat autem sicut e ad c, ita c ad b f. Et quoniam quatuor rectæ consequenter sunt proportionales b f, c, e, d: igitur b f habet ad d proportionem, quæ est b f, ad c triplicatam. Idem est c ad e. Habet autem & c ad d proportionē, quæ est c ad e duplicatam. Igitur b f ad d habet proportionem sesquialteram, eius quæ est c ad d. Quare a b ad d maiorem proportionem habet, quàm sesquialteram eius, quam habet c ad d.



LIMMA AD SEQVENTIA.

SVnto quatuor termini, a b c d. Dico quod proportio composita ex his, ex contento sub a b, ad quadratum c, & ex proportione b ad d, eadem est proportioni collectæ ex contento sub a b, super ipsam b ad quadratum c, super ipsam d. Esto itaque contento sub a b æquale k, & quadrato c æquale l, & fiat sicut b ad d, ita l ad m. Igitur proportio k ad m componitur ex k ad l, hoc est contenti sub a b ad quadratum c: & l ad m, hoc est b ad d. Etenim k multiplicans b faciat n, ipsa uero l multiplicans b faciat x, & multiplicans d faciat o.



Quoniam igitur contentum sub a b est k, & k multiplicans b facit n: igitur n erit contentum sub a b, super b. Rursus quoniam quadratum c est l, & l multiplicatus d facit o, & multiplicans b facit x: igitur o est quadratum c super d. quare proportio contenti sub a b, super b, ad quadratū c super d, eadem est proportioni n ad o. Oportet igitur ostendere, quod proportio k ad m est sicut n ad o. Quoniam uterque k l multiplicans b, produxit utrumque n x. Est igitur sicut k ad l, ita n ad x. Rursus quoniam l multiplicans utrumque b d produxit, utrumque x o erit sicut b ad d, ita x ad o. Verum sicut b ad d, ita l ad m. Igitur sicut l ad m, ita x ad o. Igitur hi k l m sunt bini, & bini cum his n x o, in eadem proportione. Per æquam igitur sicut k ad m, ita n ad o. Et est k ad m proportio eadem compositæ ex cōtento sub a b ad quadratū c, & ex ea quam habet b ad d. Itē n ad o est eadem proportio proportioni contenti sub a b, super b, ad quadratum c super d. Igitur proportio composita ex proportione contenti sub a b ad quadratum c, & ex b ad d, eadē est proportioni contenti sub a b super b ad quadratum c super d. Manifestum autem est, quod cōtentum sub a b super b, æquatur quadrato b super a. Quoniam enim sicut a ad b, ita contentum sub a b ad quadratum b, sumpta b communi altitudine

tudine: si quatuor termini fuerint proportionales, contentum sub extremis æquatur contento sub medijs. Contentum igitur sub a b super b, æquatur quadrato b super a.

IN ALITER OCTAVI.

Dictum est in præassumptis, quod si duarum magnitudinũ medium quoddam sumatur, proportio extremitatum componitur ex proportione primi ad medium, & medij ad tertium. Similiter fiet, & si multa media sumãtur extremitatum, proportio componitur ex proportionibus quas habent media consequenter collecta inter se. Et istic dicit, quod proportio portionis b a d ad portionẽ b c d cõponitur ex ea quam habet portio b a d ad conũ cuius basis circulus circa diametrum b d, uertex uero punctum a. Et idem conus ad conum basem eandem habẽtem uerticem punctum c. Et dictus conus ad portionem b c d, portione uidelicet d a b, & ipsa d c b extremis, sumptis medijs dictis conis. Verum portionis b a d ad conum b a d est proportio g h ad h c, per corolarium secundi theorematis secundi libri. Dicebatur enim, portionem ad conum in seipsa constitutum habere eã proportionem, quam habet utraq; simul quæ ex centro sphæræ, & altitudo reliquæ portionis ad altitudinem reliquæ portionis. Proportio autem coni b a d ad conum b c d est, quæ a h ad h c. Quoniam enim eiusdem basis existentes inuicem se habent sicut eorum altitudines: coni autem b c d ad portionem b c d, sicut a h ad h f, propter corolarium dictum conuersim sumptum. Quare proportio portionis b a d, ad portionem b c d, componitur ex proportione g h ad h c, & a h ad h c, & a h ad h f. Proportio autem composita ex g h ad h c, & a h ad h c, est sicut proportio contenti sub g h, h a ad quadratum h c. nam parallelogramma æquiangula habent inuicem proportionem compositam ex proportione laterum. Proportio autem composita ex proportione contenti sub g h, h a ad quadratum c h, & ex proportione a h ad h f eadem est proportioni contenti sub g h, h a in h a, ad quadratũ c h in h f, ut ostensum est in limmate præassumpto. Proportio autem contenti sub g h, h a in h a, ad quadratum c h in h f, eadem est proportioni quadrati a b in h g, ad quadratum c h in h f. Et hoc quoq; demonstratum fuit in præassumpto. Proportio igitur portionis ad portionem, eadem est proportioni quadrati a h in h g, ad quadratum c h in h f. Quoniam igitur ostendere oportet, quod portio ad portionem minorem habet proportionem, quàm duplam eam quæ est superficiei ad superficiem: oportet igitur ostendere, quod proportio quadrati a h in h g, ad quadratum c h in h f minorem habet proportionem, quam duplicatam eam quã habet superficies portionis b a d ad superficiem b c d, hoc est quam habet quadratum a b ad quadratum b c. Verum sicut quadratum a b ad quadratum b c, ita a h ad h c. Ostensum est enim hoc in theorematibus præcedentibus. Oportet igitur ostendere, quod quadratum a h in h g, ad quadratum c h in h f, minorem habet proportionem, quàm eam duplicatam quam habet a h ad h c. Verum proportionis a h ad h c dupla est proportio quadrati a h ad quadratum h c. Ostendere igitur oportet, quod quadratum a h in h g, ad quadratũ c h in h f, habet minorem proportionem, quàm quadratum a h ad quadratum h c. Verum sicut quadratum a h ad quadratum h c, sumpta h g communi altitudine, ita quadratum a h in b g ad quadratum c h in h g. Igitur ostendere oportet, quod quadratum a h in h g, ad quadratum c h in h f, minorem habeat proportionem, quám idem quadratũ a h in h g, ad quadratum h c in h g. Ad quod autem habet idem minorem proportionem, ipsum est maius. Oportet igitur ostẽdere, quod quadratum c h in h f, maius est quadrato c h in h g, hoc est quod maior sit h f quàm h g. Est autem hoc manifestum. inæqualib. enim his a h, h c æquales sunt additæ f a, c g. Hęc dicens ipse quidem non induxit compositionem, nos autem eam apponemus. Quoniam f h maior est ipsa h g, erit quadratum c b in h f, maius eodem in h g. Quare quadrati

tia h in h g ad quadratum c h in h f minorem habet proportionem, quàm idem ad quadratum c h in b g. Verum sicut quadratum a h in b g, ad quadratum c h in h g, ita quadratum a h ad quadratum h c. Igitur quadratum a h in h g, ad quadratum c h in h f, minorem proportionem habet, quàm quadratũ a b ad quadratum b c. Verum proportio quadrati a b, ad quadratum h c, dupla est eius quæ est a h ad h c. Quadratum igitur a h in h g, ad quadratũ c h in h f minorem habet proportionem, quàm eam duplicatam quæ est a h ad h c. Verum portionum proportio est ostensa eadem ei quæ est quadrati a h in o g h, ad quadratũ c b in h f. Et proportio superficierum ea est, quam habet a h ad h c. Portio igitur ad portionem habet minorẽ proportionẽ, quàm sit ea duplicata, quæ est superficiei ad superficiẽ.

Deinceps autem resoluens reliquam partem theorematis, inducit: Dixi iam quod portio maior habet ad minorem, maiorem proportionem, quàm sesquialteram eius quæ est superficiei ad superficiem. Verum portionum quidem proportio ostẽsa est eadem illi quam habet quadratum a h in h g, ad quadratum c h in h f. Proportionis igitur superficiei ad superficiem illa est sesquialtera, quã cubus a b habet ad cubum b c. nam eius quę est a b ad b c, illa dupla est quæ est quadrati a b ad quadratũ b c. tripla uero quę est cubi a b, ad cubum b c. Sicut enim a b ad b c, ita a h ad h b, propter similitudinem triangulorum a h b, a b c. Si autem sint quatuor proportionales rectæ, solida quoq; ab eis similia inter se & similiter descripta sunt proportionalia. quare cubus a h ad cubum h b habet proportionẽ sesquialteram eius quam habet quadratum a b ad quadratum b c. hoc est superficies ad superficiem. Verum sicut portio ad portionem, ita quadratum a h in b g, ad quadratum c h in h f. Dico igitur, quod quadratũ a h in h g, ad quadratum c h in h f, maiorem proportionem habet, quàm cubus a h ad cubum h b, hoc est quàm quadrati a h ad quadratum h b, & ipsius a h ad h b. nam proportio quadrati a h ad quadratum h b, assumpta ea quæ est a h ad h b, eadem est ei quæ est cubi a h ad cubũ h b. nam utraq; eiusdem est tripla. Proportio autem quadrati a h ad quadratum h b, cum proportione a b ad h b, est ea quæ est quadrati a h ad contentum sub c h, h b. Quoniã enim proportio a h ad h b eadem est proportioni b h ad h c, ipsa b h media proportionali existente, proportio quadrati a h ad quadratum h b, cũ proportione a h ad h b eadem est proportioni quadrati a h ad quadratum b b, cum portione b h ad h c. uerum proportio b h ad h c eadem est proportioni quadrati b h ad contentum sub b h, h c, sumpta b h communi altitudine. quare proportio quadrati a h ad quadratum h b, cum proportione a h ad h b, eadem est proportioni quadrati a h ad quadratum b b, cum proportione quadrati b b ad contentum sub b h, h c. Verum proportio quadrati a h ad contentum sub b h, h c, est composita ex proportione quadrati a h ad quadratum h b, & quadrati b h ad contentum sub b h, h c, quadrato b h sumpto medio. quare proportio quadrati a b ad quadratũ h b, cum proportione a h ad h b, eadem est proportioni quadrati a h ad contentũ sub b h, h c. quadrati aũt a h ad contentum sub b b, b c, proportio eadem est proportioni quadrati a h in h g, ad contentũ sub b h, b c in h g, sumpta cõmuni altitudine h g. Dico item, quod quadratũ a b in h g, ad quadratum c h in h f, maiorẽ habet proportionem, q̃ quadratum a h in h g, ad contentũ sub c h, h b in h g. Ad quod aũt idem maiorem habet proportionem, illud minus existit. Ostendendum igitur, quadratũ c b in h f esse minus contento sub b h, h c in h g. Idẽ est ac si ostendatur, quod quadratũ c h ad contentũ sub c h, h b minorem habeat proportionẽ, q̃ h g ad h f. Si enim fuerint quatuor termini, ueluti istic sunt, quadratum c h contentum sub c h, b b, & h g, et h f: & contentũ sub extremis minus sit contento sub medijs, tunc primus ad secundũ minorem proportionem habet, quàm tertius ad quartum, uti suprà ostensum fuit. Rationabiliter autẽ oportuerat ostendere, quadratum c h in h f maius esse contento sub c h, h b in b g. quod idem est ac si demõ-

stretur quod quadratum c h ad contentum sub c h, h b minorem habeat proportionem, quàm h g ad h f. Verum sicut quadratum c h ad contentum sub c h, h b, ita c h ad h b. Oportet ostendere quod c h ad h b minorem habeat proportionem, quàm h g ad h f. hoc est h g ad h f maiorem habet proportionem, quàm c h ad h b. Ducatur ab e k ad angulos rectos ipsi e c, & ab ipso b perpendicularis supra eam b l. Reliquum nobis est ostendere, quod g h ad h f maiorem proportionem habeat, quàm c h ad h b. Est autem ipsa h f æqualis utriq; simul h a, k e. nam a f equatur ei quæ ex centro. Ostendendũ est ergo, quod g h ad utramq; simul h a, k e maiorẽ habeat proportionem, quàm c h ad h b. Et ablata ab ipsa g h ipsa c h, & ab ipsa k e ipsa e l, æquali ipsi b h, oportebit ostendere quod reliqua c g ad reliquam utrãq; simul a h, k l maiorem proportionem habet, quàm c h ad h b. Quoniam enim oportet ostendete, quod g h ad utramq; simul h a, k e maiorem proportionem habeat quàm c h ad h b. Et permutatim, g h ad h c maiorem habeat proportionem, quàm utraq; simul h a, k e ad h b, hoc est ad l e. Et diuidenti g c ad c h maiorem habet proportionem, quàm utraq; simul h a, k l ad l e, hoc est b h. Permutatim quoque g c ad utramq; simul h a, k l maiorem habet proportionem, quàm c h ad b h. Item sicut c h ad b h, ita b h ad h a, hoc est l e ad a h. Quoniam igitur g c ad utramque simul h a, l k maiorem habet proportionem, quàm l e ad a h. Et permutatim, quoniam c g, hoc est k e ad e l maiorem habet proportionem, quàm utraque simul k l, h a ad h a. diuidenti, k l ad l e maiorem proportionem habet, quàm ipsa k l ad h a, hoc est quod minor est l e ipsa h a.

Deinceps autem nos compositionem adijciemus. quoniam l e minor est a h, habebit k l ad l e maiorem proportionem, quàm k l ad a h. Componenti habet k e ad l e maiorem proportionem, quàm utraq; simul k l, h a ad h a. Ipsa uero l e est æqualis ipsi b h. Igitur g c ad b h maiorem habet proportionem, quàm utraque simul k l, a h ad a h. Permutatim igitur, g c ad utramq; simul k l, a b maiorem proportionem habet, quàm b h ad h a, hoc est c h ad h b. Permutatim ergo g c ad c h maiorem proportionem habet, quàm utraq; simul k l, a h ad h b. Componenti igitur g h ad h c maiorem proportionem habet, quàm utraque simul k l, a h, h b ad h b, hoc est utraq; simul a h, k e ad b b. Est autem k e æqualis ipsi a f, igitur permutatim g h ad h f maiorem proportionem habet quàm c h ad h b. Sicut autem c h ad h b, ita quadratum c h ad contentum sub c h, h b. Igitur ipsa g h ad h f maiorem habet proportionem, quàm quadratum c h ad contentum sub c h, h b. Et per prius dicta quadratum c h in h f minus est cõtento sub c h, h b. Igitur quadratum a h in h g, ad quadratum c h in h f, maiorem proportionem habet, quàm ipsum quadratum a h in b g, ad contentum sub c h, h b in h g: hoc est quadratum a h ad contentum sub c h, h g. Proportio autem quadrati a h ad contentum sub c h, h b, sumpto medio quadrato b h, cõponitur ex proportione quadrati a h ad quadratum h b, & quadrati b h ad contentum sub b h, h c. Proportio autem quadrati b h ad contentum sub b h, h c, eadem est proportioni b h ad h c, hoc est a h ad b h. Igitur quadratum a h in g h, ad quadratum c h in h f, maiorem habet proportionem, quàm quadratum a h ad quadratum h b cum proportione a h ad h b. Proportio autem composita ex proportione quadrati a h ad quadratum h b, & ipsa a h ad h b, eadẽ est proportioni cubi a h ad cubum h b, hoc est cubi a b ad cubum b c. Quadratũ igitur a h in h g, ad quadratum c h in h f, maiorem habet proportionem, quàm cubus a b ad cubum b c. Verum proportio quadrati a h in h g, ad quadratum c h in h f, est ostensa eadem esse proportioni portionum. Proportio uero cubi a b ad cubum b c ostensa e stesse sesquialtera proportioni superficierũ. Portio igitur ad portionem habet maiorem proportionem, quàm sesquialteram eius quæ est superficiei ad superficiem.

IN NONVM THEOREMA.

Constat autem, quod ipsa b a minor est ipsa a k, quàm dupla potẽtia, ea uero quę ex centro, maior quàm dupla. Coniũcta enim ab ipso b ad cẽtrum b o, & angulo ad centrum facto obtuso b o a, erit quadratum a b maius quadratis laterum angulum obtusum complexorum. cumq; sint ęqualia, quadrato unius eorũ, puta quæ ex centro eius, maius erit quàm duplum. Item cum quadratum a b sit æquale quadratis a k, b b, & quadratum a k sit maius quadrato k b, erit quadratũ a b minus quàm duplum quadrati a k. Et hæc quidem in figura in qua est signũ tale ∂. In altera uero figura contraria istis conuenienter dicentur.

Esto e n æqualis ipsi e l, & à circulo circa h f diametrũ conus esto uerticem habens punctum n. Iste autem æquatur hemisphærio secundum circumferentiam h e f. Quoniam enim cylindrus basem habens circulum circa diametrum h f, altitudinem d e, est triplus coni basim eandem & altitudinem æqualem habentis, & sesquialter hemisphærij, erit tale hemisphærium duplum eiusdem coni. Est autẽ conus basem habens circulum circa diametrum h f, et altitudinem l n, duplus eiusdem coni. Igitur hemisphærium ęquatur cono, basem habenti circulum circa diametrum h f, & altitudinem l n.

Contentum autem sub r c, a r, maius est contento sub a k. k c, quia habet latus suum minus latere minore alterius maius. Dictum est enim superius, quod si recta diuidatur in duo inæqualia, alio & alio puncto, contentum sub partibus propinquioribus bipertitioni, maius est contento sub remotioribus. Ac si dicat, quia latus minus suum habeat latere minore alterius maius. nam quanto minus habuerit, tanto discedet ab æquipartitione.

Quadratum aũt a r æquatur contento sub a k, c x. nam dimidiũ est quadrati a b. Si enim iungatur b c, quia in triangulo rectangulo ducta est à recto angulo perpendicularis b k, & trianguli circa cathetum sunt similes inuicem & toti, quod sub c a, a k continetur, æquatur quadrato a b. quare & contentum sub dimidia ipsius c a & a k, hoc est c x, a k, æquatur dimidio quadrati a b, hoc est quadrato a r. Maius est igitur utrumq; simul utroq; simul. quoniam contentum sub c x, a k, æquatur quadrato a r: & contentum sub a r, r c, maius est contento sub a k, k c. Si autem inæqualibus æqualia addantur, tota fient inæqualia, & maius id quod antea fuerit maius. Contento igitur sub a r, r c si addatur quadratum a r, & cõtento sub a k, k c contentum sub c x, a k: fiet contentum sub a r, r c cum quadrato a r, maius contento sub a k, k c, cum contento sub c x, a k. Verum contentum sub a r, r c cum quadrato a r, æquatur contento sub c a, a r, per secundum theorema secundi libri Elementorũ. Et contentũ sub a k, k c, cũ contento sub c x, a k, æquatur contento sub a k, k x per primum theorema secũdi libri eiusdem. Igitur contentum sub c a, a r, maius est contento sub a k, k x. Cõtento autem sub x k, k a, æquatur contentũ sub m k, k c. Supponitur enim, sicut x c ad c k, ita m a ad a k. quare componenti sicut x k, k c ad k c, sic m k ad k a: & contentum sub extremis, æquatur contento sub medijs. Cõtentum igitur sub x a, a k, æquanır contento sub m k, k c. Verum contento sub x k, k a, maius est cõtentum sub a c, a r. Igitur contentum sub a c, a r, maius est contento sub m k, k c. quare maiorem proportionem habet ipsa a c ad c k, quàm m k ad a r. Quoniam enim lineæ quatuor rectæ a c, c k, k m, a r sunt, & contentum sub prima c a, & quarta a r, maius est contento sub secunda c k, & tertia k m: habebit prima a c, ad secundam c k, maiorem proportionem, quàm tertia k m ad quartam a r. Quam autem c a habet ad c k, hanc habet quadratum a c ad quadratum b c. iuncta enim b c. Quia itaq; in triangulo rectangulo ab angulo recto est ducta cathetus, fit sicut a c ad c b, ita c b ad c k. Quare sicut prima a c ad tertiam c k, ita quadratum primæ a c ad quadratum c b. Sicut autem quadratum a c ad quadratum c b, ita quadratum a b ad quadratum b k, nam triangulus a b k

similis est triangulo a b c. Est igitur sicut a c ad c k, ita quadratum a b ad quadratũ b k. At uero a c habet ad c k maiorem proportionem, quam m k ad a r, & antecedentium dimidia, dimidium quadrari a b, quod est quadratum a r, ad quadratum b k, maiorem habet proportionem quàm dimidia ipsius m k ad ipsam a r, hoc est ipsa m k ad duplam ipsius a r. Verũ quadratum f l æquatur quadrato a r. quoniã ipsa a b posita est æqualis ipsi e f, & ipsa e f est ipsi r a potentia dupla. nam ipsa e l æqualis est ipsi a r. Et ipsa n l dupla est ipsius a r, quia & ipsius l f. Quare quadratum f l ad quadratum b k maiorem habet proportionem, quàm m k ad duplam ipsius a r, quæ est æqualis ipsi l n. maiorẽ ergo proportionẽ habet circulus circa diametrum h f constitutus, ad circulum circa diametrum b k, quàm m k ad n l. quare conus habens basem circulum circa diametrum h f, uerticem uero pũctum n, maior est cono basem habente circulum circa diametrum b d, uerticem uero m punctum. Si enim fecerimus sicut circulus circa diametrum f h, ad circulum circa diametrum b d, ita ipsam k m ad aliam quandam, erit ad minorem ipsa l n. Et erit conus habens basem circulum circa diametrum f h, altitudinem uero rectam minorem inuentam, æqualis ipsi cono m b d: quia eorum bases altitudinibus contrà afficiuntur. Et erit minor cono n h x, quia in eadem base ambo constituti habentur inuicem, uti eorum altitudines. Constat igitur, quod hemisphærium quod est secundum circumferentiam e f h, maius est portione quæ est secundum circumferentiam b a d.

EVTOCII ASCALONITAE COMMENTARII in secundum librum Archimedis de Sphæra & cylindro: expositione discursa Milesio Mechanico Isidoro nostro præceptori

EVTOCII ASCALONITAE COMMENTARII IN MENSVRATIONEM *circuli Archimedis.*

CONSEQVENS igitur fuit mihi, intentum meum prosequenti, qui ex his quæ ab Archimede scripta fuerũt, clarioribus & breuiori disciplina indigentibus inciderim, & ea quæ utcunque in eis discussione indiguerint, pro uirib. continua reddere eis, quæ à nobis in libro de Sphæra & cylindro scripta sunt. Cũ uotum sanè dignũ obtigerit, ut & maioribus, & quib. ampliori cura opus erit, nobis sit insistendũ: erit utiq; propositus nobis deinceps Archimedis libellus, cuius inscriptio est Circuli mensuratio, in quo uiri propositionem ex ipsa superscriptione percipimus. Vult enim ostendere, cui spacio rectilineo sit circulus æqualis, rem longè ante ipsum à clarissimis philosophis quæsitam. Constat enim hoc, id quæsitum esse quod Hippocrates Chius, & Antiphon cum studiosè inuestigassent, eos nobis paralogismos inuenerunt, quos illis exquisitè cognitos existimo qui Geometricam Eudemi historiam inspexerunt, & Ceria Aristotelica acceperũt. Verũ est quidem hic libellus, uti ait Heraclides in Archimedis uita, ad usum uitæ necessarius. Ostendit enim circumferentiam diametro triplam & minus septima parte, plus uero quantum sunt decem septuagesimæprimæ. Hoc autem, dicit, proximè demõstratum est; inuenta quidem uera est talis per quasdam spirales recta linea, quæ sit æqualis circumferentiæ dati circuli.

In

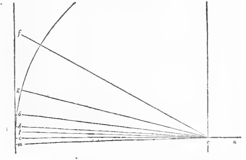
IN PRIMVM THEOREMA.

PRimum theorema his qui aliquantulum in mathematicis sint uersati, nullam uidetur habere difficilem perquisitionem, cum ipsa Archimedis uerba palàm exposita sint, & conclusionem propositioni restituant nulla parte neglecta parem. Videtur autem quadam re esse ad demonstrationem abusus, quę res nondum sit demonstrata. Nam exponens triangulum rectangulum, dicit: Habeat latus unum, ambiens angulum rectum, æquale ei quæ ex centro reliquum latus æquale circumferentiæ. Verum rectam circumferentiæ dati circuli æqualem sumere, neq; ante ipsum fuerat ostensum, neq; ab alio traditũ. Considerare tamẽ oportet, nihil præter id quod deceat, ab Archimede scriptum esse. nam circuli circumferentiam esse quandam magnitudinem, nulli prorsus dubium est. Puto autem, & hoc eorum quæ ad unum distant. Est autem rectæ eiusdem speciei, quanquam non utiq; appareat, posse circumferentiæ circuli rectam æqualem præstare. Verumtamen esse rectam quandam ipsi æqualem, à nullo quæsitum est. Quod igitur ab Archimede propositum est, tale est, triangulum rectangulum qui circa rectũ angulum habuerit latus unum, circumferẽtiæ circuli æquale, uti dictum est. Qua re propositum exponens, non ulla utiq; iudicabitur abusione. Admirabilis autẽ magis & istis uidebitur, quod ita supra magnitudinem quæsitorum claram & facilem inuentionem addiderit. Sicut autem dictum est, nulla inquisitione opus est primo theoremati. nam triangulus p o r, quod maior sit figura a f o m, et quod simpliciter circa datum circulum potest figura rectilinea describi, ita ut portiones quę inter circuli circumferentiam & latera circumscriptæ figuræ rectilineæ minores sunt spacio dato, apertè dictum est in his quæ in primo de Sphæra & cylindro conscripsimus.

IN TERTIVM THEOREMA.

IN hoc theoremate continenter iubemur, numero quocunq; dato radicem quadratam inuenire. Hanc autem in numero nõ quadrato præcisam inueniri non est possibile. Numerus enim in se multiplicatus producit quendam numerũ quadratum: partes autem in se multiplicatæ, non explent numerũ, sed partes. Quemadmodum uero oporteat radicem proxime producentem datum numerum inuenire, dictum est ab Herone in metricis, dictum & à Pappo & Theone, & à multis alijs, qui magnam Claudij Ptolemæi compositionem exposuerunt. Quare nõ est opus in hoc nos laborare, cũ liceat studiosis illud ab illis petere. Et angulus c e f, est terna pars recti. Si enim hexagoni circumferentiã bipertientes, eius dimidium ad tertiæ separantes iunxerimus ipsam e f, erit angulus c e f, tertia recti. nam circũferentia ad c assumpta, cum sit dimidia circũferentiæ hexagoni, est duodecima circuli pars. quare & angulus c e f, qui est ad centrum, est duodecima pars quatuor rectorum. quare est tertia unius recti. Igitur e f habet ad f c proportionem, quam 306 ad 153. Quod autem e f sit ipsius c f dupla, hinc manifestum est Si enim expro ducentes ipsam f c in c, & æqualem ei constituentes iunxerimus ab ipso e, erit angulus apud e duæ tertiæ recti, & angulus ad f duæ tertiæ recti. Igitur trianguli æquilateri est dimidium triangulus c e f, & quia basis æquilateri æquatur ipsi e f, bipertietur puncto c. igitur e f est dupla ipsius f c. Habet autem ipsa e c ad c f proportionem, quam 265 ad 153. quia enim e f ponitur 306. Si ipsa in seipsam multiplicetur, fient 93636. Ipsa autem c f est 153. quare quadratum eius erit 23409. Quoniam igitur quadratum e f æquatur quadratis harum e c, c f, si à quadrato e f quod est 93636. auferamus quadratum ipsius c f, 23409. relinquetur quadratum e c, quod est 70227. Cuius latus quadratum est 265. Et item pars quædam minima & insensibilis. Deficit enim potentia horum 265, à præciso duab. unitatibus. Multiplicationes autem subijciuntur. Diuidatur itaq; angulus e f c in duo æqua, ducta e g. Est igitur sicut f e ad e c, ita f g ad g c, per tertium theorema sexti libri E-

lementorũ Euclidis: & cõponẽti, ſicut utraq; ſimul fe, ecadec, ita fcad cg. Et permutatim, ſicut utraq; ſimul fe, ecadfc, ita ecad cg. Eſt autem utraq; ſimul ef, fe maior, quàm 571. Eſt autem fc, 153. Igitur utraque ſimul fe, ecadec, maiorem ha



bet proportionem, quàm 571 ad 153. quare ecad cg maiorem proportionem habet, quàm 571 ad 153. Igitur e cad gc potentia habet maiorem proportionem, q̃ 349450 ad 23409. Concludetur autem hoc ita. quoniam enim oſtenſum eſt, quod ecad cg maiorem habet proportionem, quàm 571 ad 153. ſi quis poſuerit ipſam ec eſſe 571, & ipſam cg 153, erit quadratum ipſius ec 326041. & quadratũ cg 23409, cum utraq; ſimul ſint æqualia, quadrato ipſius eg, quod eſt 349450. huius radix quadrata eſt 591, & $\frac{1}{8}$ proxime. nã quadratus huius 591 $\frac{1}{8}$ deeſt à præciſo una & uiginti unitatibus & 59 ſexageſimis quartis. Igitur ecad cg habet potentia proportionẽ, quam 349450 ad 23409. longitudine uero, quam 591, & $\frac{1}{8}$ proxime ad 153. Multiplicationes autem ſubijciuntur.

Rurſus in duo æqua diuidatur angulus gec ducta he, eadem ratione ipſa ec habebit ad ch maiorem proportionẽ, quàm 1162 $\frac{1}{8}$ ad 153. Fit enim per bipertitionem anguli, ſicut eg ad ec, ita gh ad hc. Et componenti, ſicut utraq; ſimul ge, ec ad ec, ita gcad ch: & permutatim, ſicut utraq; ſimul ge, ecad gc, ita ec ad ch. Et eſt quidem ec, 571, & pars quædam. At uero eg 591, & amplius quædã pars maioris. igitũ ſunt 1162 $\frac{1}{8}$. Eſt aũt gc 153 igitur utraq; ſimul ge, ecad gc maiorem proportionem habet, quàm 1162 $\frac{1}{8}$ ad 153.

Item he, habet ad hc maiorem proportionem, quàm 1173 $\frac{1}{8}$ ad 153. quoniam enim oſtenſum eſt ec habere ad hc maiorem proportionem, quam 1162 $\frac{1}{8}$ ad 153. Si quis ſuppoſuerit eas ſic habere, erit quadratum ec 1350534, & $\frac{33}{64}$. quadratum uero ch 23409. Quadratum ergo eh æquale quadratis harũ ec, ch erit 1373943, $\frac{33}{64}$ cuius latus eſt 1172 $\frac{1}{8}$ proxime. nam deeſt à præciſa potentia ipſius unitatibus 66. multiplicationes uero ſubijciuntur.

Item angulus hec diuidatur in duo æqua, ducta ek. Igitur ecad ek maiorem proportionẽ habet, quàm 2304 $\frac{1}{4}$ ad 153. Rurſus enim propter bipertitionem angu-

gulí h e c erit ſicut h e ad e c, ita h k ad c k. Et componenti, ſicut utraque ſimul h e, e c ad e c, ita h c ad c k. Et permutatim, ſicut utraque ſimul h e, e c ad h c, ita e c ad c k. Et quía oſtenſum eſt ipſam h e eſſe 1172 $\frac{1}{8}$. utraque ergo ſimul h e, e c, maior erit iſto 2334 $\frac{1}{4}$. & h c ponitur 153. Igitur utraque ſimul h e, e c ad h c maiorem habet proportionem, quàm 2334 $\frac{1}{4}$ ad 153. Igitur e k ad c k maiorem habet proportionem, quàm 2339 $\frac{1}{4}$ ad 153. Item quoniam ſupponitur e c 2334 $\frac{1}{4}$, erit quadratum ipſius e c 5448723 $\frac{3}{16}$. Quadratum uero ipſius c k 23409. Iſtis autem æquatur quadratum k e, quod erit 5472232 $\frac{3}{16}$. cuius latus quadratum eſt proxime 2339 $\frac{1}{4}$. deeſt ab eius præciſo quadrato unitatibus 41 $\frac{1}{2}$. multiplicationes uero ſubijciuntur.

Item diuidatur angulus k e c in duo æqua, ducta e l. Igitur e c ad e l maiorẽ habet proportionem, quàm 460 $\frac{1}{2}$ ad 153. Rurſus enim propter bipartitionem anguli ſicut k e ad e c, ita k l ad l c. Et componenti, ſicut utraq; ſimul k e, e c ad e c, ita k c ad l c. Et permutatim, ſicut utraq; ſimul k e, e c ad k c, ita e c ad l c. & k e eſt 2339 $\frac{1}{4}$. & pars inſuper quædam. & e c, 2334 $\frac{1}{4}$, & particula inſuper quædam. Igitur utraque ſimul k e, e c ad k c maiorem proportionem habet, quàm 4673 $\frac{1}{2}$ ad 153. Sicut autem utraq; ſimul k e, e c ad k c, ita e c ad c l. Igitur e c ad c l maiorem proportionẽ habet, quàm 4673 $\frac{1}{2}$ ad 153. Quoniam igitur angulus f e c exiſtens tertia pars recti, eſt duodecima pars quatuor rectorum, eius dimidium erit g e c pars uigeſimaquarta, cuius item dimidium h e c erit quadrageſimaoctaua, atque item huius dimidium k e c erit nonageſimaſexta. rurſus huius dimidium centeſima nonageſimaſecunda. Ponatur, ut dicit, angulus c e m æqualis ei, & educatur f c ad m. Angulus igitur l e m exiſtens duplus anguli l e c, erit nonageſimaſexta rectorum quatuor. quare ipſa l m erit latus polygoni habentis latera 96 circa circulum deſcripti. Quoniam igitur e l ad c l oſtenſa eſt habere maiorẽ proportionem, quàm 4673 $\frac{1}{2}$ ad 253. & eſt ipſa a c dupla ipſius e c, & l m ipſius l c. Igitur a c ad l m habet maiorẽ proportionem, quàm 4673 $\frac{1}{2}$ ad 153. E conuerſo igitur l m ad a l minorem habet proportionem, quàm 153 ad 4673 $\frac{1}{2}$. Et quoniam l m eſt latus polygoni habentis latera 96, igitur ambitus polygoni erit 14688. nam 96 multiplicatus in 153 dictum numeri producit. Igitur ambitus polygoni habet ad diametrum a c minorem proportionem, quàm 14688 ad 4673 $\frac{1}{2}$. Ambitus ergo polygoni erit triplus diametro circuli, & inſuper 667 $\frac{1}{2}$. hic autem minor eſt, quàm pars ſeptima ipſius diametri. Hic enim ſepties ſumptus producit 4672 $\frac{1}{2}$ qui minor eſt diametro unitate. Quoniam igitur polygoni ambitus minor eſt quàm triplus ſeſquiſeptimus diametro, & circuli ambitus ſit minor ambitu polygoni: multo magis igitur circuli circumferentia eſt minor, quàm tripla ſeſquiſeptima.

Deinceps uero conſtruens reliquam partem theorematis, dicit: Eſto circulus circa diametrum a c, & tertia pars recti angulus b a c. Hoc autem erit, ſi à puncto c ſumpta c b, æquali lateri hexagoni iungamus a b. Nam angulus in circumferentia hexagoni ad centrum factus eſt duæ tertiæ recti, in circumferentia uero trigoni eſt quatuor tertiæ recti. Quoniã igitur angulus a b c eſt rectus, & angulus b a c eſt tertia recti, erit angulus a c b duæ tertiæ recti. Si ergo educentes ipſam c b ad b, & æqualem ei ſumpſerimus, & ab a iunxerimus e a, fiet triangulus æquilaterus. Et quía a b cathetus eſt, & bipertitur baſim, erit a c æqualis ipſi c b. Si rurſus ſumpſerimus ipſam a c 1560, erit ipſa c b 780. Et quadratum a c 2433600. & quadratum ipſius c b 608400. Et ſi auferamus quadratum c b à quadrato a c, relinquetur quadratum a b 1826520 0. cuius latus quadratum 1351 proxime. excedit enim præciſum ſola unitate. propterea dixit ipſam a b minorẽ habere ad b c proportionem, quàm 1351 ad 780. multiplicationes uero ſubijciuntur.

Diuidatur in duo ęqua angulus b a c, angulo a f g. Quoniã igitur angulus b a g æqua-

æquatur angulo g c b, nam in eadem circumferentia consistunt: item æquatur angulo g a c: igitur angulus g c b est æqualis angulo g a c. & angulus a g c communis est rectus: igitur reliquus g f c, reliquo a c g æqualis. igitur triãguli a g c & c g f sunt inuicem ęquianguli, & similes. Igitur sicut a g ad g c, ita c g ad g f, & a c ad c f. Nam triangulorum similiũ latera æquos angulos complexa, sunt proportionalia. Verum sicut a c ad c f, ita utraque simul c a, a b ad c b, & a g ad g c. quia enim angulus b a c in duo æqua diuiditur, ducta a f erit sicut b a ad a c, ita b c ad c f. Et permutatim, sicut utraq; simul b a, a c ad b c, ita a c ad c f. Et est a b minor quàm 1351, & a c 1560, & b c 780. igitur utraq; simul a b, c b minorem habet ad b c proportionem, quàm 2911 ad 780. igitur a c ad c f habet minorem proportionem, quàm 2911, & 780. sicut autem a c ad c f, ita a g ad g c. igitur a g ad g c minorem habet proportionem, quàm 2911 ad 780. Ex his igitur erit quadratum a g 8473921. quadratum g c, 608400. Et quadratum a c est eis æquale. Erit igitur ipsum 9082321, cuius latus est tetragonicum proxime. nam excedit præcisum quadratum unitatibus 368 $\frac{1}{6}$. Eadem ratione dicit a c ad c g minorem habere proportionem, quàm 3390 $\frac{1}{4}$ ad 980. multiplicationes autem subijciuntur.

Diuidatur in duo æqua angulus c a g, ducta a h. propter bipartitionem igitur anguli & similitudinem triangulorum, & proportionalitatem laterum & componenti, & permutatim, sicut utraq; simul g a, a c ad g c, ita a h ad h c. & supponebatur a c minor quàm 2911. & ipsa a c minor quàm 3013 $\frac{3}{4}$. igitur utraq; simul g a, a c minor est quàm 5924 $\frac{3}{4}$. ipsa uero g c est 780. igitur utraq; simul g a, a c ad g c minorem habet proportionẽ, quàm 5924 $\frac{3}{4}$ ad 780. quare & a h ad h c minorem proportionem habet, quàm 5924 $\frac{3}{4}$ ad 780. quare a h ad h c minorẽ proportionem habet quàm 455 $\frac{3}{4}$ ad 60. nam utraq; utriusq; est pars, & horum quadrupli ipsa a h ad h c minorem proportionem habet, quàm 1823 ad 240. propter hoc enim dicit, quod utraque utriusq; est $\frac{4}{13}$. Et quoniam a h est 1823, erit quadratum eius 3323429. Est autem h c 240, & eius quadratum 57600. & est istis quadratis a h, h c æquale quadratũ a c. Erit igitur 3380429, cuius latus quadratum est 1838 $\frac{9}{11}$. nam huius quadratum excedit, uerum quadratum unitatibus 321 propè. quare a c ad h c minorẽ habet proportionem, quàm 1838 $\frac{9}{11}$ ad 240. multiplicationes uero subijciuntur.

Item in duo æqua diuidatur angulus h a c ducta k a. Rursus propter bipartitionem anguli, & similitudinẽ triangulorũ, & proportionalitatem laterũ, et componẽti, & permutatim, sicut utraq; simul h a, a c ad c h, ita a k ad k c. Verũ utraq; simul h a, a c minor est, quàm 3661 $\frac{9}{11}$. Quoniam enim h a supponitur 1823, & a c 1838 $\frac{9}{11}$. Est autem h c 240. Igitur utraq; simul h a, a c ad h c habet minorem proportionem, quàm 3661 $\frac{9}{11}$ ad 240. quare & a k ad k c minorem habet proportionem, quàm 3661 $\frac{9}{11}$ ad 240.

igitur a k ad k c minorem proportionem habet, quàm 1007 ad 66. & quadratum a k 1014049. quadratum uero k c est 4356: quibus æquatur quadratum a c. igitur erit 1018405, quorum latus quadratum est 1009 $\frac{1}{6}$ proximè. nam eius quadratum superat præcisum unitatibus 12 & $\frac{3}{63}$. Igitur a c ad c k minorem proportionẽ habet, quàm 1009 $\frac{1}{6}$ ad 66. multiplicationes autem subijcientur.

Item diuidatur in duo æqua angulus k a c ducta a l eadem ratione, sicut utraq; simul k a, a c ad k c, ita a l ad c l. & est a k minor quàm 1007, & a c minor quàm 1009 $\frac{1}{6}$, & k c 66. Igitur utraq; simul k a, a c, ad k c minorem proportionẽ habet, quàm 2016 $\frac{1}{6}$ ad 66. Igitur a l ad l c minorem proportionem habet, quàm 2016 $\frac{1}{6}$ ad 66. Et quoniam a l supponitur esse 2016 $\frac{1}{6}$ erit eius quadratum 4064928 $\frac{1}{36}$. Et ipsa l c est 66, cuius quadratũ est 4356: æquale uero ipsis ambobus simul quadratum

a c

a c 406928 $\frac{1}{36}$, cuius radix quadrata est 2017 $\frac{1}{4}$ proximè. nam quadratum eius excedit præcisum unitatibus 13 $\frac{6}{20}$. quare a c ad c l habet minorem proportionem, quàm 2017 $\frac{1}{4}$ ad 66. multiplicationes autem subijcientur.

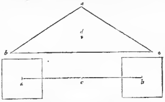
Quoniam igitur a c habet ad c l minorē proportionem, quàm 2017 $\frac{1}{4}$ ad 66. Ecō uerso igitur c l ad c a habet maiorem proportionem, quàm 66 ad 2017 $\frac{1}{4}$. et quoniā circūferētia c b est sexta pars circuli: erit igit̄ ipsa g c pars duodecima, et ipsa h g uigesimaquarta, & ipsa k c quadragesimaoctaua, & ipsa l c nonagesimasexta. Ambitus ergo polygoni ad diametrum circuli maiorem proportionem habet, quàm 6336 ad 2017 $\frac{1}{4}$. Hæc autem sunt tripla. etiam supererant 284 $\frac{1}{4}$, qui quidem minor est decem septuagesimis primis, quarum una est 27 $\frac{2}{3}$ proximè. Harum decuplus est 277. multo magis ergo circumferētia circuli maior est diametro sua, quàm tripla super decies partiens septuagesimas primas. Quemadmodum igitur numeri a b eo positi partiuntur, mediocriter declarati sunt. Sciendum quod Apollonius Pergeus Mocyntocio demonstrauit idē, per alios numeros ducens ad maiorem propinquitatem. id quidem diligētius factum & exquisitius uidetur, nihil autem confert ad Archimedis propositum. Diximus enim, eum in hoc libello proposuisse, se inuenturum propè propter uitæ utilitates. Quare neque Sporus Nicenus percipitur opportunè Archimedem accusare, quod non exquisitè ab eo traditum sit cui rectæ lineæ circuli circumferentia sit æqualis. Ex quib. ipse in Cerijs dicit, præceptorem suum Philonem Apogadarum ad numeros diligentiores rem hanc adduxisse, quàm Archimedes. Omnes enim ex ordine habentur, & uidentur eius propositum nō cognouisse. Vtuntur tamē multiplicationibus myriadū, & diuisionibus, quibus non est facile assequi inductum, & rationibus magnis. Si quis uero uoluerit omnino ad minuta magis hāc rem adducere, utatur licet his quæ in compositione mathematica à Claudio Ptolemæo tradita sunt, uel quæ sequuntur ex illis per partes & minutissimum calculum, & per rectas in circulo sitas. Et ego utiq; hoc iam fecissem, nisi quod sæpe dixi, intellexissem, quòd per ea quæ dicta sunt, non potest ad exquisitissimū perueniri, ut inueniatur recta linea, quæ sit circūferentiæ circuli dati ęqualis. Quanquam proximè quis ac ferè habuerit eam. Et quæ ab Archimede sunt hic dicta, sufficiant.

EVTOCII ASCALONITAE COMMENTARII in Circuli mensurationem, editione asscripta Milesio Mechanico Isidoro nostro præceptori.

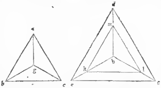
EVTOCII IN PRIMVM THEOREMA AEQVEPONDERA- *lium Archimedis.*

MOMENTVM ipsum, ô generosissime Petre, commune grauitatis & leuitatis esse genus, & Aristoteles asserit, & Ptolemęus eum sequutus. Timæus uero apud Platonem, momētum omne dicit grauitate produci. nā existimat leuitatem priuationē quandam esse. quorum opiniones licet disciplinarū studiosis legere, & ex Ptolemæi libro quem de Momentis conscripsit, & ex naturalibus negocijs Aristotelis, & ex Timæo Platonis, & ex his qui illos exposuerūt. Archimedes uero in hoc libro cētrum ponderis figuræ planæ existimat id, ex quo

suspensa manet æquedistãs horizonti, duorum uero uel plurium planorũ centrũ ponderis, hoc est grauitatis, a quo libra suspensa stat horizonti æquedistãs: ut puta sit triangulus a b c, & in medio eius punctum quoddam d, à quo suspensum maneat æquedistãs horizonti. Constat igiť quod partes a b c sibi ipsis æquepõderabunt, & nulla tẽdit altera magis ad horizõtem. Similiter autem & posita libra a b, & suspensis ex ea magnitudinib a b, si suspẽsa libra ex c habeat partes a b æqueponderantes, manebit æquedistãs horizonti, & erit centrum suspensionis magnitudinum a b pũctum c. Bene uidetur Geminus de Archimede dicere, quod dignitates petitiones appellat. nam æqualia grauia ex æqualibus distantijs aut lõgitudinibus æqueponderare dignitas est, & quæ sunt conuenienter. Et sunt clara omnia, his qui ea moderate inspiciunt.

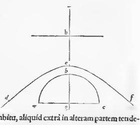


Aequalibus inquit, & similibus planis inuicem coaptatis, & eorũ centra grauitatis inuicem coaptabuntur. Omnes enim eorũ partes coaptabũtur: inæqualiũ uero & similium centra grauitatis erunt similiter sita. Intelligantur autem, uti in subiecta descriptione trianguli a b c, d e f inæquales & similes. & centrum grauitatis ipsius a b c sit g, ipsius uero d e f sit h: & iunganturа g, b g, c g, d h, e h, f h. Dico igitur, quod per æqualia diuidant angulos lineæ ductæ ab ipso g uel h puncto ad angulos. Fiat enim sicut e f ad b c, ita e h ad h k, & f h ad h l, & d h ad h m. Et iungãtur m k k l l m. erit iam k l m triangulus similis triangulo d e f. Quoniam enim est sicut e h ad h k, ita h f ad h l: erit e f ęque distans ipsi k l, & similiter m k ipsi e d, & ipsa d f ipsi l m. Igitur triangulus d e f similis est triangulo k l m. Est igitur sicut d e ad m k, ita e f ad k l, & f d ad l m. Supponitur autem propter similitudinem triangulorũ. esse sicut d e ad a b, ita e f ad b c, & d f ad a c. Sunt igiť latera a b c æqualia lateribus k l m. quare aptatur unumquodq; unicuiq;. Igitur triangulus a b c, est similis & æqualis triangulo k l m. quare coaptabitur centrum ipsius a b c, in centrũ ipsius k l m. Ipso autem g coaptato in h, & latera a b c coaptabuntur in k l m, & ipsæ a g, b g, c g in ipsas h k, h l, h m: & facient angulos ad k l m æquales angulis in triangulo a b c. quare & in ipso d e f. Sunt enim eædem rectæ, quæ à puncto h ad d e f, & ad k l m iunctæ fuerunt.



Cuiuscunq; figuræ cuius ambitus in eadem caua consistit, centrum grauitatis intra figuram contineri necesse est. Quas appellat in eadem cauas lineas, iam dictum est à nobis in procœmijs de Sphæra & cylindro. Quoniam enim figura quæ ha-

habet ambitum in eadem cauum, partes omnis plani inter ambitum suum complectitur, & angulos. Constat quod & centrum grauitatis intra ipsam figuram continetur. in quibusdam enim figuris centrum est extrà, in quibusdam in limbo. In semicirculo enim a b c centrum figuræ est g. in hyperbole autem d e f, cētrum figuræ est extrà, ubi diametri concurrunt inuicem, sicut habet h. Hęc enim dicta sunt in secundo libro Conicorum Apollonij. Verūtamen et in figura a b c, & in d e f, centrum grauitatis, à quo uidelicet figura suspensa maneat æquedistans horizōti, est intra ambitum. nam si foret in ambitu, aliquid extrà in alteram partem tenderet, quod non supponitur.



IN SECVNDVM.

ESto centrū grauitatis d, si esse potest. Quod enim sit in a b, ostensum est. nam suprà dictum est, quod duarum magnitudinum centrum est, à quo libra suspensa partes habet ęqueponderantes: & æquedistās manet horizonti, quare centrum magnitudinum a b est in ipsa a b.

IN QVINTVM.

AVt enim quod ab ipso a b maius est ipso c, ita ut æqueponderet, aut non. Hoc dictū rectè intelligere oportet, non utputa quod magnitudo a b sit omnino maior c: sed posita maior, aut secundum æqueponderātiam. Potest enim fieri, quod minor magnitudo magis ponderet quàm maior, per longitudinem libræ quæ maior admodum existat, & proportionem faciat inæqualem. Et auferatur ab ipso a b minus excessu, quo a b maius est ipso c, ita ut æqueponderent: ita ut reliquum, puta a sit cōmensuratum ipsi c. Oportet, inquit, auferre ab ipso a b magnitudinem quandam b: puta quod faciat reliquum a commensuratum ipsi c, & maius ipsum a ipso c secundum æqueponderationem. Hoc autem fieri potest per ea quæ in principio libri decimi Elementorum Euclidis dicta fuerunt, & in tertio Sphæricorum Theodosij.

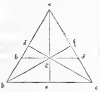
IN VNDECIMVM.

ET iungantur hæ, e f, g k, l m. cadent iam ipsæ iuxta ipsam b c. Quoniā enim ipsa b o est æqualis ipsi z c, & ipsa d b ipsi d c, erit sicut d b ad o b, ita d c ad z c. & diuidenti, sicut d o ad o b, ita d z ad z c. Verum sicut d o ad o b, ita a e ad e b. nā e o est iuxta ipsam a d. Sicut autem d z ad z c, ita a f ad f c. Igitur sicut a e ad e b, ita a f ad f c. Igitur e f est æquedistans ipsi b c. Similiter autem ostendētur & reliquæ.

Ipse a d c ad omnis triangulos ab ipsis a m, m k, k f, f c descriptos, similes ipsi a d c eam habent proportionem, quam habet c a ad a m. eoq; rectæ sunt æquales. Quoniam enim trianguli a d c, a f m sunt similes, habebunt inuicem proportionem a c ad a m duplicatam. Quoniam uero nunc supponitur, ipsam a c ipsius a m quadruplam esse, triangulus a d c habebit ad triangulum a f m, sicut sexdecim ad unum, & ad triangulos omnis ab a m, m k, k f, f c descriptos, proportionē habet, quam sexdecim ad quatuor. Igitur proportionaliter est, sicut triangulus a b c, ad triangulos ab a m, m k, k f, f c, similes ipsi a d c, ita ipsi trianguli ad ipsum a f m. Hoc est c a ad a m. Sunt enim similes, & in basibus æqualibus, & propterea inuicem æquales, quia habent ad inuicem sicut eorum bases. Verum c a ad a m ma-

iorem proportionē habet, quā u r ad r h. Proportio enim a c ad a m eadem est proportioni u r ad r p. Si enim intelligantur u r, c d eductæ & concurrentes in parallelas, erit sicut u r ad r p, sic c d ad d ω. Verum sicut c d ad d ω, ita c a ad a m. sicut ergo c a ad a m, ita u r ad r p. Habet autem u r ad r p maiorem proportionē, quàm u r ad r h. Igitur c a ad a m habet maiorem proportionem, quàm u r ad r h. Quod sanè esse non potest. nam lineæ rectæ ductæ per q iuxta ipsam d a, in eadem erunt centra hęc scilicet in alterā partē, & tendēt uidelicet in illud omnis magnitudines, & non æqueponderabunt: quod est commune positum. nam centrum parallelogrammorum positum est r, & triangulorum q.

Si enim educas istas c d g, f e g, b a g, constat quod in idem punctū ueniunt. eductis enim b a g, f e g, & concurrentibus inuicem in puncto g, & ipsa c d concurret in idem. Est autem sicut b g ad g a, ita f g ad g e, & b f ad a e, & f c ad e d, & c g ad d g. Erit iam trianguli b d c centrum grauitatis in ipsa h m. quoniam ipsa a b est tertia pars b h. Esto triangulus a b c, & iungantur ab angulis ad bipartitiones laterū rectæ a e, b f, c d. Igitur centrum grauitatis trianguli a b c est g. Et manifestū, quod omnes trianguli sunt inuicem æquales. quoniam omnes rectæ ab angulis ad bipartitiones laterum iunctæ per g transeunt, ne eiusdē plura centra existant. Quoniam autem a d, d b, b e, e c, c f, f a equales sunt, trianguli erunt æquales, qui habent uerticem punctum g, bases uero dictas rectas. Quare a g b triāgulus, duplus est triangulo g b e. quare & a g ipsius g e. Si igitur per g iuxta ipsam b c duxerimus ipsam h k, erit a h dupla ipsius h b. Quare uniuersaliter, si unū latus trianguli secetur, ita ut portio ad uerticem sit dupla portioni ad basim, & per sumptum punctum ducatur æquedistans ipsi basi: in ipsa ducta erit centrum grauitatis trianguli illius.



FINIS PRIMI EVTOCII.

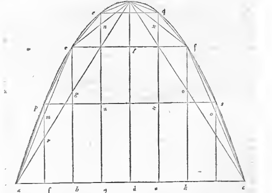
EVTOCII IN SECVNDVM AEQVEPONDERANTIVM *Archimedis.*

CVM diligenter ea quæ in primo libro habentur percurrimus, & inspectu difficilia satis declarauerimus: necessariū duximus, & quæ in libro secūdo obscurè dicta sunt, pro modo explicare. Dicit itaq; in propositione primi theorematis: Supponātur spacia a b, c d contenta à recta & sectione rectanguli coni, quæ possimus iuxta rectam datam applicare. hoc aūt non licet inde per ea quæ istic demonstrata sunt inuenire. Quoniā aūt ostensum est sibi, ueluti in libro de Sphera & cylindro dixit, quod figura huiusmodi est sesquitertia triāgulo habēti basem, & altitudinem cum portione eandem: plano uero existēte rectilineo sesquitertio, trianguli æquale possumus iuxta rectā datam applicare, cōnstat quod & figuris huiusmodi. Quæ uero in apparatu dicta sunt, omnia clara per quartum theorema primi istorum libri.

In

IN SECVNDVM.

IN secundo theoremate prædicit quædam declarantia, quo pacto in sectione rectanguli coni figura cognitæ possit inscribi. Et dicit, hæc ostendenda sunt in ordinibus. Quoniam igitur dictum obscurũ est, necesse est pauca quædam de eo dicere ex Conicis Apollonij inuẽta. Esto figura cõtenta sub parabola a b c, & recta a c, cuius sit diameter b d. Constat quod uertex portionis est punctum b. Vertices uero appellat Apollonius, terminos, qui sunt ad rectas diametrorum. Si iam iunxerimus has a b, b c, erit triãgulus a b c, qui basem habeat cũ portione eandẽ, & altitudinem æqualem: ductã à puncto b ad ipsam a c perpendicularẽ. Sic enim omnino b d est axis, si sumentes uertices portionũ a b. b c, ipsos e, f, & per ipsos duxerimus parallelas ipsi b d, puta e g, f o, erũt ipsę diametri portionũ a b, b c. Ostẽsum est enim in parabola, quod omnes ductæ æquedistãtes iuxta diametrũ sunt diametri sectionis. erũt iam e, f uertices portionũ: & quæ per e, f applicatę æquedistãtes ipsis a b, b c: erit & e l f iuxta ipsam a c. Quoniam itaq; e h, f k sunt inuicẽ æquedistãtes, & existentes diametri æquales æqualiũ portionũ, & coaptatæ inuicẽ uti in sexto Conicorũ ostẽsum est: & quoniã e g h est æquedistãs ipsi b d, erit sicut b g ad g a, ita d h ad h a. Est aũt b g ęqualis ipsi g a. nã e g secat eã in duo æqua æquedistãtem applicatę cõtingenti. igitur d h est ęqualis ipsi b a. Et eadem ratione d k ipsi k c est æqualis. Tota uero a d est æqualis toti d c. igitur d h est ęqualis ipsi d k: et ex hoc e l ipsi l f. Quare uerissimè dictũ est, quod recta iũgẽs uertices portionũ, æquedistãs erit basi portionis, & in duo æqua diuidet à diametro portionis. Iunganť



quoq; a e, e b, b f, f c. & diuidãtur in duo æqua pũctis m, n, x, o, & ducanť per pũcta m, n, x, o iuxta ipsam b d istæ p m r f, t n , q x z ω s o iungãtur a p, p e, e t, t b, b q, q f, f s, s c: & hęt a q, p b c d z s. Cõstatiã ex istis ante demõstratis, quod t q, et e f, & p s sunt æquedistantes ipsi a c: & quod t a est qualis a a & p d ipsi d s. Dico quod hæ secãt ipsam b d in numeros consequenter impares: hoc est, cuius b a sit unum,

unum, eius erit a l tria, & l d quinque, & d d septem: quoniam a g est æqualis ipsi g b, & e h est æquedistans ipsi b d, erit a h æqualis h d. igitur d a dupla est ipsius d h: quare & ipsius e l. Igitur quadratũ a d quadruplum erit quadrato e l. Sicut autem quadratum a d ad quadratum e l, ita ostensum est esse b d ad b l quare b d quadrupla est ipsius b l. igitur d l tripla est ipsius b l. Cuius igitur b l est unum, eius erit d l tria: & eadem ratione cuius b l fuerit quatuor, eius erit ipsa d l duodecim. & quoniam e n est æqualis ipsi n b, & e f ipsi f l, & h u ipsi u d, igitur e l dupla est ipsius l f, hoc est ipsius r a. igitur quadratum e l quadruplum est quadrato t a. igitur b l quadrupla est ipsius b a. quare l a tripla est ipsius a b. quorum igitur ipsa l b est quatuor, erit ipsa b a unum: et quorum ipsa l a tria, erit ipsa l d duodecim. Rursus quoniam a m est æqualis ipsi m e, & a k ipsi k g, & a f ipsi f h: erũt igitur a f, f h, h u, u d inuicem æquales: quorum igitur a d est quatuor, eorum f d est tria, hoc est ipsa p d. quorum igitur quadratum a d est sexdecim, horum quadratum p d est nouem: quorum igitur b d est sedecim, eorum est nouem b d, & residua d d septem. Quoniã igitur ostensum est, quorum b d est sedecim, eorũ b a esse unum, & a l tria, & d d septem: erit igitur residua l d quinq;. Diuiditur ergo ipsa b d ab æquedistantibus in numeros consequenter impares, ea quæ ad uerticem portionis est parte ab unitate denominata. Cõstat igitur ex descriptione, quod ductæ à diametris in numeros ab unitate cõsequenter dispositos excrescunt. Cuius enim est r a unum, eius est e l duo, & p d tria, & a d quatuor. Cum enim sint omnes æquedistantes, secãtur in æqualia. Appellatur autem ab Archimede figura a p e t b q f s c, cognitæ inscripta.

IN TERTIVM.

SImiles portionum sectiones coni Apollonius diffiniuit in sexto libro Conicorum illas, in quibus si ducantur in unaquaque æquedistantes basi æquales numero æquedistantes, & bases ad abscisas ab ęquedistantibus uersus uerticem partes diametrorum in eadem proportione erũt, & abscisæ ad abscisas, & quod parabolæ omnes sunt similes inuicem. Figura uero cognitæ inscripta, quid sit, dictũ est in præsumpto limmate. Hoc autem similiter diuidere diametros est, ut portiones earum eandem habeant proportionem. Residuum uero theorematis est clarum ex prædicta figura.

IN QVARTVM.

INscribatur rectilinea figura cognitæ in portione, ita ut circumcisæ partes sint minores ipso k. hoc autem manifestum est ex prædictis, in secundo Stichiosis ordinationis, & in primo de Sphæra & cylindro.

IN QVINTVM.

ET quoniam h f g i est parallelogrammum, &c. quoniam enim hæ k f, l g sunt æquales. Sunt enim portionũ æqualium diametri, & æqualiter ab axe distãtes a b d, & similiter diuiduntur à centris h i, erit sicut k h ad h f, ita l i ad i g, & permutatim. & idcirco h f est æqualis ipsi g i. est autem & æquedistans ei. nã omnes diametri parabolæ sunt æquedistantes: igitur ipsum h f g i est parallelogrammũ.

IN SECVNDAM PARTEM QVINTI.

ERit itaq; magnitudinis compositæ ex utrisq; a k b, b l c portionibus centrum grauitatis q. & compositæ ex utrisq; a k b, b l c triangulis, est centrum c, &c. Ostensum est enim in præsumpto, quoniam h m iungens centra portionum, bipartitur ab ipsa b d puncto q, cum sit ipsi f g æquedistans: & g h bipartitur puncto t. quare t est centrum grauitatis magnitudinis, compositæ ex triangulis a k b, b l c. Quoniam igitur triangulus b a c maiorem proportionem habet ad triangulos a k b, b l c, q̃ ad portiones, & reliqua. Quoniam enim ostensum est, trianguli a b c centrum grauitatis esse e: & triangulorum a b k, b l c centrum t, manifestũ est quod rectilinei a k b l c centrum grauitatis est in r e, diuisa puncto R secundũ

mu-

mutuam proportionē, quam habet triangulus a b c, ad triangulos a k b, b l c. quoniam aūt triangulus a b c maiorem proportionē habet ad triangulos a k b, b l c, ꝙ̄ ad portiones: nam portiones sunt triangulis maiores: cōstat quod si secuerimus ipsam et in proportionē quam habet triangulus ad portiones, punctū sectionis cadet superius ꝙ̄ sit R: quod erit centrū totius portiōis, propter mutuā affectionē.

IN SEXTVM.

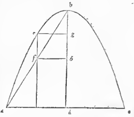
CEntrum portionis est omnino unum, & propinquius uertici portionis, ꝙ̄ centra inscriptarum rectilinearum. Nam trianguli a b c centrum grauitatis est, si contingat e, ipsa b d, ita diuisa ut e b sit dupla ipsius e d. Cōstat quod omnia centra inscriptarum rectilinearum cadent inter puncta h e. & quanto plurium laterum fuerit inscriptum cognitæ, tanto magis ipsi b appropinquat. Constat itaq; quod esse non potest, ut linea inter centrum inscripti cognitæ rectilinei, & centrū portionis intercepta sit maior e h. potest autem minor esse non solum ipsa h e, uerum omni alia data.

IN SEPTIMVM.

INscribatur itaq; in portione a b c rectilineū, simile ei quod est in portione d e f, hoc est similiter cognitæ. Similiter enim cognitæ inscribitur, quando sectiones parabolæ a b c æquales fiant ipsi e f g, ita ut latera cognitæ inscripti ipsi portioni a b c, sint numero æquales rectilinei laterib. inscripti ipsi e f g. quoniam enim puncta b & f, sunt uertices similium portionum, erunt ita cognitæ inscripta similia.

IN OCTAVVM.

ET quoniam est sicut b h ad h d, ita k m ad m f. nam portiones cum sint similes, habebunt centra diuidentia diametros in easdem portiones. & componēti, sicut b d ad d h, ita k f ad f m: & permutatim, sicut b d ad k f, ita d h ad m f. Est autem b d quadrupla ipsius k f. hoc enim in fine ostenditur, ubi est signum hoc ⌀. Cōsequenter autē illud nos ostendemus. Esto parabola a b c, cuius diametros b d, & ducatur ordinate a d, & iungatur a b: & diuidatur a b in duo æqua puncto f, & ducatur per f æquedistans ipsi b d ipsa e f. igitur ipsa e f est diametros portionis a b: & á punctis e f ducantur ordinate hæ e g f h. Quoniam itaque a f est æqualis f b, erit a b dupla ipsius f b, & a d ipsius f h: hoc est ipsius e g. Quare quadratum a d est quadruplum ad quadratum e g:



quare d b quadrupla est ipsius b g longitudine. Quoniam igitur b d est dupla ipsius b h, erit b h dupla ipsius b g, & ipsa h g æqualis ipsi g b: & ipsa h g æqualis etiam ipsi e f. quia ipsum e g f h est parallelogrammum. Igitur ipsa b d est quadrupla ipsius f e. & quoniam ipsa b d est quadrupla ipsius b f, etenim hoc est ostensum. nam ostensum est in sumpto, ipsam b d utriq; harum b g, e f esse quadruplam: quare b g est æqualis ipsi e f: & idcirco istic ipsa b f ipsi k f æqualis, & b d utriq; earum quadrupla: igitur ipsa b f est tertia pars ipsius f d. quoniam enim b d est quadrupla ipsius b f. Quorum igitur ipsa b d est quatuor, eorum ipsa b f est unum: & quorum b d est duodecim, eorum ipsa b f est tria. Est autem b f tripla ipsius f x. quorum igitur b f est tria, ipsa f x est unum. Tota igitur b x est quatuor: horum autem erat b d duodecim: igitur b x est tertia pars ipsius b d. Triplus autem

tri-

triangulus a b e portionum. Ostensum enim est ab eo, in eo quod scripsit de Coni rectanguli sectione, quod omnis figura cōtenta à recta, & sectione rectanguli coni, est sesquitertia trianguli basem eandem habentis, & altitudinē æqualem. quare portio a b c, est sesquitertia trīāguli a b c: & diuidenti, triangulus a b c est triplus portionū a k b, b l c. & est d b tripla ipsius e d. igitur ipsa b h est sesquitertia ipsius h d, quod erat demostrandum. quoniam enim b d est tripla ipsius d e. Quorum igitur b d est quindecim, eorum e d est quinq; : quorum uero d e est quinq;, eorum h e est unum: & tota h d sex, scilicet sexcupla ipsius h e. Quorū igitur b d quindecim, eorum d h est sex: & reliqua h b, nouem. quare b h est sesquialtera ipsius h d.

IN NONVM THEOREMA.

NOnum theorema ualde obscurū, exponemus iuxta loquentes quàm clarè poterimus. Quoniam enim istæ a b, b c, b d, b e sunt proportionales, & diuidenti, & permutatim, erūt a c, c d, d e in eadem proportione. Quoniam igitur a b, b c, b d, b e in eadem sunt proportione, & istæ a c, c d, d e. est sicut in primis magnitudinibus antecedens, & medium ad sequens: ita in secundis magnitudinib. antecedens, & medium ad sequens. Sicut ergo utreq; simul a c, c d: hoc est, d a ad d e: ita utraq; simul a b, b c ad d b. Sicut aūt utraq; simul a b, b c ad d b: ita dupla utriusque simul a b, b c ad duplam ipsius b d: quia partes eandem suis multiplicibus habent proportionem. Sicut ergo a d ad d e, ita duplum utriusq; simul a b, b c ad duplum d b. Rursus quoniam istæ c b, b d, b e in eadem sunt proportione, & istę a c, c d, d e. est autem per prædicta sicut a d ad d e, ita utraq; simul c b, b d ad b e. Erat autē sicut a d ad d e, ita duplum utriusq; simul a b, b c ad duplum ipsius b d. Sicut ergo unum ad unū, ita omnia ad omnia. Sicut ergo a d ad d e, ita antecedētia ad sequentia. Sunt autem antecedentia duplū utriusq; a b, b c: et utraq; c b, b d, hoc est duæ a b, tres c b, & una b d: sequētia uero duplum, b d, & sola b e. Est igitur sicut a d ad d e, ita recta composita ex dupla ipsius a b, & tripla c b, & sola d b ad compositam ex dupla b d & sola b e. Et quoniam composita ex duplo a b, & quadruplo c d, & quadruplo d b, et duplo b e, maior est composita ex duplo a b, & triplo c b, & sola d b: maius autem habet ad idem maiorem proportionem, quàm minus: maiorem ergo proportionem habet composita ex duplo utriusque simul a b, b c, & quadruplo utriusque simul c b, b d, ad compositam ex duplo d b, & sola e b, q̃ composita ex duplo a b, & ex triplo c b, & sola d b, ad compositam ex duplo b d, et sola e b. Verum sicut cōposita ex duplo a b, & tripla c b, & sola b d, ad compositā ex duplo b d, & sola e b: ita ostēsum est esse a d ad d e. Igitur cōposita ex dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d, ad compositam ex dupla b d, & sola e b, maiorē proportionem habet, q̃ a d ad d e. Si igit̃ uoluerimus facere eādem proportionē ipsius a d ad quandā aliam, erit illa minor q̃ d e. sit aūt d o. Est igit̃ sicut a d ad d o, ita composita ex dupla a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d, ad compositam ex dupla b d, & sola e b. Et ecōuerso, igitur est sicut o d ad d a, ita composita ex dupla b d, & sola c b, ad compositam ex dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d: & componēti, sicut o a ad d a, ita composita ex dupla a b, & quadrupla c b, & sexcupla ipsius b d, & tripla ipsius b e, ad cōpositā ex dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d. Ipsa enim b d sexies sumpta est, quater in primis, bis in secundis, & ipsa b e ter sumpta: bis inter primas, semel inter secundas. Supponitur autem & a d habere ad g h, eam proportionem, quam habet composita ex quincupla utriusque simul b e, & decupla utriusque simul c b, b d, ad compositam ex dupla a b, & quadrupla c b, sexcupla b d, & tripla b e, & est proportionalitas indirecta. Per æquam igitur, sicut o a ad g h, ita cōposita ex quincupla utriusq; simul a b, b e, & decupla c b, b d, ad compositam ex dupla utriusque simul a b, b e, & quadrupla c b, b d. Huius autem descriptæ proportionalitatis conditio sic fiet manifesta. Quoniam enim in primis

ma-

magnitudinibus sicut antecedẽs o a, ad consequens a d, ita in secundis magnitu
dinibus antecedẽs composita ex dupla a b, & quadrupla b c, & sexcupla b d, &
tripla b e, ad consequentem compositam ex dupla utriusq; a b, b e, & quadru-
pla utriusq; simul c b, b d. Sicut autem in primis magnitudinibus consequens i-
psa a d, habet ad quoddam aliud, ad ipsam g b: ita in secundis magnitudinibus a-
liud quid composita ex quincupla utriusq; a b, b e, & decupla utriusq; simul c b,
b d ad cõpositam ex dupla a b, & quadrupla c b, et sexcupla b d, & tripla b e. Quo
niam autem quincupla utriusq; simul a b, b e ad duplam eiusdem, eam habet pro
portionem quam quinq; ad duo: habet autem et decupla utriusque simul c b, b d
ad quadruplam eiusdem proportionem, quam quinq; ad duo: quandoquidẽ de
cem ad quatuor habeāt eam proportionem quam quinq; ad duo. Cõposita igit
ex quincupla utriusq; simul a b, b e, & decupla utriusq; simul c b, b d, ad compo si-
tam ex dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d, propor-
tionem habet quam quinq; ad duo. Quare a o ad g h propotrionẽ habet, quam
quinq; ad duo. Rursus quoniā ostensum est supertus, quod o d ad d a proportio
nem habet, quam e b cum dupla d b ad æqualẽ compositæ ex dupla utriusq; a b,
b e, cum quadrupla utriusq; c b, b d. Est autem sicut cõsequens in primis magni
tudinibus d a, ad aliud quid d e: ita in secundis magnitudinibus aliud quiddā cõ
posita ex dupla a b, tripla c b, & sola d b, ad antecedẽs, cõpositam scilicet ex e b, &
dupla b d. dissimiliter indirecte proportio, hoc est proportionalitate indirecta.
Igitur sicut o d ad d e, ita composita ex dupla a b, tripla c b, & sola b d, ad composi
tam ex dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla c b, b d. Quare & ẽ conuerso si-
cut e d ad d o, ita composita ex dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq;
simul c b, b d, ad compositā ex dupla a b, & tripla c b, et sola b d. & euertenti, sicut
d e ad e o, dico antecedens ad excessum, ita cõposita ex dupla utriusq; simul a b,
b e, cum quadrupla b c, b d, ad compositā ex c b sola, & tripla b d, & dupla e b. In
antecedẽte enim est dupla ipsius a b, & ipsius e b: in cõsequẽte uero dupla ipsius
a b sola. quare superfluit in excessibus dupla ipsius e b. Rursus in antecedẽte qua
drupla utriusq; simul c b, b d: in consequente uero tripla ipsius c b, & sola b d: qua
re superrelicta fuit in excessibus sola c b, & tripla ipsius b d. Bene igitur dictū est
quod est euertẽti sicut d e ad e o, ita composita ex dupla utriusq; simul a b, b e, &
quadrupla utriusq; simul c b, b d, ad cõpositā ex c b, & tripla ipsius b d, & dupla
ipsius e b. Quare ẽ cõuerso sicut o e ad e d, ita cõposita ex c b & tripla d b, et dupla
e b, ad compositā ex dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b,
b d. Est aūt sicut d b ad aliud quiddā ad ipsum e b ita a b, ad b c, et diuidẽti sicut d e
ad e b, ita a c ad c b. Eadẽ aūt ratione sicut c d ad e b, ita d e ad e b. Sicut ergo tripla
ipsius c d, ad triplā ipsius d b, ita dupla ipsius d e, ad duplā ipsius b e. Partes enī eā
inuicẽ habent proportionẽ, quam earū æquemultiplicia Igitur sicut unū ad unū,
ita omnia antecedentia ad omnia sequentia. Est igitur sicut d e ad e b, ita composi
ta ex a c, & tripla c d & dupla d e, ad cõpositam ex c b, & tripla ipsius b d, & dupla
ipsius b e. Quoniam enim ostensum est, sicut in primis magnitudinibus antece-
dens o e ad sequens d e, ita in secūdis magnitudinibus composita ex c b, & tripla
ipsius b d, & dupla ipsius b e, ad sequens cõpositam ex dupla utriusq; simul a b,
b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d. Sicut autem in primis magnitudinib. se-
quẽs d e ad aliud quiddam ad ipsam e b: ita in secundis magnitudinibus aliud
quiddam composita scilicet ex a c, & tripla c d, & dupla d e, ad antecedens
compositam ex c b, & tripla d b, & dupla e b. Per æquam igitur in proportionali
tate indirecta, sicut o e ad e b, ita composita ex a c, tripla c d, & dupla d e, ad cõpo
sitam ex dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d. & com-
ponenti sicut o b ad b e, ita composita ex a c, & tripla c d, & dupla d e, & dupla u-
triusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d, ad compositam ex dupla

utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d. Verum composita ex a c & tripla c d & dupla d e, & dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d, æqualis est cōpositæ ex tripla a b, & sextupla c b, & tripla d b. Ipsa enim a b bis assumpta est, inde & assumens ipsam a c, & ex quadrupla ipsius c b, unam facit tertio ipsam a b. Rursus ablata à quadrupla ipsius c b, una manet tripla ipsius c b. Assumens autem triplam ipsius c d, & triplam d b, facit sextupla ipsius c b. Rursus ea ablata à quadrupla ipsius d b, remanet sola d b: quę assumens duplā ipsius d e, & duplā ipsius e b, facit triplā ipsius b d. Bene igitur dicit quod o b ad e b eam habet proportionē, quam composita ex tripla a b & sextupla c b, & tripla d b, ad compositā ex dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d. Rursus quoniam hæ e d, d c, c a sunt in eadem proportione, & per conuersum supposinonis utraq; simul, unaquęq; harum e b, b d, b c, b a erit sicut e d ad mediam, & sequentē ipsas d c, c a, hoc est ad ipsam d a, sic utraq; simul e b, b d ad utranq; d b, b c, cum utraq; simul c b, b a. & componenti sicut e a ad d a, ita utraq; simul e b, b d, cum utraq; simul d b, b c, & cū utraq; simul c b, b a, ad utrāq; d b, b c, cum utraque simul e b, b a. Verum utraq; simul c b, b d, cum utraq; simul c b, b a, æqualis est utriq; simul e b, b a, & bis utriq; simul d b, b c. Semel enim extremæ sumūtur, & mediæ bis At uero utraq; simul d b, b c, cum e b, b a, æqualis est utriq; simul b d, b a, & bis c b, eadem causa. Quare est sicut e a ad d a ita composita ex e b, b a & dupla utriusq; simul d b, b c, ad compositam ex utraq; simul d b, b a, & dupla ipsius c b: quare & dupla ad duplam habet eandem proportionem. Sicut ergo e a ad d a, ita cōposita ex dupla utriusq; simul, e b, b a cum quadrupla utriusque simul c b, b d, ad compositam ex dupla utriusque simul a b, b d, & quadrupla ipsius c b. quare sicut e a ad tres quintas ipsius d a, ita composita ex dupla utriusque simul e b, b a, & quadrupla utriusque simul c b, b d, ad tres quintas cōpositæ ex dupla utriusq; simul a b, b d, & quadrupla ipsius c b. Verū sicut a e ad tres quintas ipsius d a, ita sumpta est b e ad f g. Sicut ergo e b ad f g, ita composita ex dupla utriusq; simul e b, b a, et quadrupla utriusq; simul c b, b d, ad tres quintas cōpositæ ex dupla utriusque a b, b e, & quadrupla ipsius c b. quoniā igitur ostensum est, sicut antecedens o b ad consequens b e, ita antecedens tripla utriusq; simul a b, b d, cum sextupla ipsius b c ad duplam utriusq; simul a b, b e, et quadruplam utriusq; c b, b d sicut autem consequens ipsa e b ad aliud quiddam, id est ad f g, ita consequens dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul d b, b c, ad tres quintas sequentis, hoc est ad tres quintas compositæ ex dupla utriusq; simul a b, b d, & quadrupla ipsius c b. In directa igitur proportionalitate per æquam, sicut o b ad f g, ita composita ex tripla utriusque simul a b, b d, & sextupla c b ad tres quintas compositæ ex dupla utriusq; simul a b, b d, & quadrupla ipsius c b. Composita uero ex tripla utriusque simul a b, b d, & sextupla c b, ad tres quintas compositæ ex dupla utriusq; simul a b, b d, & quadtupla ipsius c b, proportionē habet quam quinq; ad duo. Nam tripla utriusque simul a b, b d, ad duplam utriusq; simul a b, b d, proportionem habet sesquialterā: sed & sextupla c b ad quadruplam c b, eandem habet proportionem sesquialteram. Quoniā uero antecedentia ad consequentia sesquialtera sunt, & proportionē habent eā quam tria ad duo, igitur habebunt sicut quadragintaquinq; ad trigínta. utrunq; enim utriusque est quindecuplum. Sunt autem decem octo tres quintæ de triginta, igitur quadraginta quinq; ad decem octo habent proportionem, quam composita ex tripla utriusq; simul a b, b d, cum sextupla c b ad tres quintas compositæ ex dupla utriusque simul a b, b d cum quadrupla c b, qualis est etiam proportio o b ad f g sed quadraginta quinq; ad decem octo eam habent proportionē, quam quinque ad duo: nam quinque & duo sunt utriusque nonæ, quare & o b ad f g eā habet proportionem, quam quinque ad duo. Quoniam igitur ostensum est, quod

o a ad

o a ad g h proportionem habet eam quam quinq; ad duo, & o b ad f g eandē proportionem, erit ipsa f h duæ quintæ ipsius totius a b.

IN DECIMVM THEOREMA.

Constat iam quod frusti a d e c diameteros est ipsa f g,,. quoniā enim supponitur ipsa f b diametros ipsius portionis, & istæ a c, d e bipartitæ ab ea punctis f g sunt æquedistantes ei quæ in b contingit sectionem, constat quod omnes similiter ab illis ductæ æquedistantes siue inter illas, siue inter ipsam d e, & uerticem b bipertientur ab ipsa g f. & ideo dixit ipsam f g esse diametrum frusti.

Verū sicut cubus a f ad cubū ipsius d g, ita portio a b c ad portionē d e b,,. Quoniā eñ ostēsum est, ab eo quod portio a b c est sesquitertia triāgulo a b c. et portio d e b est trinagulo d e b. itē sesquitertia erit sicut portio a b c ad triangulū a b c, ita portio d e b ad triangulū d e b. & permutatim sicut portio ad portionem, ita triangulus ad triangulū, & ita quoq; dimidia eorū: sicut portio a b c ad portionē d e b, ita triāgulus a f b ad triāgulū d g b. quare si describamus parallelogrāma, erūt dupla triangulorū æquiangula, propterea quod d g & a f sunt ęquedistantes. quare & pro portionem habebunt compositam ex proportione laterū a f d g, & f b ad b g. eadem aūt proportio triangulorum & portionū. Portio igitur habet ad portionem proportionem compositā, ex proportione a f ad d g, & ex f b ad b g. Proportio autem f b ad b g est eadem ei quæ est quadrati ex a f ad quadratum ex d g. Proportio igitur portionis ad portionem, componitur ex proportione quadrati ex a f ad quadratum ex d g, et ex a f ad d g. proportio quoq; cubi ex a f, ad cubum ex d g, componitur ex eisdē, uti ostensum est in expositionibus de Sphæra & cylindro. Est ergo sicut portio ad portionem, ita cubus ex a f ad cubū ex d g. Et quoniam solidum quod basim habet quadratum ex a f, altitudinem uero lineam cōpositam ex dupla ipsius d g, & ipsa a f habet eam proportionem ad cubum ex a f quam dupla ipsius d g cum ipsa a f habet ad f a,,. Nam in eisdem basibus existentia habent inuicem ueluti altitudines. Est autem sicut d g ad a f, ita x n ad m n. & sicut dupla ipsius b g ad a f, ita dupla ipsius n x ad n m: & cōponenri, sicut dupla n x cum n m, ita dupla d g cum a f ad a f Ostēsum est autem, sicut cubus ex a f ad cubum ex d g, ita cubus ex m n ad cubum ex n x. & m n ad n t, sunt quatuor proportionales. & sicut prima ad quartam, ita solidum ex prima ad solidū sibi simile ex secunda & similiter figuratum. Sicut autem cubus ex d g ad solidū quod basim habeat quadratum ex d g, altitudinē uero rectam, compositam ex dupla a f, & ipsa d g, ita d g ad compositam ex dupla ipsius a f & ipsa d g. Rursus enim habentur inuicem sicut eorum altitudines. Sicut autem d g ad duplam ipsius a f, cū ipsa d g: ita t n, ad compositam ex dupla ipsius o n cū ipsa t n. est enim sicut a f ad d g, ita m n ad n x, & o n ad n t. & è conuerso sicut d g ad a f, ita t n ad n o. Factę igitur sunt quatuor magnitudines continenter inuicem positæ: prima quidem solidum quod habet basim, quadratum ex a f, altitudinem uero rectam compositā ex dupla d g & ipsa a f, & secunda cubus ex a f, tertia cubus ex d g: quarta solidū quod habet basim quadratum d g, altitudinem uero rectam compositam ex dupla a f & ex ipsa d g. & aliæ quædam rectæ in eadem proportione binæ & binæ sumptæ, ipsa composita ex dupla n x, & simpla m n, & secunda m n: & tertia n t, & quarta composita ex dupla o n & ex n t. igitur per æquam fiet sicut solidum basim habens quadratum ex a f, & altitudinem rectam compositam ex dupla d g & ipsa a f, ad solidum basim habens quadratum ex d g, & altitudinem compositam rectam ex dupla a f & simpla d g: ita ipsa composita ex dupla n x, cum m n, ad cōpositam ex dupla n o cum simpla n t. Verum sicut solida prædicta inuicem, ita ostensum est esse h i ad i k. Sicut ergo h i ad i k, ita composita ex dupla x n, & simpla m n, ad duplam n o, & simplum n t. & componenti, sicut h k ad k i, ita composita ex utraq; simul m n, n t, & dupla utriusq; simul x n, n o, ad compositam ex

dupla ipsius n o, & simpla n t. Sicut autem f g, ad f k, scilicet duas eius quintas: utraque enim harum g h, f k, est duæ quintæ ipsius g f, quoniam media quinta ponitur ipsa h k: ita composita ex quincupla utriusq; simul m n, n t, & decupla utriusque simul x n, n o, ad duplam utriusq; simul m n, n t, et quadruplam utriusq; simul x n, n o. duo enim ex quinq; & quatuor, ex decem duæ quintæ existunt. Quoniã igitur ostensum est, sicut f g ad i k, ita quincupla ipsius m n, n t, & decupla ipsius x n, n o, ad duplam ipsius n o & simplam n t. Rursus ostensum est, quod sicut f g ad f k, ita quincupla utriusq; m n, n r, & decupla x n, n o ad duplã ipsius m n, n r, & quadruplam ipsius x n, n o: erit sicut antecedẽs ad duo sequentia, ita antecedens ad duo sequentia: sicut f g ad f i, ita composita ex dupla ipsius o n, & simpla n t, et dupla utriusq; simul m n, n t, & quadrupla ipsius x n, n o: quæ est ęqualis compositę ex dupla m n, et quadrupla x n, et sexcupla ipsius n o, & tripla ipsius n t. sic enim sumptum est superius. Quoniam igitur quatuor rectę sunt cõtinuę proportionales hę m n, n x, o n, n t: & est sicut n t ad t m, ita quædam sumpta, hoc est r i ad f b, hoc est ad tres quintas ipsius g f, hoc est ipsius m o, & ostensæ sunt in rationali proportionalitate proportionales, erit per prædictũ r f duæ quintæ ipsius m n, hoc est ipsius f b. igitur b r est tres quintæ ipsius b f igitur b f ad r f proportionem habet, quam quinq; ad duo. quare punctum r est centrum grauitatis portionis a b c. Si iam sumpserimus centrũ grauitatis portionis b d e in puncto q, erit b q tres quintæ ipsius q g. Factum est itaq; sicut tota f b ad totam b r, ita ablata b g ad ablatam b q. utraque enim earum ad utramque proportionem habet, quam quinq; ad tria. Igitur residua f g ad residuam q r proportionem habebit, quam quinq; ad tria. Quoniã igitur supponitur, sicut frustũ a d, e c ad portionẽ d e b, ita m t ad t n: & sicut m t, ad t n, ita tres quintę ipsius f g, hoc est ipsa f h uel q r ad r i. erit ergo sicut frustum ad portionem, ita q r ad r i. & mutuo afficiuntur, & r est centrum totius portionis, igitur ipsum i d est centrum frusti.

EVTOCII ASCALONITÆ COMMENTARII in secundum æquelibrantium Archimedis Finis.